

Vplyv sfarbenia hadov na ich percepciu deťmi predškolského veku

The Effect of Snake Colours on their Perception by Pre-School Children

Žaneta Dodeková, Jana Fančovičová, Agneša Naniašová

Katedra biológie, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave

Abstract: Snakes were significant predators of our mammalian ancestors. Not surprisingly, therefore, the fear of snakes persists to the present. According to the bright coloration hypothesis, we are afraid of the snakes due to their conspicuous colouring. We investigated the role of aposematic colouration in fear of snakes in a sample of 5- to 6-year-old Slovak children. In contrast to the bright colouration hypothesis, participants quickly detected both aposematic and cryptic snakes among different coloured vertebrates and invertebrates irrespective of snake coloration. Gender differences in responses to snakes were not significant. In conclusion, bright coloration seems not to be a prominent cue eliciting fear of snakes in humans.

Keywords: fear, aposematism, crypticism, snakes, predator.

1 Úvod

Úzkosť a strach sú biologicky prastaré emócie podieľajúce sa na prežití človeka. Umožňujú našu adaptáciu na podmienky života. Ich konkrétny prejav v psychike, mimike, správaní, ale aj v telesnej oblasti, je teda daný biologickými predispozíciami i skúsenosťami získanými počas života, ako aj počas celej našej evolučnej histórie.

Reakciou na nebezpečenstvo podľa Cislara et al. (2009) je strach, ktorý je zameraný na špecifické stimuly. Slúži na to, aby sme lepšie zvládli nebezpečné situácie. Motiváciou vyhýbavého, únikového správania sa znižuje hrozba reálneho rizika (Woody & Teacman, 2000).

Strach zo živočíchov je ovplyvnený biologickými predispozíciami, ktoré sa formovali počas koexistencie cicavcov s predátormi (Öhman et al., 2001) a súvisí najmä s predátormi, ktoré predstavovali potenciálne nebezpečenstvo pre človeka. Matchett & Davey (1991) vo svojej práci uvádzajú, že strach zo zvierat nespôsobujú obavy z útoku a fyzickej ujmy

ako takej, ale skôr z nákazy a prenosu chorôb tzv. „disease-avoidance model“ (model vyhýbania sa chorobám).

Ďalším vysvetlením vzniku strachu a fóbií zo zvierat je tradičná evolučne psychologická hypotéza biologickej pripravenosti (Seligman, 1971). Autor predpokladá, že sa viac bojíme zvierat, ktoré boli reálnym nebezpečenstvom pre našich dávnych predkov (napr. jedovaté hady). Selektčné tlaky potom viedli k vzniku predispozície ku strachu z týchto zvierat. Davey (1994) opísal nasledovné dôvody vzniku strachu zo živočíchov: (1) priama alebo nepriama spojitosť so šírením infekcie a chorôb, (2) zvieratá so znakmi pripomínajúcimi odpor ako je sliz alebo výkaly, (3) zvieratá spájané so špinou, nákazou a chorobami, či už priamo vnímané ako špinavé alebo fungujúce ako signály špinavého prostredia (napr. holub, potkan), (4) predátory.

Podľa hypotézy biologických predispozícií sa bojíme hadov preto, lebo boli významnými predátormi našich cicavčích predkov a neskôr aj fylogeneticky najstarších primátov. Dôkazmi tejto hypotézy sú jednak schopnosti ľudí rôzneho veku rýchlejšie detegovať hadov v porovnaní s inými živočíchmi (LoBue & DeLoache, 2008) ako aj aktivácia špecifických neurónov pri pohľade na hada (Van Le et al., 2013). Podľa jedného z najnovších výskumov sa však predpokladá, že by strach z hadov nemusel priamo súvisieť s hadmi ako takými, ale s ich aposematickým sfarbením (Souchet & Aubret, 2016).

Znamená to, že podľa hypotézy aposematizmu sa hadov nebojíme preto, že sú to hady, ale preto, že sú výstražne, aposematicky sfarbené. Kontrastné farby tela s prostredím viac zaujmú ľudskú pozornosť ako menej kontrastné farby (Choi & Suk, 2015), čo môže byť adaptívne, keďže tieto farby signalizujú dostupnosť a prítomnosť predátora. LoBue & DeLoache (2011) však potvrdili rýchlejšiu detekciu hada v porovnaní so žabou či kvetom a to bez ohľadu na ich sfarbenie. Hypotéza aposematizmu rovnako nebola potvrdená výskumom Prokopa et al. (2018), v ktorom respondenti prejavili vyššiu mieru strachu z hadov ako iných živočíchov bez rozdielu ich sfarbenia.

Cieľom predloženej štúdie bolo testovanie hypotézy aposematizmu, t. j. či súvisí strach z hadov s ich nápadným sfarbením a nie s hadmi ako takými avšak odlišným metodickým postupom ako v práci Prokopa, Fančovičovej a Kučerovej (2018).

Predpokladali sme, že detekcia aposematicky sfarbených hadov bude rovnaká (rovnako rýchla) ako detekcia krypticky sfarbených hadov a to bez ohľadu na sfarbenie živočíchov medzi ktorými sa nachádzali (či už bolo aposematické alebo kryptické). Uvedený predpoklad nie je v súlade s hypotézou aposematizmu.

2 Materiál a metódy

Respondenti (N = 40) zapojení do výskumu boli deti predškolského veku (5 – 6 rokov) navštevujúce materskú školu v Čadci. Výskum prebehol v septembri 2017 a to v dopoludňajšom čase počas dvoch dní. Pred začatím výskumu bol pripravený notebook s dotykovým displejom, prostredníctvom ktorého sa výskum realizoval.

Do výskumu bolo zaradených desať obrázkov hadov (päť aposematicky a päť krypticky sfarbených druhov) a osem aposematických druhov stavovcov a bezstavovcov (dva druhy vtákov, dva druhy cicavcov, dva druhy obojživelníkov, dva druhy hmyzu a osem kryptických druhov stavovcov a bezstavovcov (dva druhy vtákov, dva druhy cicavcov, dva druhy obojživelníkov, dva druhy hmyzu). Pripravené fotografie použitých druhov boli upravené tak, aby mali jednotné pozadie, rozmer a kontrast.

Na úpravu obrázkov bol použitý program Adobe Photoshop. Výskum bol realizovaný prostredníctvom špeciálneho programu Matrix, ktorý zaznamenáva nielen správnosť, ale aj rýchlosť detekcie. Vytvorená matica obrázkov (3×3) pozostávala z distraktorov, ktorými boli rôzne druhy stavovcov, a cieľovým objektom hadom. Získané údaje boli automaticky zaznamenané v programe Microsoft Excel. Na spustenie programu bolo potrebné najskôr zadať demografické údaje respondenta ako vek dieťaťa, meno, typ skupiny a pohlavie.

Respondenti boli náhodne rozdelení do štyroch skupín po desať a bolo im predložených deväť obrázkov živočíchov, pričom jeden z nich bol had a toho mali nájsť. Obrázky boli generované náhodne, pričom však z piatich druhov hadov sa vždy tri z nich zopakovali, preto sme pri každom respondentovi zvolili osem detekcií. Vytvorené boli štyri skupiny. Prvá skupina (desať respondentov) hľadala aposematické hady medzi aposematicky sfarbenými druhmi živočíchov, druhá skupina hľadala aposematického hada medzi krypticky sfarbenými druhmi živočíchov, tretia skupina hľadala krypticky sfarbeného hada medzi aposematickými druhmi živočíchov a posledná, štvrtá skupina hľadala krypticky sfarbeného hada medzi krypticky sfarbenými druhmi živočíchov.

Deti si mali predstaviť situáciu, že sa stratili v lese. Inštrukcia znela: vyhl'adaj hada medzi ostatnými živočíchmi. Po každom určení sa objavil obrázok, aby sa dieťa pripravilo na ďalšiu detekciu, keďže sa zastavilo i zaznamenávanie času detekcie. Každý respondent prešiel ôsmimi detekciami.

Respondenti mali ruky položené na lavici a pri zobrazení matice sa dotkli prstom obrázok a následne vrátili ruku späť na lavicu vedľa počítača. Respondenti prichádzali po jednom k tabletu a tak sa každé dieťa v triede vystriedalo.

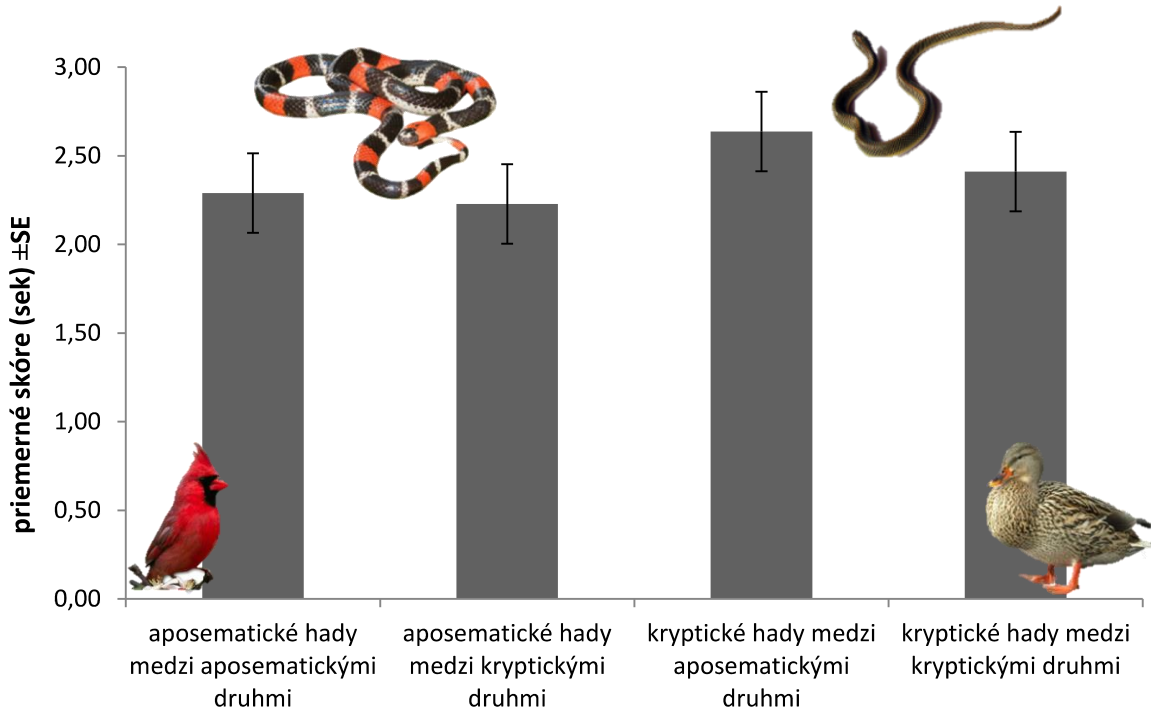
3 Výsledky

Napriek tomu, že boli údaje automaticky zaznamenané v programe Microsoft Excel, bol potrebný následný prepis údajov. Keďže tri druhy hada sa vždy zopakovali, a nemohli byť ďalších analýz zahrnuté z dôvodu duplicity údajov, bolo potrebné ich odstránenie. Z ôsmich detekcií tak bolo na ďalšie analýzy použitých päť detekcií bez zopakovania druhu. Na následné analýzy sme použili reakčný čas piatich druhov hadov, pohlavie respondenta a typ skupiny.

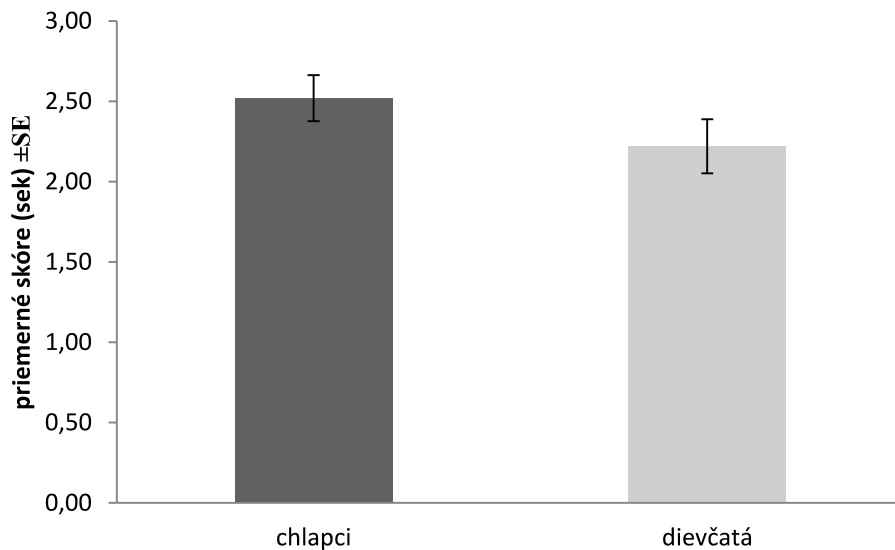
Použitím štatistického testu analýza variácie s opakovaním (ANOVA), kde závislými premennými bolo skóre rýchlosti detekcie hadov (čas v sekundách; päť opakovaní) a kategorickými premennými pohlavie a typ skupiny, sme nepotvrdili štatistický významný rozdiel ($F(3, 32) = 0,63$, $p = 0,60$) v rýchlosti detegovania hada medzi sledovanými skupinami

(graf 1). Rovnako nebola signifikantná ani interakcia medzi kategorickými prediktormi ($p > 0,05$) ani rozdiel medzi chlapcami a dievčatami ($F(1, 32) = 0,13, p = 0,72$; graf 2).

Respondenti rovnako rýchlo detegovali aposematické i kryptické hady medzi rôzne sfarbenými stavovcami i bezstavovcami bez ohľadu na pohlavie.

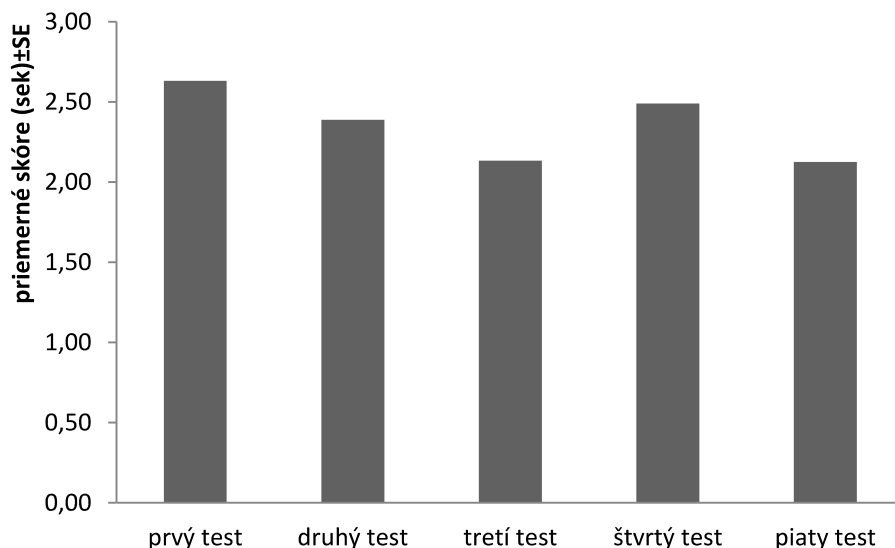


Graf 1: Porovnanie rýchlosti detekcie medzi skupinami.



Graf 2: Porovnanie rýchlosti detekcie hada medzi chlapcami a dievčatami.

Opakovania detekcie (početnosť opakovaní) nemali vplyv na rýchlosť detekcie hadov ($F(4, 128) = 2,09, p = 0,09$; graf 3).



Graf 3: Porovnanie rýchlosti detekcie hada medzi testami.

4 Diskusia a záver

Predložená štúdia skúmala úlohu nápadného sfarbenia pri strachu ľudí. U primátov sa vyvinuli averzívne reakcie k aposematickým farbám, ktoré sú často spojené s nebezpečenstvom (Ruxton et al., 2004). Na základe uvedeného majú primáty z hadov strach (Isbell, 2006, 2009). Hypotéza aposematizmu bola však predloženým výskumom vyvrátená. Potvrdili sme rovnakú rýchlosť detekcie aposematicky sfarbených hadov ako aj kryptických. Na základe dodnes publikovaných výskumných zistení sa zdá, že stočený tvar hadov (Kawai & He, 2016; LoBue & DeLoache, 2011) a výstražné pózy (Masataka et al., 2010), nie teda samotné ich sfarbenie, zohrávajú kľúčovú úlohu v rýchlej detekcii hadov (LoBue & DeLoache, 2011).

Naše výsledky sú v ostrom protiklade s výskumom Souchet & Aubret (2016), ktorí tvrdia, že aposematické sfarbenie spolu s cik-cakovými vzormi by mohli mať vplyv na negatívne vnímanie hadov a zároveň sú v súlade s výskumom Prokopa et al. (2018). Autori potvrdili rovnako rýchlu detekciu hada medzi ostatnými živočíchmi bez ohľadu na ich sfarbenie. Uvedené zistenie potvrdzuje skutočnosť, že aposematické sfarbenie nezohráva kľúčovú úlohu pri vyvolávaní strachu z hadov.

Aposematické farby nepochybne zvyšujú ľudskú pozornosť, ale špecializovaný vizuálny systém ľudí, ktorý umožňuje rýchle a presné odhalenie hadov s najväčšou pravdepodobnosťou prostredníctvom hadieho tvaru tela a ich pohybov. Ľudský vizuálny systém bol ovplyvnený dlhodobou koexistenciou hadov s cicavcami.

Literatúra

1. Cisler, Josh – Olatunji, Babatunde – Lohr, Matthias. Disgust, fear, and the anxiety disorders: A critical review. *Clinical Psychology Review*, 2009, 29:34–46.
2. Davey, Graham. Self-reported fears to common indigenous animals in an adult UK population – the role of disgust sensitivity. *British Journal of Psychology*, 1994, 85:541–554.

3. Isbell, Lynne. Snakes as agents of evolutionary change in primate brains. *Journal of Human Evolution*, 2006, 51:1–35.
4. Isbell Lynne. The fruit, the tree, and the serpent: why we see so well. *Harvard University Press*, Cambridge, 2009.
5. Kawai, Nobuyuki – He, Hongshen. Breaking Snake Camouflage: Humans Detect Snakes More Accurately than Other Animals under Less Discernible Visual Conditions. *PloS ONE*, 2006, 11(10).
6. LoBue, V. – DeLoache J. S. Detecting the snake in the grass. Attention to fear-relevant stimuli by adults and young children. *Psychological Science* 19, 2008, 284–289.
7. LoBue, V. – DeLoache, J. S. What's so special about slithering serpents? Children and adults rapidly detect snakes based on their simple features. *Visual Cognition*, 2001, 19:129–143.
8. Masataka, Nobuo – Hayakawa, S. – Kawai, N. Human young children as well as adults demonstrate “superior” rapid snake detection when typical striking posture is displayed by the snake. *PLoS ONE*, 2010, 5.
9. Matchett, G. – Davey, Graham. A test of a disease-avoidance model of animal phobias. *Behaviour Research and Therapy*, 1991, 29:91–94.
10. Öhman, Arne – Mineka, Susan. The malicious serpent snakes as a prototypical stimulus for an evolved module of fear. *Current Directions in Psychological Science*, 2001, 12(1):5–9.
11. Ruxton, Graeme, Douglas – Sherratt, Tom – Speed, M. P. Avoiding attack: The evolutionary ecology of crypsis, warning signals and mimicry. *Oxford University Press*, 2004.
12. Seligman, Martin. Phobias and preparedness. *Behavior Therapy*, 1971, 2:307–320.
13. Souchet, Jérémie – Aubret, Fabien. Revisiting the fear of snakes in children: The role of aposematic signalling. *Scientific Reports*, 2016, 6.
14. Van Le, Quan – Isbell, Lynne – Matsumoto, Jumpei et al. Pulvinar neurons reveal neurobiological evidence of past selection for rapid detection of snakes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2013, 101:19000–19005.
15. Woody, S. R. – Teachman, Bethany. Intersection of disgust and fear: Normative and pathological views. *Clinical Psychology-Science and Practice*, 2000, 7:291–311.

Kontakt

Žaneta Dodeková

Katedra biológie, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava
zaneta.dodekova@tvu.sk

Jana Fančovičová

Katedra biológie, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava
jana.fancovicova@truni.sk

Využitie biouhlia na imobilizáciu ťažkých kovov v pôdach zaťažených hutníckym priemyslom

Utilization of Biochar for Heavy Metals Immobilization in Smelter-Contaminated Soils

Vladimír Frišták¹, Martin Pipíška¹, Gerhard Soja²

¹Katedra chémie, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave

²Energy Department, Austrian Institute of Technology GmbH, Tulln, Rakúsko

Abstract: Unsecured landfills pose a serious risk to the environment by possible penetration of mobile contaminants into soil, subsoil, groundwater and potentially into the food chain. Promising remediation technologies are represented by immobilization of such contaminants by the application of suitable soil additives. In the study, we investigated the possibility of using biochar prepared from garden waste in the process of slow pyrolysis as a potential soil additive for the immobilization of heavy metals in contaminated soil. The results show a significant reduction in the concentration of available forms of Cd, Pb and Zn in the soil samples treated by biochar. Decrease in availability of Cu after addition of biochar was not observed, suggesting the difference in Cu binding mechanisms compared to other metals. More detailed studies are required in the context of pH changes, the sorption potential of biochar and amount of soluble organic forms of carbon.

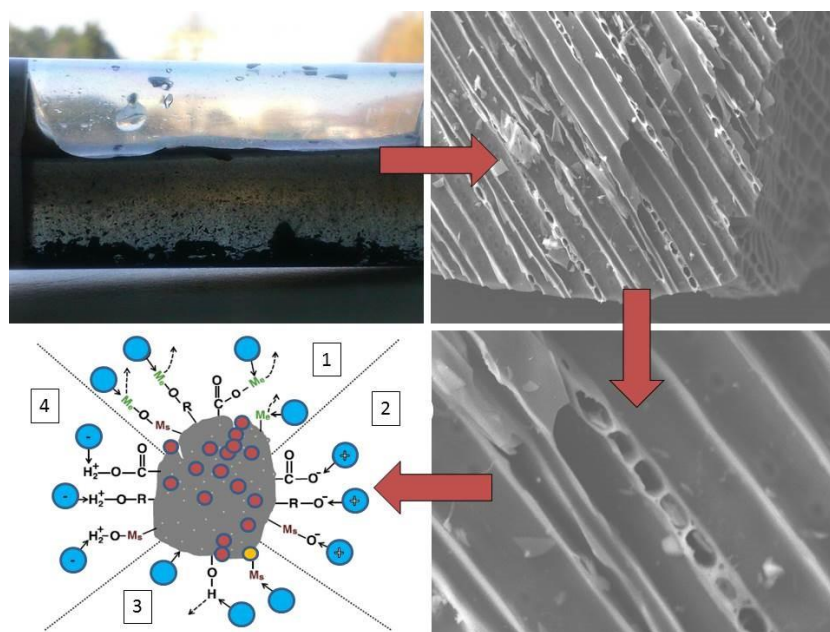
Keywords: biochar, immobilization, heavy metals, remediation, sorption interactions.

1 Úvod

Rozvoj aglomerácii a intenzifikácia priemyselných činností so sebou prináša rad negatívnych vplyvov na životné prostredie. Nezabezpečené skládky odpadov predstavujú obrovské environmentálne riziko vo forme penetrácie mobilných zložiek kontaminantov do pôdy, podložia, podzemných vôd a tým potenciálne do potravinového reťazca. Imobilizácia kontaminantov aplikáciou vhodných pôdných aditív predstavuje z pohľadu environmentálneho manažmentu dôležitý medzník v remediačných technológiách. Konvenčné techniky znižovania mobility kovov (zavápnenie, exkavácia kontaminovanej pôdy, pôdny „washing“) v priemyselne zaťažených pôdach sú často ekonomicky nákladné a z ekologic-

kého pohľadu problematike riešenia. Na základe týchto skutočností je nevyhnutné hľadať alternatívne možnosti spracovania nízkonákladových dostupných materiálov, často zaradených medzi odpady, tradičnými technológiami. V posledných desaťročiach zaznamenala pyrolýza a jej využitie v spracovaní biomasy a bioodpadov enormný záujem vedecko-výskumnej sféry i aplikačnej praxe. Práve záujem o biouhlie rezonuje v nespočetnom rade odborných publikácií. Charakteristika tohto materiálu vychádza z biologickej podstaty vstupnej biomasy a procesu jej následného spracovania – karbonizácie.

Podľa Medzinárodnej iniciatívy pre biouhlie (IBI, 2015) ide o tuhý materiál získaný procesom termochemickej konverzie biomasy za striktné anoxických podmienok. Lehmann a Joseph (2015) definitívne odlíšili pojem drevené uhlie ako zuhoľnatenej organickej hmoty využívanej výlučne na produkciu energie, od biouhlia široko využiteľného v manažmente životného prostredia. Vo všeobecnosti je biouhlie produkované v procese suchej karbonizácie, pyrolýzy resp. gasifikácie biomasy. V závislosti od podmienok prípravy (teplota termochemickej konverzie, čas zadržania, vstupná biomasa) sa menia aj samotné charakteristiky biouhlia. Vďaka vysokému obsahu organického C, značnej porozite, obsahu mikro- a makroporov a rozsiahlemu vnútornému povrchu predstavuje biouhlie zaujímavé pôdne aditívum, ktoré svojimi vlastnosťami prispieva k zlepšovaniu jej úrodnosti (Frišták, Pipíška, Soja, 2018).



Obrázok 1: Mechanizmus sorpcie anorganických kontaminantov biouhlím vo vodnom prostredí:

- 1 Iónová výmena, 2 Afinita kationových foriem kontaminantu k voľným funkčným skupinám,
 - 3 Precipitácia, 4 Afinita aniónových foriem kontaminantu k voľným funkčným skupinám,
- – fyzikálna adsorpcia, ● – ióny prítomné na povrchu biouhlia, ● – kontaminant v danej iónovej forme, Me – vymeniteľné ióny, Ms – ióny prítomné v štruktúre biouhlia.

Prítomnosť mikro- a mezopórov v biouhlí napomáha zvyšovaniu pôdnej humidity a rovnako retencii pôdnej vody (Verheijen et al., 2010). Biouhlie ako produkt s neutrálnym resp. zásaditým pH prispieva k alkalizácii kyslých pôd a zvyšuje tiež kationovú a aniónovú výmennú kapacitu pôdnej matrice (Cimò et al., 2014). Navyše veľký špecifický povrch biouhlia predstavuje širokú škálu a variabilitu možností pri formovaní sorpčných miest

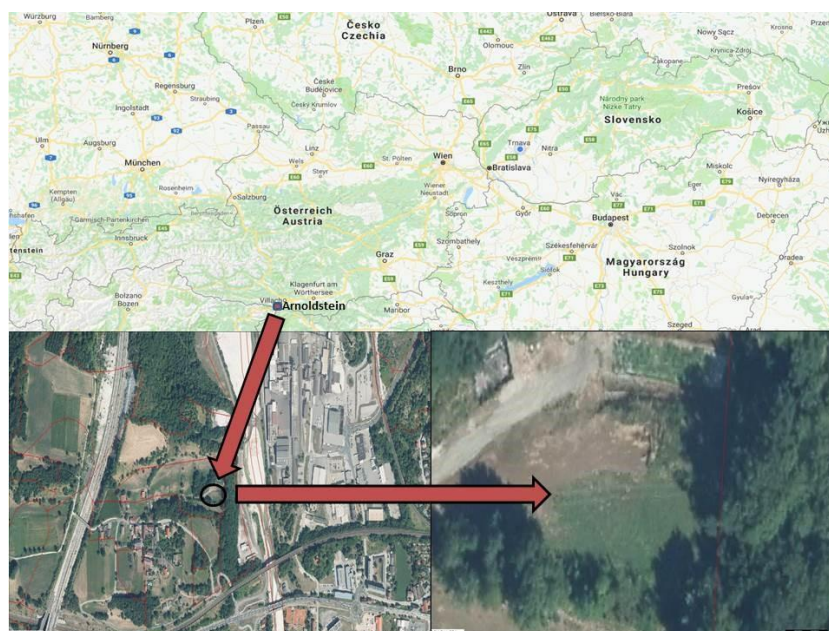
s voľnými funkčnými skupinami (obrázok 1), ktoré aktívne viažu mobilné formy xenobiôtik z vodných a pôdných roztokov (Pipíška et al., 2017).

Všetky vyššie uvedené vlastnosti pyrolýznych produktov predstavujú dôležité benefity, ktoré biouhlie ako pôdne aditívum, sorpčný materiál resp. imobilizačný nástroj so sebou prináša. Hlavným cieľom našej štúdie je fyzikálno-chemická charakterizácia a aplikačné využitie biouhlia produkovaného z biomasy drevného záhradného odpadu v procese pomalej pyrolýzy na imobilizáciu ťažkých kovov (Cd, Pb, Zn) v pôdach, ktoré sú dlhodobo zaťažené aktivitami hutníckeho a kovospracujúceho priemyslu.

2 Materiál a metódy

2.1 Príprava biouhlia a vzorkovanie pôdy

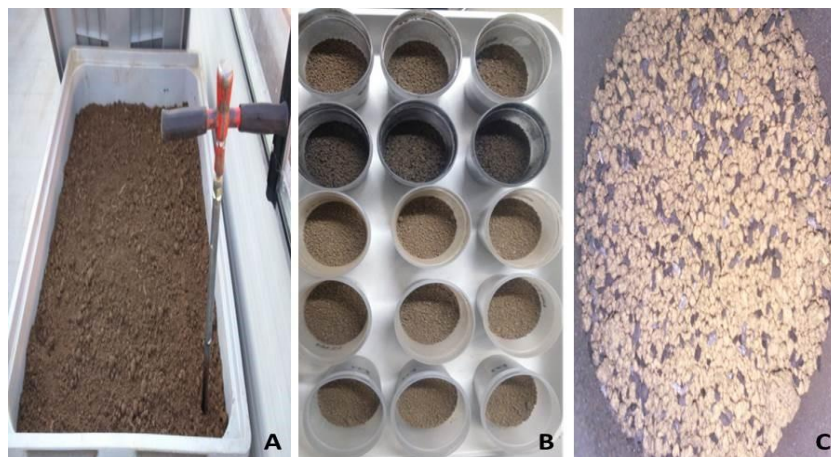
Vzorky biouhlia boli pripravené pomalou pyrolýzou drevného záhradného odpadu s obsahom listovej hmoty. Biomasa bola pred termochemickou konverziou zhomogenizovaná a rezaním bola získaná frakcia o rozmeroch 2 cm × 2 cm × 2 cm. Pyrolýza prebiehala v laboratórnom reaktore, pri teplote 500 °C, čase zdržania 120 min a teplotnom gradiente 5 °C/min v prostredí plynného dusíka na zabezpečenie jednotných teplotných a inertných podmienok.



Obrázok 2: Odberové miesto, lokalita Arnoldstein, Rakúsko.

Získaný produkt bol následne premytý v deionizovanej vode ($\sigma < 0,4 \mu\text{S}/\text{cm}$) s cieľom odstránenia nadbytočného popola a nečistôt, vysušený do konštantnej hmotnosti a preosiaty s cieľom získania frakcie 0,5 – 1 mm. Vzorky pôdy kontaminovanej ťažkými kovmi boli získané z lokality (obrázok 2), ktorá sa nachádza v oblasti zaťaženej intenzívnou činnosťou hutníckeho a metalurgického priemyslu (Arnoldstein, Rakúsko, 46° 33' 9,5" N, 13° 41' 21,5" E).

Vzorky zmesného typu hnedozeme a rendziny boli po odobratí z vrchného pôdneho horizontu (0 – 20 cm) zhomogenizované, zbavené rastlinných a živočíšnych zvyškov a preosiate na získanie frakcie < 2 mm. Technikou kvartovania bola zabezpečená reprezentatívnosť vzoriek na ich charakterizáciu a imobilizačné experimenty (obrázok 3 a – c).



Obrázok 3: Vzorka kontaminovanej pôdy pred a po inkorporácii biouhlia.

2.2 Fyzikálno-chemická charakterizácia vzoriek biouhlia a pôdy

Vo vzorkách biouhlia ako aj vo vzorkách modelovej pôdy boli stanovené základné fyzikálno-chemické parametre. Hodnoty aktívneho $\text{pH}_{\text{H}_2\text{O}}$ a výmenného pH_{KCl} boli zmerané vo výluhu vzorky v deionizovanej vode resp. v 1 mol/L KCl (1 h miešanie; 1 h stabilizácia) pomocou inoLAB pH level 2P (Weilheim, Nemecko). Hodnoty mernej elektrickej vodivosti (EC) boli stanovené vo vodných extraktoch vzoriek biouhlia a pôdy ($V_{\text{pevná fáza}}/V_{\text{kvapalná fáza}}$: 1/10).

Hodnoty kationovo-výmennej kapacity (KVK) boli stanovené použitím BaCl_2 -metódy (Frišták et al., 2015a). Stanovenie celkového obsahu C, H a N vo vzorkách biouhlia a pôdy bolo realizované pomocou CHN-S total analyzátora (CHNS-O EA 1108, Carlo Erba Instruments, Taliansko). Koncentrácie vybraných prvkov boli stanovené v *aqua regia*-mineralizátoch biouhlia a pôdy pomocou ICP-MS (PerkinElmer, Elan DRCe 9000). Morfológia a štruktúra biouhlia bola charakterizovaná použitím skenovacieho elektrónového mikroskopu (SEM, JEOL JSM7600F, Japonsko), za podmienok: vákuum $9,0 \times 10^{-4}$ Pa, napätie 20 kV a pri zväčšení 250 a 500 $\times$.

2.3 Dizajn experimentu

Pôdne vzorky boli obohatené prídavkom biouhlia v množstve 1 % a 5 % (w/w). Kontrolná vzorka (K) neobsahovala prídavok biouhlia. Po zapracovaní biouhlia boli vzorky počas 14 dní inkubované pri hodnote vodnej kapacity 65 % a teplote 19 ± 1 °C v uzavretých polypropylénových boxoch.

Po uplynutí času inkubácie bola v kontrolných vzorkách a vo vzorkách s 1 % a 5 % prídavkom biouhlia stanovená hodnota pH, vodivosti, KVK, celková koncentrácia Cd, Cu, Pb,

Zn a ich biologicky dostupných foriem jedнокrokovým extrakčným protokolom za použitia roztoku 1 mol/L NH_4NO_3 (extrakčný pomer w/v 1/2,5, rakúska norma L 1094-1).

3 Výsledky a diskusia

Procesom pomalej pyrolýzy dreveného záhradného odpadu s obsahom listovej hmoty pri 500 °C boli získané produkty s obsahom 79,8 % celkového C, 1,6 % celkového H, 0,7 % celkového N a celkovým produkčným výťažkom 40 % (vstupná biomasa/produkt). Základné fyzikálno-chemické charakteristiky získaných materiálov, ako aj pôdy sú uvedené v tabuľke 1. Hodnoty pH, EC a KVK poukazujú na podobnosť s materiálmi produkovanými z podobnej vstupnej biomasy za identických podmienok, ktoré sú bližšie charakterizované v práci Rajec et al. (2016) a Wawra et al. (2018). Koncentrácie sledovaných ťažkých kovov (Cd, Cu, Pb, a Zn) v biouhľí sú zanedbateľné a neprekračujú povolené limity podľa Európskeho certifikátu pre biouhlie (EBC, 2012).

Tabuľka 1: Vybrané fyzikálno-chemické charakteristiky vzoriek biouhlia a modelovej pôdy. Všetky merania boli realizované v troch opakovaníach (priemerná hodnota $\pm$ smerodajná odchýlka).

	Biouhlie	Pôda
pH _{H2O}	9,02 $\pm$ 0,10	6,24 $\pm$ 0,10
pH _{KCl}	8,70 $\pm$ 0,10	5,98 $\pm$ 0,10
EC [$\mu\text{S}/\text{cm}$]	1142,50 $\pm$ 21,84	71,25 $\pm$ 3,87
objemová hmotnosť [kg/L]	0,34 $\pm$ 0,02	1,45 $\pm$ 0,10
KVK [cmol/kg]	12,65 $\pm$ 0,45	15,40 $\pm$ 0,30
Cd [mg/kg]	<LOD*	39,20 $\pm$ 3,50
Cu [mg/kg]	10,40 $\pm$ 0,95	154,85 $\pm$ 6,40
Pb [mg/kg]	26,78 $\pm$ 1,30	1482,60 $\pm$ 10,50
Zn [mg/kg]	93,15 $\pm$ 2,65	1312,10 $\pm$ 10,26

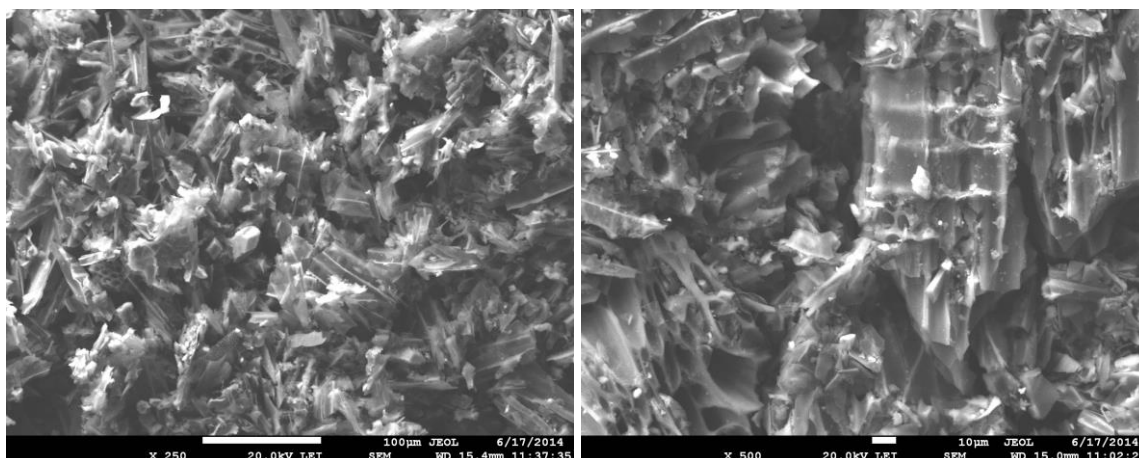
*<LOD – hodnota nižšia ako medza detekcie daného stanovenia

Fyzikálno-chemická charakterizácia skúmanej pôdnej matrice poukázala na slabo kyslý charakter a pomerne vysokú hodnotu KVK, ktorá je porovnateľná s hodnotou KVK pôdy pochádzajúcej z blízkosti nášho odberového miesta (Karar et al., 2015). Rovnako hodnoty koncentrácie ťažkých kovov zistené autormi korelujú s obsahmi, ktoré boli zistené v našej práci.

Podľa rakúskeho zákona S2082-2 stanovujúceho prípustné limity ťažkých kovov v poľnohospodársky využívaných pôdach, boli koncentračné limity v prípade Cd prekročené 40-násobne, Cu 1,5-násobne, Pb 15-násobne a v prípade Zn 4-násobne. Na základe tohto zistenia konštatujeme, že ide o pôdu dlhodobo zaťaženú priemyselnými aktivitami a jej remediácia je nevyhnutná z hľadiska eliminácie rizika novej penetrácie ťažkých kovov do podzemných vôd a biologických systémov.

Skenovacia elektrónová mikroskopia (SEM) odhalila charakteristické štruktúry a morfológiu povrchov biouhlia produkovaného z rastlinnej biomasy a lignocelulóзовých odpadov (obrázok 4). Na základe získaných mikrosnímkov pri zväčšení 250 $\times$ a 500 $\times$ vieme diferencovať zmeny, ktoré nastali vplyvom termochemickej konverzie biologického materiálu a prispeli k formovaniu vysoko porózneho materiálu s rozsiahlym systémom

mikro- a mezopórov, lamíel a komôrok. Štruktúrne a fyzikálno-chemické vlastnosti biouhlia naznačujú jeho možné využitie pri imobilizácii ťažkých kovov v pôdnej matrici. Tento predpoklad sme overili v ďalších experimentoch.



Obrázok 4: SEM-snímky biouhlia pripraveného zo záhradného drevného odpadu s obsahom listovej hmoty pri zväčšení 250× a 500×.

Po zapracovaní biouhlia pripraveného z drevného záhradného odpadu s obsahom listovej hmoty do pôdnych vzoriek (prídavok 1 % a 5 % w/w) a následnej krátkodobej kultivácii (14 dní) boli opäť stanovené vybrané fyzikálno-chemické charakteristiky (tabuľka 2).

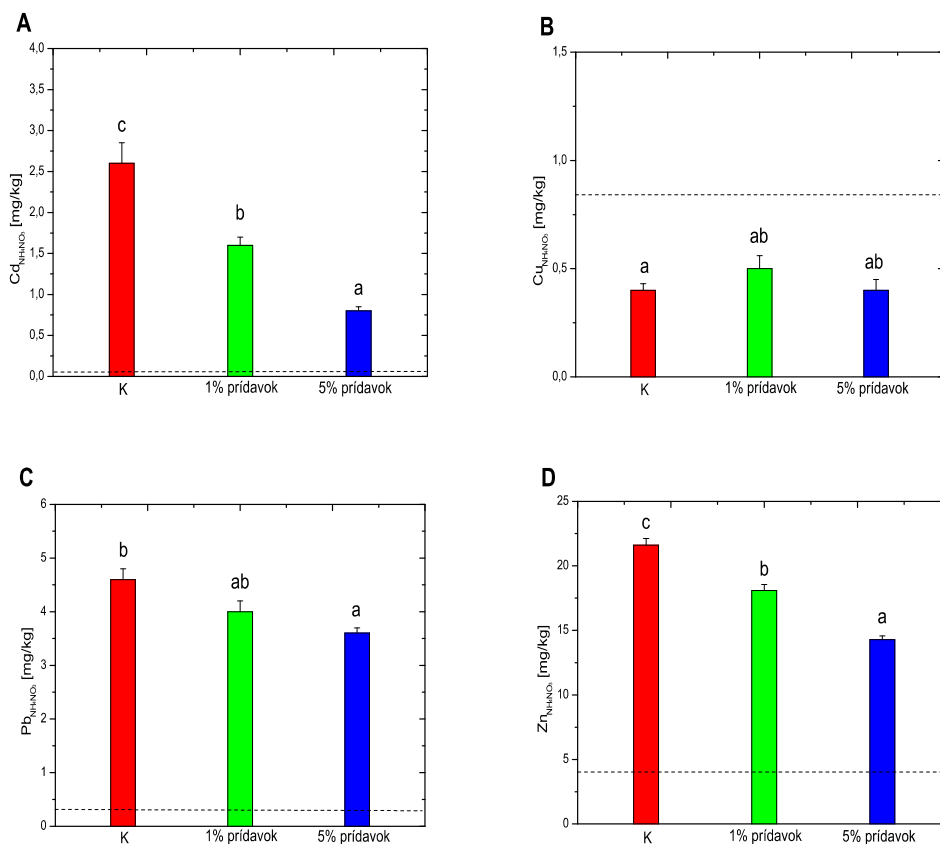
Tabuľka 2: Vybrané fyzikálno-chemické charakteristiky kontrolnej vzorky (K) a vzoriek s 1 % a 5 % (w/w) prídavkom biouhlia po krátkodobej kultivácii (14 dní, 19 °C, vodná kapacita 65 %). Všetky merania boli realizované v troch a experimenty v piatich opakovaniach (priemerná hodnota ± smerodajná odchýlka).

	K	1% prídavok	5% prídavok
pH _{H2O}	6,20 ± 0,10	6,75 ± 0,10	7,22 ± 0,10
pH _{KCl}	5,90 ± 0,10	6,35 ± 0,10	6,90 ± 0,10
EC [µS/cm]	73,65 ± 3,18	126,14 ± 6,84	168,50 ± 10,20
KVK [cmol/kg]	15,35 ± 0,40	17,60 ± 0,60	18,40 ± 0,20
Cd [mg/kg]	39,10 ± 2,84	39,20 ± 1,84	39,20 ± 1,94
Cu [mg/kg]	154,92 ± 7,65	155,60 ± 7,20	157,40 ± 8,45
Pb [mg/kg]	1483,91 ± 12,64	1484,10 ± 13,60	1485,65 ± 10,80
Zn [mg/kg]	1313,50 ± 11,85	1314,20 ± 16,64	1313,55 ± 15,60

Je zrejmé, že vplyv biouhlia sa prejavil najmä v alkalizácii pôdnej reakcie, zvýšení hodnoty mernej elektrickej vodivosti, ako aj kationovo-výmennej kapacity pôdnych vzoriek. Nárast celkových koncentrácií vybraných ťažkých kovov môžeme považovať za zanedbateľný a štatisticky nevýznamný. Z pohľadu hodnotenia kvality pôd má veľký význam biologická dostupnosť ťažkých kovov.

Na stanovenie prístupnosti kovov v pôdnej matrici je možné využiť viacero fyzikálnych, chemických a biologických metód a postupov. Pri charakterizácii biologicky prístupných foriem kovov v pôdnom systéme nesmieme zabúdať na fakt, že ide najmä o vodorozpustné formy, vymeniteľné frakcie a frakcie ľahko uvoľniteľné do chemicky neagresívnych roztokov (Frišták et al., 2015b). V našom prípade sme použili simultánny extrakčný protokol s 1 mol/L dusičnanom amónnym ako extraktantom. Je zrejmé, že vplyv biouhlia

sa prejavil v znížení extrahovateľnosti a tým štatisticky významnom znížení prístupných foriem Cd, Pb a Zn (obrázok 5).



Graf 1: Vplyv 1 % a 5 % (w/w) prídavku biouhlia na prístupné formy Cd (A), Cu (B), Pb (C) a Zn (D) získané pomocou simultánneho extrakčného protokolu s 1 mol/L NH_4NO_3 v porovnaní s kontrolou (K).

Prerušovaná čiara predstavuje povolené limity extrahovateľných foriem vybraných kovov pre poľnohospodársky využívané pôdy podľa rakúskeho štandardu S 2088-2. Odlišné písmená indikujú štatisticky významné rozdiely pri $p < 0,05$ (Duncanov test).

V prípade Cd bol pozorovaný pokles dostupných foriem o 38 % pri 1 % prídavku biouhlia a takmer o 70 % pri 5 % prídavku biouhlia v porovnaní s kontrolou. Pokles dostupných foriem o 13 % (1 % prídavok) a 21 % (5 % prídavok) v porovnaní s kontrolou bol zaznamenaný v prípade Pb. Dostupnosť Zn klesla o 16 % v prípade 1 % prídavku a o 31 % v prípade 5 % prídavku biouhlia v porovnaní s kontrolnou vzorkou.

V prípade Cu pokles dostupnosti po prídavku biouhlia nebol pozorovaný, čo naznačuje rozdielnosť väzbových mechanizmov Cu v porovnaní s inými kovmi. Je zrejmé, že Cu je v pôde prevažne viazaná do foriem organických komplexov, ktoré môžu vplyvom zvýšenej hodnoty pH podliehať rozkladu, a tým ľahko mobilizovať Cu.

V práci Karer et al. (2015) autori poukazujú na fakt, kedy ani využitie vápna ako alkalizačného aditíva nedokázalo znížiť prístupnosť Cu, ale podobne ako v našom prípade došlo k zvýšeniu koncentrácie jej mobilných foriem. Autori rovnako poukazujú na možnosť silného vplyvu pôdnej reakcie, ktorá reguluje dostupnosť Cu z pôdnej matrice. Na dôvažok Uchimiya et al. (2011) vyslovili hypotézu, že v prípade imobilizácie Cu v kontaminovanej pôde s aplikáciou biouhlia ako pôdneho aditíva je nutné uvažovať o možných kompetíciách

medzi voľným rozpustným organickým uhlíkom (z angl. dissolved organic carbon, skr. DOC) a voľnými Cu iónmi o aktívne sorpčné miesta na vnútorných a vonkajších povrchoch materiálu.

4 Záver

Remediácia kontaminovaných pôd aplikáciou vhodných a environmentálne akceptovateľných aditív predstavuje dôležitý medzník v obnove životného prostredia ako aj trvalo udržateľnom rozvoji našej spoločnosti. Je zrejmé, že recyklácia odpadových materiálov, produkcia nových, hodnotných produktov a využitie známych technológií v nových aplikáciách je oblasť výskumu, ktorá si vyžaduje našu pozornosť.

Predložená štúdia sleduje možnosť využitia biouhlia, pripraveného zo záhradného odpadu v procese pomalej pyrolýzy ako potenciálneho pôdneho aditíva na imobilizáciu ťažkých kovov v priemyselne zaťaženej pôde z oblasti Arnoldstein v Rakúsku. Výsledky poukazujú na výrazné zníženie koncentrácie dostupných foriem Cd, Pb a Zn v pôdnych vzorkách s 1 % a 5 % (w/w) prídavkom biouhlia. Správanie Cu si vyžaduje detailnejšie štúdium najmä v kontexte zmien pôdneho pH, sorpčného potenciálu biouhlia a obsahu rozpustných organických foriem uhlíka.

Acknowledgement: The authors gratefully acknowledge the support of Dr. Libor Ďuriška at SEM analysis, support of Dr. Wolfgang Friesl-Hanl at soil sampling and Dr. Katarína Kotuláková at language proofs.

Literatúra

1. Austrian Standards S 2088-2. 2014. Contaminated sites – part 2: application-specific evaluation of soil pollution of old sites and old waste dumps. Austrian Standards Institute. Vienna. Austria.
2. Cimò, Giulia – Kucerik, Jiri – Berns, Anne – Schaumann, Gabriele – Alonzo, Giuseppe – Conte, Pellegrino. 2014. Effect of heating time and temperature on the chemical characteristics of biochar from poultry manure. In *Journal of Agricultural and Food Chemistry*. Vol. 62, pp. 1912–1918. ISSN 1520-5118.
3. EBC – European Biochar Certificate. 2012 – Guidelines for a Sustainable Production of Biochar. European Biochar Foundation, Arbaz, Switzerland.
4. Frišták, Vladimír – Gablovičová, Tatiana – Pipíška, Martin – Michálek, Barbra – Lesný, Juraj. 2015. Application of ^{65}Zn and ^{54}Mn isotopic dilution for evaluation of available soil manganese and zinc fractions in Western Slovak region. In *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*, vol. 303, no. 3, pp. 2489–2495. ISSN 1588-2780.
5. Frišták, Vladimír – Pipíška, Martin – Lesný, Juraj – Soja, Gerhard – Friesl-Hanl, Wolfgang – Packová, Alena. 2015. Utilization of biochar sorbents for Cd^{2+} , Zn^{2+} , and Cu^{2+} ions separation from aqueous solutions: comparative study. In *Environmental monitoring and assessment*. Vol. 187, article no. 4093.
6. Frišták, Vladimír – Pipíška, Martin – Soja, Gerhard. 2018. Pyrolysis treatment of sewage sludge: A promising way to produce phosphorus fertilizer. In *Journal of Cleaner Production*. Vol. 172, pp. 1772–1778. ISSN 0959-6526.

7. IBI. 2015. Standardized product definition and product testing guidelines for biochar that is used in soil, IBI-STD-01.1., International Biochar Initiative, www.biochar-international.org/characterizationstandard, accessed November 2015.
8. Karer, Jasmin – Wawra, Anna – Zehetner, Franz – Dunst, Gerald – Wagner, Mario – Pavel, Petronela-Bianca – Puschenreiter, Markus – Friesl-Hanl, Wolfgang – Soja, Gerhard. 2015. Effects of biochar and compost mixtures and inorganic additives on immobilisation of heavy metals in contaminated soils. In *Water, Air and Soil Pollution*. Vol. 226, article no. 342. ISSN 1573-2932.
9. Lehmann, Johannes – Joseph, Stephen. 2015. *Biochar for environmental management: science, technology and implementation*. 2. vyd. Earthscan from Routledge. ISBN 978-0-415-70415-1.
10. Pipíška, Martin – Michálek-ová-Richveisová, Barbora – Frišták, Vladimír – Horník, Miroslav – Remenárová, Lucia – Stiller, Richard – Soja, Gerhard. 2017. Sorption separation of cobalt and cadmium by straw-derived biochar: a radiometric study. In *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*. Vol. 311, no. 1, pp. 85–97. ISSN 1588-2780.
11. Rajec, Pavol – Rosskopfová, Oľga – Galamboš, Michal – Frišták, Vladimír – Soja, Gerhard – Dafnomili, Argyro – Noli, Fotini – Dukić, Andjelka – Matović, Ljiljana. 2016. Sorption and desorption of pertechnetate on biochar under static batch and dynamic conditions. In *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*. Vol. 310, no. 1, pp. 253–261. ISSN 1588-2780.
12. Uchimiya, Minori – Wartelle, Lynda – Klasson, Thomas – Fortier, Chanel – Lima, Isabel. 2011. Influence of pyrolysis temperature on biochar property and function as a heavy metal sorbent in soil. In *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, vol. 59, no. 6, pp. 2501–2510. ISSN 1520-5118.
13. Verheijen, Franciscus – Jeffery, Simon Lee – Bastos, Ana Catariina – van der Velde, Marijn – Diafas, Iason. 2010. Biochar application to soils – a critical scientific review of effects on soil properties, processes and functions. European Commission. ISBN 978-92-79-14293-2.
14. Wawra, Anna – Friel-Hanl, Wolfgang – Puschenreiter, Markus – Soja, Gerhard – Reichenauer, Thomas – Rithner, Caroline – Watzinger, Andrea. 2018. Degradation of polycyclic aromatic hydrocarbons in a mixed contaminated soil supported by phytostabilization, organic and inorganic soil additives. In *Science of the Total Environment*. Vol. 628–629, pp. 1287–1295. ISSN 0048-9697.

Kontakt

Vladimír Frišták

Katedra chémie, Pedagogická fakulta,
Trnavská univerzita v Trnave
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava
vladimir.fristak@truni.sk

Martin Pipíška

Katedra chémie, Pedagogická fakulta,
Trnavská univerzita v Trnave
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava
martin.pipiska@truni.sk

Gerhard Soja

Energy Department, Austrian Institute of Technology GmbH
Konrad Lorenz Str. 24, 3430 Tulln, Rakúsko
Gerhard.Soja@ait.ac.at

Vybrané faktory vplývajúce na zatváranie súkvetí čakanky obyčajnej (*Cichorium intybus*)

Certain Factors Affecting Flower Closure in Common Chicory (*Cichorium intybus*)

Dominika Molnárová, Pavol Prokop

Katedra biológie, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave

Abstract: Flower opening/closure has received strong attention since Darwin, but its evolutionary, ultimate function is poorly understood. Carl von Linné suggested that flower opening/closure follows fixed circadian rhythm (Linné's clock), but recent research showed that flower closure may be induced by some environmental variables (e.g., humidity, light) as well as by the onset of pollination. According to Linné, common chicory (*Cichorium intybus*) should be closed at about 14:00. We performed field observations of flower opening/closure in common chicory between August and September 2016. We found that mean flower opening took about 300 min, but it is influenced by time of season. Flowers were open for longer time as the season progressed, which could be influenced either by temperature drop, shorter time of day and/or by lower pollinator activity. Future research should disentangle the factors which influence flower closure in common chicory.

Keywords: common chicory, flower opening/closure, seasonal differences.

1 Úvod

Kvitnutie patrí medzi dôležité obdobie ontogenézy semenných rastlín, kedy rastlina prechádza do reprodukčnej fázy z fázy vegetatívneho rastu. Počas tejto fázy sa na rastovom vrchole diferencujú kvetné orgány k čomu dochádza len v určitom veku rastliny, kedy rastlina dosiahne kvetnú zrelosť a za určitých vonkajších podmienok. Kvitnutie má fázu kvetnej indukcie (podnet k tvorbe kvetov) a tiež etapu diferenciácie kvetných orgánov.

Z ekologického hľadiska je kvitnutie veľmi dôležitá fáza života rastliny, pretože nektár v kvetoch je významnou súčasťou potravy rôznych opel'ovačov, ale zároveň vieme pomerne málo o tom, prečo niektoré rastliny investujú energiu do zatvárania svojich kvetov. Samotné kvitnutie je pre rastliny nákladné (Ashman a Schoen, 1997), preto sa dá predpokladať, že zatvorenie a opätovné otvorenie kvetu predstavuje pre rastlinu ďalšie náklady,

ktoré nemôže vykonávať z triviálnych dôvodov, ale musí existovať evolučné vysvetlenie, prečo k tomuto javu dochádza.

Doba otvorenia kvetu označuje časový úsek, ktorý zaujme opel'ovače, čo vedie k transportu peľu zo samčích a obojpohlavných kvetov, a následne oplodnenie a vytvorenie semien u samičích a obojpohlavných kvetov. Otváranie a zatváranie kvetov má reprodukčnú funkciu, pretože umožňuje transport peľu a/alebo opelenie. Otváranie a zatváranie kvetov sa u rastlín s dennou aktivitou môže líšiť v porovnaní s rastlinami, ktorých kvety majú nočnú aktivitu. Niektoré kvety sa otvárajú len raz, iné opakovane. Otváranie kvetov je často rýchle (van Doorn, van Meeteren, 2003). Napríklad, celkové otvorenie pupalky dvojročnej (*Oenothera biennis*) trvá menej ako 20 minút a u brečtana popínaveho (*Hedera helix*) to za určitých okolností trvá päť minút (Sigmund, 1929, 1930).

Otváranie a zatváranie kvetov vykazuje širokú škálu stratégií. Môžeme predpokladať, že tieto stratégie boli vybrané na optimalizáciu reprodukčného úspechu pri minimálnych metabolických nákladoch. Zo selektívneho hľadiska je pomerne ľahko vysvetliteľná existencia nočne kvitnúcich rastlín, ktoré sú opel'ované len malou skupinou nočných opel'ovačov. U zemoleza japonského (*Lonicera japonica*) sa kvet otvorí večer a zostane otvorený počas niekoľkých dní a nocí. Kvitnutia za súmraku boli častejšie ako kvitnutia ráno, a to aj napriek tomu, že denné opel'ovače transferovali viac peľu (Miyake a Yahara, 1999). Niektoré kvety zostávajú otvorené deň aj noc, hoci sú opel'ované len počas dňa alebo noci. To môže súvisieť, aspoň u niektorých druhov, cirkadiálneho modelu produkcie vône. U petúnie (*Petunia* sp.), napríklad kvety voňajú iba počas noci, čo môže čiastočne vysvetľovať, prečo je zvyčajne opel'ovaná nočnými motýľmi.

Nie všetky otvorené kvety voňajú. Možno u niektorých druhov môže byť cirkadiánnny rytmus zatvárania a otvárania adaptácia, vďaka ktorej sa vyhnú nákladom na produkciu vône. Kvety sa vyskytujú v obrovskom rozsahu ekologických situácií a preto nie je prekvapujúce nájsť rôzne okolité faktory, ktoré regulujú otváranie a zatváranie, ale neboli kategorizované do ekologickej niky. Medzi kvetmi, ktoré vykazujú opakované otváranie a zatváranie, sa niektoré kvety otvárajú nepravidelne iba v prípade, že je teplota vysoká alebo svieti slnko. Takýmto druhom je napríklad púpava (*Taraxacum* sp.). Ostatné kvety sa otvárajú a zavárajú v pravidelných intervaloch. Vo všeobecnosti nie je selekčná výhoda pravidelného zatvárania kvetov veľmi jasná. Doteraz boli vyslovené viaceré hypotézy, ale množstvo z nich zatiaľ nebolo testovaných.

Zatváranie kvetov môže napríklad fungovať ako pasca pre opel'ujúci hmyz (pozorované u niektorých druhov lekna). Kerner von Marilaun (1891) predpokladal, že zatváranie kvetov cez noc slúži na vyhnutie sa zmáčania peľu. Jeho myšlienka môže byť rozšírená na druhy kvetov ako je púpava, ktorá sa otvára len v prípade pekného počasia. Jeden z mála testov tejto hypotézy je experiment Prokopa a Fedora (2016) s blyskáčom cibul'katým (*Ficaria verna*). Otvorené kvety v experimentálnej skupine boli zafixované drôtom, aby sa zabránilo ich uzavretiu, a to vo voľnej prírode aj v laboratórnych podmienkach. Experiment nepreukázal žiadny rozdiel v reprodukčnom úspechu kvetov fixovaných drôtom a intaktných kvetov, ale fixované kvety boli v prírode častejšie napádané predátormi. K vyššej predácii otvorených kvetov sa prikláňajú aj iní autori (Tagawa et al., 2018).

Pfeffer (1904) poznamenal, že striedavé zatváranie kvetov môže pomôcť nepripustiť hmyz a môže chrániť pred chladom alebo zničením vysokou intenzitou svetla. Okrem toho, pravidelné zatváranie kvetov môže obmedziť straty vody a taktiež obmedziť vstup potenciálne škodlivých mikroorganizmov. Obmedzenie otvorenia kvetov na obdobie činnosti opel'ovačov môže znížiť riziko vstupu vzdušných patogénov a vyhnúť sa riziku patogénov prenášaných neopel'ujúcim hmyzom. Baktérie a plesne zvyčajne nerastú na suchých okvetných pletivách, ale prítomnosť vody (napríklad rosy) na kvetoch alebo vysoká vlhkosť, iniciuje plesňový a bakteriálny rast. Kvety, ktoré sa vyhýbajú zmáčaniu dažďom prípadne rosou alebo sa vyhýbajú otváraniu v čase vysokej vlhkosti, sa zdajú byť lepšie prispôsobené (van Doorn, van Meetern, 2003). Cieľom nášho výskumu bolo zistiť, ako varíruje zatváranie súkvetí čakanky obyčajnej (*Cichorium intybus*) so sezónnymi zmenami teploty a dĺžkou dňa.

2 Materiál a metódy

Výskum sme realizovali od 2. augusta do 24. septembra 2016. Súkvetia boli pozorované na východnom Slovensku, v obci Honce, na privátnej ploche (48° 40' 4,44" N, 20° 24' 19,8" E). Všetky pozorovania prebiehali počas teplých, suchých, bezoblačných dní. Denná teplota počas pozorovaní bola meraná na rovnakom mieste a v rovnakom čase v blízkosti lokality a pohybovala sa medzi 13 °C až 24 °C. Východ a západ slnka sme zaznamenávali na základe údajov z webovej stránky SHMÚ¹⁴.



Obrázok 1: Otvorené súkvetie čakanky. Foto: autorka.

Ráno tesne pred otvorením súkvetí sme si jednotlivé rastliny označili stužkami s individuálnymi kódmi. Denne bolo označených ~ 20 súkvetí, každý z inej rastliny. Súkvetia sme kontrolovali každú hodinu medzi 6.00 hod až 14.00 hodinou. Zaznamenávali sme čas otvorenia súkvetia a taktiež aj čas uzavretia súkvetia. Naše kritérium, kedy je súkvetie otvorené alebo zatvorené, bolo určované tým, kedy sa môže dostať do súkvetia opel'ovač (Prokop a Neupauerová, 2014). Za otvorené súkvetie sme považovali také, do ktorého sa

už mohol dostať opel'ovač (obrázok 1) a zatvorené súkvetie (obrázok 2) bolo to, do ktorého sa už opel'ovač nemohol dostať.



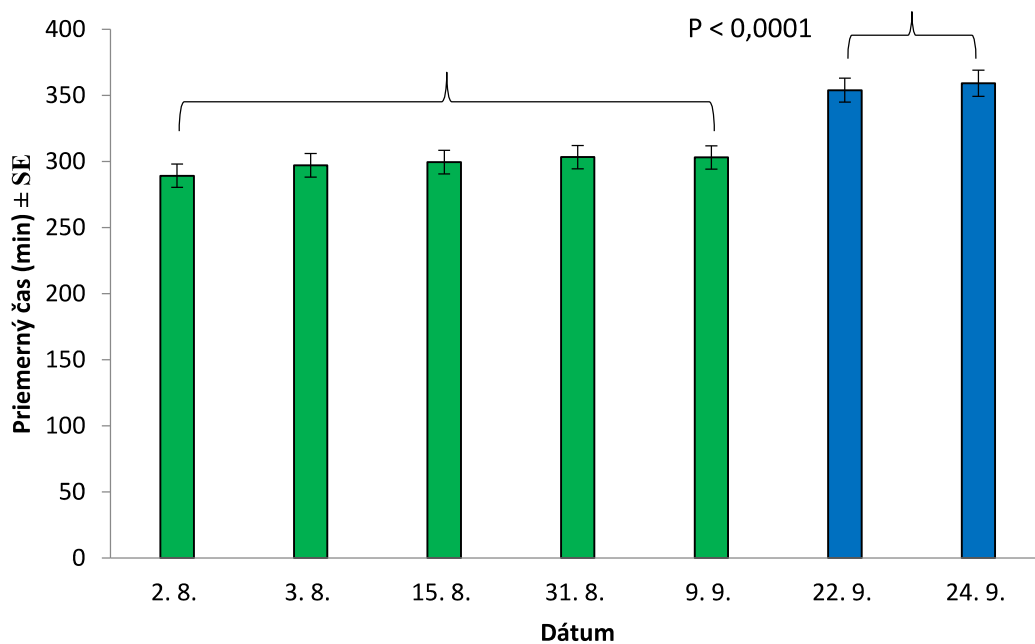
Obrázok 2: Zatvorené súkvetie čakanky. Foto: autorka.

3 Výsledky a diskusia

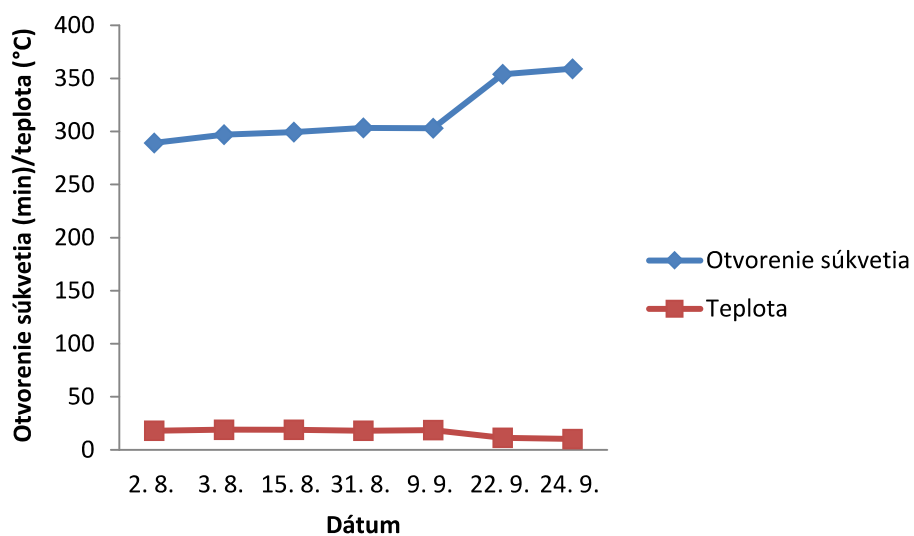
Sezónne vplyvy na zatváranie kvetov čakanky

Kvety čakaniek boli otvorené v priemere približne 300 minút, ale doba otvorenia sa v závislosti od sezóny líšila (ANOVA, $F, 6,128 = 9,5$, $P < 0,001$). Tukey post-hoc test ukázal, že čakanky pozorované v období od 2. 8. do 9. 9. boli otvorené signifikantne kratšie ako čakanky pozorované koncom septembra (22. 9. a 24. 9. 2016, graf 1).

Je možné, že bola dĺžka otvorenia kvetov ovplyvnená teplotou prostredia (graf 2), pretože korelácia medzi dĺžkou kvitnutia kvetov a teplotou bola negatívna ($r = -0,99$, $P < 0,001$, $N = 7$). Znamená to, že čím bola teplota prostredia nižšia, tým dlhšie boli kvety čakanky otvorené. Keď sme urobili koreláciu s dĺžkou kvitnutia a dĺžkou dňa, tiež bola negatívna ($r = -0,87$, $P = 0,01$, $N = 7$). Znamená to, že čím bol deň kratší, tým dlhšie boli čakanky otvorené. Problémom však je, že obidve ekologické premenné sa od seba ťažko oddeľujú, pretože teplota a dĺžka dňa spolu tiež súviseli ($r = 0,83$, $P = 0,02$, $N = 7$), takže v tomto okamihu si nemôžeme byť istí, ktorá z uvedených premenných má na dĺžku kvitnutia silnejší vplyv.



Graf 1: Rozdiely v dĺžke kvitnutia medzi čakankami pozorovanými v auguste a v septembri. Štatisticky významný rozdiel vznikol pri porovnaní priemerného času súkvetí označených zelenou oproti časom označeným modrou farbou.



Graf 2: Vzťah medzi dĺžkou otvorenia súkvetí a teplotou prostredia.

4 Diskusia a záver

V predložennom výskume sme skúmali niektoré abiotické faktory potenciálne ovplyvňujúce zatváranie kvetov u čakanky obyčajnej (*C. intybus*). Zistili sme, že kvety čakanky sú otvorené denne zhruba päť hodín, ale dĺžka kvitnutia je ovplyvnená teplotou prostredia

a dĺžkou dňa. So skracujúcim sa dňom a s klesajúcou teplotou boli kvety čakaniek otvorené dlhšie, čo znamená, že zatváranie kvetov je ovplyvnené sezónou a nie je fixné, ako to predpokladal Carl Linné (Fründt et al., 2011).

Ako už zistili Burgerstein (1901), Hensel (1905), Davy de Virville a Obaton (1922), zatváranie kvetov môže byť oneskorené chladným počasím. Napríklad ľaliovka (*Hemerocallis* sp.), ktorá vydrží kvitnúť zvyčajne jeden deň, bola v septembri otvorená dva dni a tri dni na konci októbra (Kerner von Marilaun, 1891). Burgerstein (1901) uvádza, že zatváranie kvetov cez leto nastáva skôr v priebehu dňa u niekoľkých druhov čeľade astrovité (*Asteraceae*), v porovnaní so zatváraním počas jari alebo na jeseň, čo súhlasí s našimi výsledkami a môže potvrdzovať hypotézu o vplyve fyziologických faktorov na zatváranie kvetov.

Ďalším faktorom, ktorý potenciálne ovplyvňuje zatváranie kvetov, sú opel'ovače a ich klesajúca aktivita počas sezóny. Nástup jesene môže spôsobiť, že kvety nemajú dostatok opel'ovačov a tak kvitnú dlhšie. Túto hypotézu podporujú výsledky experimentu Prokopa a Neupauerovej (2014) s pupencom roľným (*Convolvulus arvensis*), ktoré ukazujú, že neopelené kvety kvitli podstatne dlhšie ako opelené. Taktiež, McCall a Primack (1992) zistili, že počet návštev kvetov opel'ovačmi bola ovplyvnená dĺžkou dňa a vyššou teplotou. Kvety čakaniek kvitli dlhšie na konci septembra, keď sa teplota znižovala aj dĺžka dňa skracovala, čo mohlo negatívne ovplyvniť množstvo opel'ovačov na lokalite. Z pozorovaní sme ďalej zistili, že kvety čakaniek čmeliaky neopel'ovali, čo môže byť spôsobené tým, že sa skôr špecializujú na kvety s rúrkovitou korunou.

Zistili sme, že zatváranie kvetov je ovplyvnené sezónou, ale vzhľadom na to, že sme vyššie spomenuté fyziologické faktory nekontrolovali v laboratóriu, tak nevieme, či zatváranie kvetov ovplyvňovali viac ako faktor opel'ovačov. Ďalší výskum musí špecifikovať jednotlivé faktory, ktoré na zatváranie kvetov môžu vplývať.

Literatúra

1. Ashman, Tl. – Schoen, DJ. 1997. The cost of floral longevity in *Clarkia tembloriensis*: an experimental investigation. *Evolutionary Ecology* 11, 289–300.
2. Burgestein, A. 1901. A. v. Kerner's Beobachtungen über die Zeit des Öffnens und Schließens von Blüten. *Österreichische Botanische Zeitschrift* 51, 185–193.
3. Davy de Virville, A. – Obaton, F. 1922. Observations et expériences sur les fleurs éphémères. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* (suppl. series A±D) 175, 637–640.
4. Fründ, J. – Dormann, C. – Tschardtke, T. 2011. Linne's floral clock is slow without pollinators – flower closure and plant-pollinator interaction webs. *Ecology Letters*, 14, 896–904
5. Hensel, Ep. 1905. On the movements of petals. *Nebraska University Studies* 5, 191–228.
6. Kerner von Marilaun, A. 1891. Pflanzenleben, Band 2. Leipzig : Verlag des Bibliographisches Institut.
7. Mccall, C. – Primack, RB. 1992. Influence of flower characteristics, weather, time of day, and season on insect visitation rates in three plant communities. *American Journal of Botany*, 434–442.
8. Miyake, T. – Yahara, T. 1999. Theoretical evaluation of pollen transfer by nocturnal and diurnal pollinators: when should a flower open? *Oikos* 86, 233–240.

9. Pfeffer, W. 1904. Pflanzenphysiologie. Ein Handbuch der Lehre vom Stoffwechsel und Kraftwechsel in der Pflanze. Leipzig : *Wilhelm Engelmann*.
10. Prokop, P. – Fedor, P. 2016. Why do flowers close at night? Experiment with the Lesser celandine *Ficaria verna* Huds. *Biological Journal of the Linnean Society* 118, 698–702.
11. Prokop, P. – Neupauerová, D. 2014. Flower closure in the field bindweed (*Convolvulus arvensis*): a field test of the pollination hypothesis. *Turkish Journal of Botany* 38, 877–882.
12. Sigmond, H. 1929a. Vergleichende Untersuchungen über die Anatomie und Morphologie von Blütenknospenverschlüssen. Beihefte des Botanisches *Zentralblatt* 46, 1–67.
13. Sigmond, H. 1930a. Die Entfaltung de Blütenknospe zweier Oenothera-Arten. Teil I. Beihefte des Botanisches *Zentralblatt* 46, 476–488.
14. *Slovenský hydrometeorologický ústav*. Dostupné na: <http://www.shmu.sk/>), dátumy prístupov: 2. 8. – 24. 9. 2016.
15. Tagawa, K., Watanabe, M. & Yahara, T. (2018). A sensitive flower: mechanical stimulation induces rapid flower closure in *Drosera* spp. (Droseraceae). *Plant Species Biology*, 33(2), 153–157.
16. Van Doorn, WG. – Van Meeteren, U. 2003. Flower opening a closure: review. *Journal of Experimental Botany* 54, 1801–1812.

Internetové zdroje

Kontakt

doc. PaedDr. Pavol Prokop, PhD.

Katedra biológie, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave

Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava

pavol.prokop@truni.sk

Metodika vypracovania bezpečnostnej analýzy pre technologické dynamické systémy

Methodology for Developing a Safety Analysis for Technological Dynamic Systems

Milan Štrbo

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave

Abstract: Safety analysis is carried out in the process of development of control systems. We suggest designing it based on models that will detect deviations between real system operation (real values) and ideal system operation (ideal values set in models). The models will be created especially for safety-critical processes of system operation that could threaten it.

Keywords: safety analysis, dynamic systems, safety-critical systems.

1 Úvod

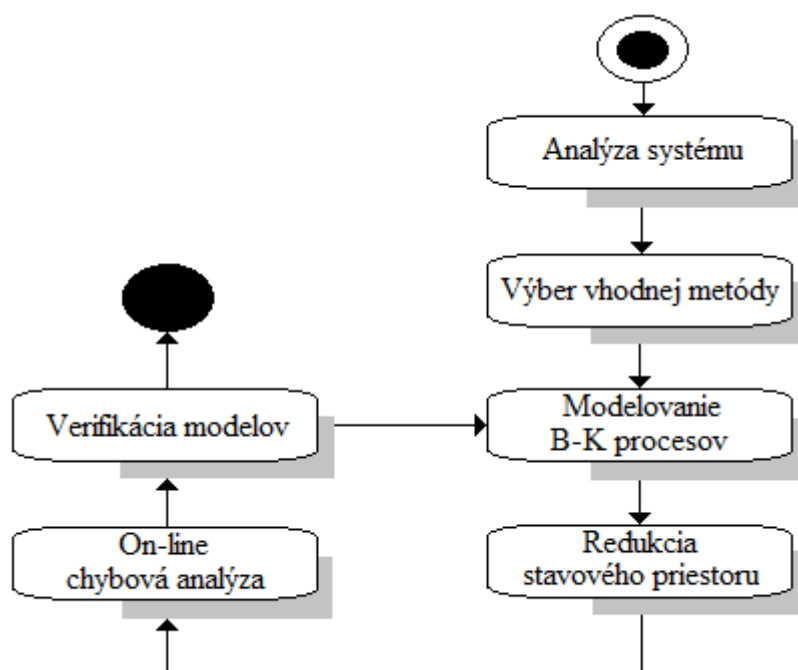
Bezpečnosť a starostlivosť o zdravie ľudí, ich majetok a životné prostredie je dnes prvoradou podmienkou pri vývoji riadiacich systémov. Prevádzka bezpečnostne-kritických dynamických systémov predstavuje pre svoje okolie určité nebezpečenstvo, pričom intenzita škôd spôsobených vďaka nežiaducim účinkom systému môže byť obrovská. Na základe týchto poznaní sa kladie veľký dôraz pri vývoji riadiacich systémov a najmä na analýzu možných rizík.

Bezpečnostná analýza rizík je návrhový nástroj, ktorý pomáha vývojárom identifikovať a riešiť nebezpečenstvo v počiatočných fázach vývoja takýchto systémov. Bezpečnosť je pojem, ktorý sa zdá byť síce zrejmý, ale postupnosť krokov, ktoré je potrebné vykonať na jej implementovanie do konkrétneho systému sú veľmi náročné. Proces bezpečnostnej analýzy je náročný a zdĺhavý proces. Cieľom príspevku je predstaviť návrh metodiky bezpečnostnej analýzy pre dynamické technologické systémy.

2 Návrh metodiky bezpečnostnej analýzy

Návrh metodiky slúžiacej na vývoj modelov pre jednotlivé bezpečnostne-kritické procesy nachádzajúce sa v dynamických technologických systémoch zobrazuje obrázok jeden. Metodika je znázornená pomocou štandardného stavového UML diagramu a pozostáva z postupnosti šiestich nadväzujúcich krokov. Posledným krokom metodiky je verifikácia samotných navrhovaných modelov na kontrolu bezpečnostne-kritických procesov.

Ak verifikácia preukáže nedostatky pri navrhnutých modeloch, samotný proces bezpečnostnej analýzy sa vracia späť do kroku „modelovanie bezpečnostne-kritických procesov“. V tomto kroku sa odstránia nedostatky zistené pri verifikácii a proces vývoja modelov pokračuje ďalej v postupnosti podľa navrhovanej metodiky. Proces sa opakuje dovtedy, kým sa verifikáciou modelov nepreukáže správnosť vytvorených modelov, ktoré budú slúžiť na on-line kontrolu daného systému.



Obrázok 1: Metodika na modelovanie bezpečnostne-kritických stavov.

2.1 Analýza dynamického technologického systému

Cieľom prvého kroku je analýza konkrétneho dynamického technologického systému. Je dôležité uviesť, že analýza je realizovaná so zameraním na bezpečnostnú analýzu. znamená to, že je potrebné oboznámenie sa so systémom, s jeho funkciami a určenie všetkých možných stavov systému v priebehu prevádzky. Potrebné je analyzovať aktuálne podmienky a základné prevádzkové parametre, respektíve základné prevádzkové podmienky. S týmto krokom úzko súvisí analýza obmedzení pri jednotlivých stavoch, analýza nedostatkov, rizík a všetkých dostupných zdrojov systému. Dôležitou súčasťou analýzy konkrétneho systému je metóda Top-Down, ktorej nástroje umožnia rozloženie systému od globálneho pohľadu až k jednotlivým subprocessom systému.

Každý systém má určitú množinu stavov respektíve procesov. Cieľom tejto analýzy je výber a analýza tých procesov prevádzky, ktoré sú pre systém bezpečnostne-kritické a rozdelenie týchto procesov na deterministické a stochastické. Podrobnou analýzou týchto procesov získame požiadavky na meranie, funkcie kontroly priebehu procesov alebo požiadavky akčných členov regulátorov. Pre kritické procesy je potrebné vyhotoviť výber zdrojov informácií, ktoré budú obslužnému personálu podávať informácie o priebehu týchto procesov. V neposlednom rade je potrebné definovať vstupy pre jednotlivé procesy, vzájomné väzby medzi procesmi systému a samozrejme dôležitá je charakteristika týchto procesov na výstupe. Cieľom tohto kroku je takisto určiť požiadavky na bezpečnostnú analýzu respektíve kontrolu procesu z hľadiska vzniku, priebehu a vyhodnocovania kritických situácií (porúch). To môžeme chápať ako určenie jednotlivých požiadaviek na hardvér a softvér riadiaceho systému pre bezpečnostne-kritické procesy.

2.2 Výber vhodnej metódy na modelovanie bezpečnostne-kritických procesov

Podrobnou analýzou systému sa o systéme zistí všetko potrebné k vykonaniu bezpečnostnej analýzy. Na základe tejto analýzy systému je potom jednoduchšie vybrať vhodnú metódu na vytváranie modelov potrebných na automatizovanú kontrolu prevádzky dynamických systémov. Na vývoj modelov pre bezpečnostne-kritické procesy dynamických systémov navrhujeme použiť metódu SQMD.

Samotná metóda SQMD je využívaná na bezpečnostnú analýzu dynamických systémov. Je založená na kvantitatívnych a kvalitatívnych modelovacích metódach. Využíva hybridné modely na monitorovanie a detekciu reálneho času. Hybridný model obsahuje kvalitatívne a dynamické prvky a kombinuje výhody oboch metód. Takto je možné predstaviť si predstaviť on-line monitoring a diagnostiku na detekciu a lokalizovanie porúch v dynamických technologických systémoch.

Hlavnou výhodou bezpečnostnej analýzy metódou SQMD je jednoduché modelovanie dynamických systémov. Netreba zabúdať na dva dôležité aspekty. Na jednej strane už existujúce matematické modely. Tie sú kombinované s kvalitatívnymi modelmi, takže dynamické systémy môžu byť modelované a simulované. Na druhej strane, jedinou zaujímavou časťou je to, že stavy sú analyzované, čo znamená, že môžu byť ohodnotené on-line, s menšou výpočtovou silou (Fröhlich, 1996).

2.3 Modelovanie bezpečnostne-kritických procesov dynamických systémov

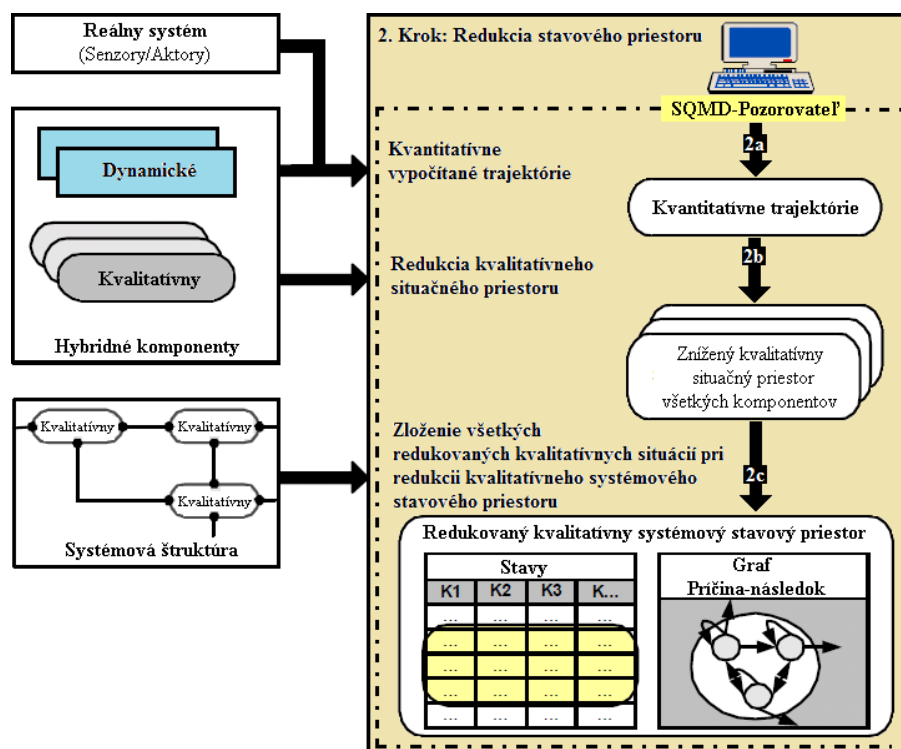
V tomto kroku je dôležité správne opísať bezpečnostne-kritické procesy konkrétneho systému pomocou modelov. Cieľom je vypracovať kvalitatívne a kvantitatívne modely v rozsahu všeobecného popisu systému. Na vytvorenie kvalitatívnych modelov jednotlivých procesov využijeme fuzzy logiku, poprípade sa môžu použiť kauzálne siete alebo pre vyložene diskrétne procesy Petriho siete. Kvantitatívne (matematické) modely zostrojíme pomocou diferenciálnych a diferenčných rovníc, keďže ide o dynamické technologické systémy.

V inom prípade môže byť ako matematický model použitý takmer každý správny matematický vzorec. Takisto je potrebné vykonať syntézu týchto modelov, vyhodnotiť ich efektívnosť a vykonať kontrolu platnosti modelov. Na automatizovanú kontrolu dynamických systémov navrhujeme použiť hybridné modely zložené práve z kvalitatívnych a kvantitatívnych (matematických) modelov. Správnosť týchto modelov bude overená ich verifikáciou v poslednom kroku metodiky.

2.4 Redukcia stavového priestoru

Ťažisko celkového konceptu bezpečnostnej analýzy sa nachádza v on-line redukcii stavového priestoru, ktorá umožňuje on-line kontrolu dynamických systémov. Po zostrojení jednotlivých modelov na automatizovanú kontrolu bezpečnostne-kritických procesov systému je potrebné vykonať redukciiu stavového priestoru. Najdôležitejším dôvodom tejto redukcie je odstránenie kombinatorickej explózie a tým urýchlenie samotných výpočtov a teda celého riadiaceho systému.

Cieľom je pre vopred určený časový interval (časové okno) stanoviť redukovaný kvalitatívny stavový priestor. Tento obsahuje všetky možné stavy systému pre stanovený časový interval a následne je možné tieto stavy vyhodnotiť v nasledujúcom bode metodiky a teda v on-line chybovej analýze.



Obrázok 2: Koncept on-line redukcie stavového priestoru (Manz, 1999).

Redukciu stavového priestoru periodicky vykoná SQMD pozorovateľ (obrázok 2) v troch navzájom nadväzujúcich čiastkových krokoch 2a, 2b a 2c. Detailne obsahujú tieto čiastkové kroky nasledujúce činnosti (Lauber, Göhner, 1999):

- Kvantitatívne stanovenie trajektórií (2a).

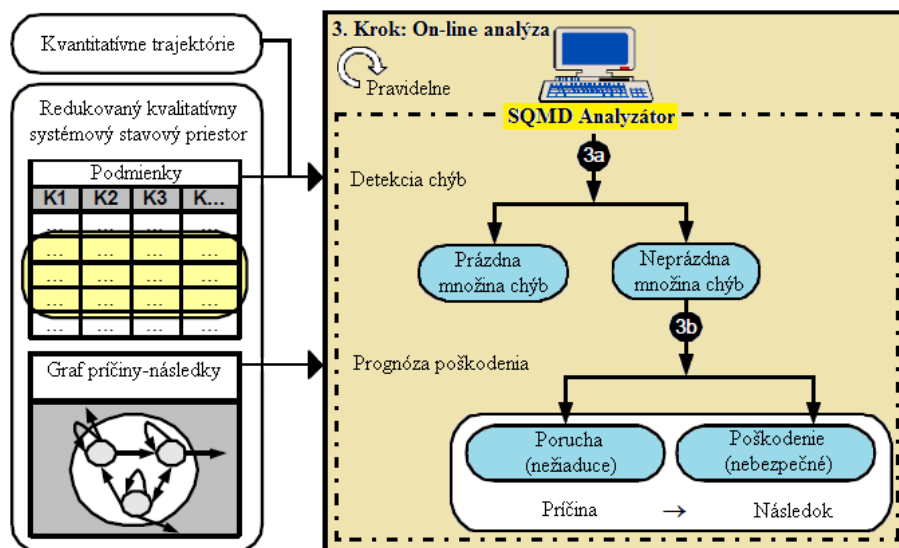
- Redukcia situačného priestoru na úrovni komponentov (2b).
- Kompozícia komponentov (2c).

Výhoda redukcie stavového priestoru na úrovni komponentov je v odstránení kombinatorickej explózie. Analýza a vyhodnotenie sa nevykonáva v celom stavovom priestore, ale len pre časový interval relevantnej časti priestoru. Ďalšou výhodou je priame vyhodnotenie dát z technického procesu na úrovni komponentov. Znamená to, že kvalitatívne veličiny sú nahradené presnými nameranými hodnotami z dát senzorov a aktorov, čím stúpa presnosť modelu (Manz, 1999).

2.5 On-line chybová analýza

V tomto kroku metodiky je potrebné analyzovať redukovaný kvalitatívny stavový priestor z predchádzajúceho kroku. Na základe toho je potom vyhodnotená prognóza poškodenia. Úlohou rozpoznania chýb je analýza kvantitatívnych a kvalitatívnych pomerov vo vnútri časového okna tak, aby bolo možné z tejto analýzy spätne uskutočniť rozhodnutie o možnom chybovom správaní systému.

Koncept on-line analýzy (obrázok 3) je možné rozdeliť na dva čiastkové kroky „Rozpoznanie (detekcia) chýb – krok 3a“ a „Prognóza škody – krok 3b“. Tieto potom dopĺňajú výpočty vykonané analyzátorom. Úlohou rozpoznania chýb je skúmanie (analýza) kvantitatívnych a kvalitatívnych pomerov vo vnútri časového okna tak, aby bolo možné z tejto analýzy spätne uskutočniť rozhodnutie o možnom chybovom správaní systému. Prognóza škody neslúži primárne k diagnóze, ale k rozpoznaniu možných škôd, ktoré sú spôsobené nepožadovaným priebehom.



Obrázok 3: Konceptia on-line analýzy (Manz, 2004).

2.6 Verifikácia navrhovaných modelov pre bezpečnostne-kritické procesy

Úlohou verifikácie je overiť správnosť navrhovaných modelov slúžiacich na on-line monitoring prevádzky bezpečnostne-kritických procesov v dynamických technologických

systémoch. Overovanie modelov je možné uskutočniť pomocou simulačných nástrojov ako MATLAB.

Pri simuláciách sa nemôže zabudnúť na šumy, ktoré ovplyvňujú výstupy v reálnej prevádzke jednotlivých systémov. Práve tento šum je potrebné zahrnúť respektíve zapracovať do simulačného modelu. Ak by verifikácia nepotvrdila správnosť navrhovaných modelov, tak sa proces metodiky vývoja modelov vracia naspäť do bodu modelovania bezpečnostne-kritických procesov dynamických systémov, kde sa odstraňujú nedostatky zistené pri verifikácii.

3 Záver

Predstavený návrh metodiky na vykonanie modelovo-orientovanej bezpečnostnej analýzy pre dynamické technologické systémy pozostáva zo šiestich krokov, ktoré sme znázornili pomocou UML stavového diagramu.

Literatúra

1. Susanne Manz: *Entwicklung hybrider Komponentenmodelle zur Prozessüberwachung komplexer dynamischer Systeme*, January 2004, Forschungsbericht Institut für Automatisierungs- und Softwaretechnik, Universität Stuttgart.
2. P. Fröhlich: *Überwachung verfahrenstechnischer Prozesse unter Verwendung eines qualitativen Modellierungsverfahrens*, Institut für Automatisierungs- und Softwaretechnik (IAS), Universität Stuttgart, Dissertation, Universität Stuttgart, 1996.
3. Lauber, P. Göhner: *Prozessautomatisierung 1, Band 1*, 3. Auflage, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1999.
4. S. Manz: *On-line monitoring and diagnosis based on hybrid component models*, Institute of Industrial Automation and Software Engineering University of Stuttgart, Germany, 1999.
5. M. Strbo, P. Tanuska, A. Gese, L. Smolarik: *The methodology proposal for the model-oriented safety analysis of dynamical systems*, Faculty of Materials Science and Technology, Slovak University of Technology in Bratislava, 2014.
6. M. Strbo, P. Tanuska, A. Gese, I. Hagara, L. Smolarik: *Safety Analysis for Complex Dynamic Systems*, Faculty of Materials Science and Technology, Slovak University of Technology in Bratislava, 2014.
7. M. Strbo: *The Process of preliminary hazard analysis for safety-critical systems*, Faculty of Materials Science and Technology, Slovak University of Technology in Bratislava.

Kontakt

Ing. Milan Štrbo, PhD.

Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita v Trnave
Priemyselná 4, P. O. BOX 9, 918 43 Trnava
milan.strbo@truni.sk

Možnosti využitia fraktálovej geometrie v prírodných a iných vybraných vedách

The Possibilities of Using Fractal Geometry in Natural and Other Chosen Sciences

Jana Žolnová

Katedra chémie, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Abstract: Each area of science has its own attractive themes which attract attention of many scientists and due to today's rapid dissemination of information, these themes get into awareness of grass-roots. For example, the Theory of Strings, or Theory of Chaos in Physics, the possibilities of repairing of DNA or its cloning with use restricted endonucleases in Biology and Chemistry, trying to prove famous Riemann's zeta hypothesis in Mathematics. Another interesting area of Mathematics is fractal geometry. Its applicability is not stopped only at an abstract level, but in the applied form it is used in already mentioned natural sciences. In contrast with classic Euclid's geometry, which deals with geometrically smooth and regular geometric shapes, the fractal geometry is the geometry of real world, where we can see mostly irregularities. Just look at the clouds, lightning, branching up of lops at trees or vessels in human body.

Keywords: fractals, Mandelbrot set, Koch snowflake, Sierpinski triangle, application of fractals.

1 Úvod

Matematici často rozprávajú o kráse a elegantnosti matematických dôkazov a vzťahov. Tento ich zápal pre abstraktnú krásu sa často stretáva s nepochopením, a to jednak zo strany študentov základných alebo stredných škôl, ktorých vzťah k matematike ovplyvňuje predovšetkým učiteľ (Papert, 2004), a tiež zo strany vedeckej spoločnosti, ktorá preferuje viditeľné výsledky práce a jej aplikovateľnosť v praxi (Mordukhovich, 2011).

V diele Dejiny matematiky (Čižmár, 2017) je podrobne opísaný historický vývoj matematiky ako vedy. Ak sa pozrieme do minulosti, narazíme na množstvo geniálnych matematikov, ktorí svojím uvažovaním a vedomosťami predbehli svoju dobu a často boli nepochopenými a zavrhovanými vedeckou spoločnosťou danej doby. K takýmto génom patrili v staroveku napríklad Pytagoras, Euklides, Archimedes, či Ptolemaios, ktorých diela sú

známe dodnes a položili základy dnešnej matematiky. V stredoveku svet matematiky ovládla Čína, na čele s matematikom Zu Chongzhou ktorá bola v tom čase najrozvinutejšou krajinou v tejto oblasti. Nezaostávala ani Perzia – ved' práve z priezviska perzského matematika 9. storočia Al-Chorezmího je odvodené slovo algoritmus, ktoré je dnes už neodmysliteľnou súčasťou matematickej terminológie. Najväčší posun od konkrétneho ku abstraktnému nastal v 16. storočí. Mená Fibonacci, Bacon, Kopernik, Viète, Kuzánsky alebo Mercator sú všeobecne známe nielen študentom matematiky. Zmena spoločenských podmienok priniesla nové otvorené problémy, ktorými sa bolo potrebné zaoberať. Aby sa matematické výpočty optimalizovali, v súvislosti s presnosťou a rýchlosťou, začali vznikať rôzne pomôcky, ako napríklad tabuľky logaritmov. Bolo potrebné odpovedať aj na niektoré významné otázky z oblasti mechaniky, ktorých riešenie si vyžadovalo vytvorenie nových matematických prostriedkov. Tie priniesli nezávisle na sebe v druhej polovici 17. storočia matematici Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibnitz v podobe infinitezimálneho počtu (Reyes, 2004).

Takto by sme vedeli pokračovať ďalej a spomenúť matematické princípy formulované Cantorom, Kleinom, Hausdorffom, Turingom a inými významnými matematikmi 18. a 19. storočia. Nové spôsoby riešenia matematických problémov, ktoré sa vďaka nim začali používať v teoretických matematických výpočtoch, prispeli k rozvoju matematiky ako vedy a tiež sa stali využitelnými v praxi. Prihliadnuc k tomu, že náš článok sa zaoberá predovšetkým fraktálovou geometriou, nie je možné dopodrobna opísať prácu a dielo každého z nich. Spomedzi týchto velikanov sme vybrali dielo Benoîta Mandelbrota, ktorý položil základy fraktálovej geometrie (Čižmár, 2017). Vďaka fraktálom, ktoré bolo možné generovať počítačom, začala byť krása matematiky zjavná aj tým, ktorí touto abstraktnou vedou predtým opovrhovali.

Fraktálová geometria si však nenašla uplatnenie len v matematike, ale v mnohých ďalších prírodovedných oblastiach. Cieľom tohto článku je priblíženie niektorých zaujímavých detailov a možností aplikácie fraktálovej geometrie a to nie len v matematike, ktorá je jej materskou vednou disciplínou, ale tiež v oblasti chémie, biológie, fyziky, medicíny a informatiky. Fraktálové štruktúry je možné vidieť bežne v prírode – vlny, slimačie ulity, či paprad'ové listy, využívajú sa v počítačovej grafike pri vytváraní pozadia do filmov – hory, oblaky, rieky, a dnes sa stali aj neodmysliteľnou súčasťou medicíny – elektrokardiografia.

2 Počiatky fraktálovej geometrie

Fraktálová geometria úzko súvisí s teóriou chaosu, preto v krátkosti predstavíme jej hlavnú myšlienku.

Pod pojmom chaos si väčšina ľudí predstaví niečo neusporiadané, neorganizovanú alebo amorfnú štruktúru. Chaos by sme vedeli dobre definovať ako neexistenciu štruktúry alebo poriadku. Slovo chaos samozrejme používa množstvo autorov vo vágnom zmysle, ale vo fyzike znamená celkom určitý jav, totiž, že v nelineárnom systéme je výsledok často neurčito a ľubovoľne citlivý na nepatrné zmeny počiatkových podmienok. Teória chaosu sa

zaoberá správaním sa istých nelineárnych dynamických systémov, ktoré za určitých podmienok vykazujú stav známy ako chaos. Tento stav je charakterizovaný veľkou citlivosťou počiatočných podmienok, známou ako motýlí efekt (Kellert, 1994). Táto odvážna reklama na teóriu chaosu hovorí, že už malé zmeny môžu mať za následok veľké variácie v nasledujúcom vývoji udalostí. Predstavme si, že motýľ, ktorý zamáva krídlami v Európe, môže v konečnom dôsledku vyvolať tajfún na druhej polovici sveta, napríklad v Južnej Amerike. Hoci pravdepodobnosť, že takéto niečo sa stane je mizivá, stále je tu prítomná a teda nie je chybou ju spomenúť.

Samotná teória chaosu je postavená na nedokonalosti ľudského merania. Hoci vieme pomocou rôznych vzorcov a výpočtov predvídať počasie, musíme uznať, že vzhľadom na obrovské množstvo parametrov, ktoré jeho vývoj ovplyvňujú, je z dlhodobého hľadiska nepredvídateľné. Ide teda o chaotický systém, ktorý je veľmi citlivý na podmienky, ktoré ovplyvňujú jeho vývoj. Ďalším príkladom zdanlivo neorganizovanej štruktúry môžu byť vodopády, oblaky, blesky a mnohé ďalšie chaotické systémy.

Klasickým problémom, ktorým vstúpime do oblasti fraktálovej geometrie, je meranie dĺžky pobrežia ostrova, resp. určenie hranice. Týmto problémom sa ako prvý začal vážnejšie zaoberať Lewis Fry Richardson (1881 – 1953), keďže si všimol nepresnosti v údajoch o dĺžke hraníc a pobreží v rôznych encyklopédiách (Richardson, Ashford, 1985). Akým spôsobom by sme vedeli čo najpresnejšie zmerať dĺžku pobrežia ostrova? Prvou voľbou sa zdá byť prechádzka okolo ostrova s meradlom určitej dĺžky. Takto zistená hodnota by však stále bola iba aproximáciou skutočnej dĺžky ostrova.

Pobrežie ostrova môžeme tiež začať obkladať palicami (obrázok 1), najprv dlhšími, ktoré však nepokryjú všetky výčnelky členitého pobrežia ostrova, preto bude nutné vziať stále kratšie palice, aby sme dokázali ostrov obložiť a takto určiť dĺžku jeho hranice s maximálnou možnou presnosťou.



Obrázok 1: Dĺžka hranice ostrova.

Na rozdiel od „rozumných kriviek“ (napríklad kružnica), aproximácia dĺžky, získaná použitím stále kratšieho meradla (palice), nesmeruje k určitej hodnote, ale stále rastie. Je to logické vzhľadom na to, že zmenšovaním meradla zahrňame do meranej dĺžky pobrežia

stále viac detailov, ktoré sme predtým zanedbali. Paradoxom, s ktorým sa pri takomto obkľadaní ostrova stretneme, je zistenie, že hoci plocha, na ktorej sa ostrov nachádza je konečná, dĺžka ohraničujúca túto plochu je nekonečná.

Richardson naniesol do grafu hodnoty logaritmov nameraných dĺžok v závislosti od dĺžky použitého meradla a dostal pomerne presnú priamku, teda lineárnu závislosť medzi týmito dvoma premennými (Ashford, 1985). Novou charakteristikou členitosti jednotlivých pobreží sa na základe sklonu priamky stala smernica uvedenej logaritmickej závislosti. Túto závislosť si o niekoľko rokov neskôr všimol francúzsko-americký matematik poľského pôvodu a otec fraktálovej geometrie Benoît Mandelbrot a vysvetlil ju v rámci fraktálovej geometrie v diele „Fractals and the Geometry of Nature“ (Mandelbrot, 1982).

Každý systém, ktorý vykonáva nejakú prácu, má svoj počiatočný a konečný stav. Atraktor definujeme ako stabilný stav daného systému. Napríklad pre reálne kyvadlo platí, že atraktorom je stav, v ktorom kyvadlo nemá už žiadnu kinetickú energiu. Atraktorom pohybu planéty (napríklad Zeme) je zase uzavretá elipsa. Niektoré systémy majú tzv. podivný atraktor, čiže vykazujú chaotické správanie. Všetky chaotické atraktory sú fraktálmi (Eckmann, Ruelle, 1985).

Pôvod slova fraktál môžeme nájsť v latinčine pod pojmom fractus, čo znamená zlomený, rozlamaný, rozbitý. Fraktálmi sa označujú v istom zmysle nepravidelné geometrické útvary, deliteľné tak, že ak z pôvodného útvaru určitú časť odoberieme (obrázok 2), vzniknú nám jednotlivé časti, z ktorých každá je v ideálnom prípade zmenšenou kópiou celku (Mandelbrot, 1982). Túto vlastnosť nazývame aj sebakodobnosť (Peitgen et al., 2004). Pojem fraktál použil po prvýkrát Benoît Mandelbrot v roku 1975.

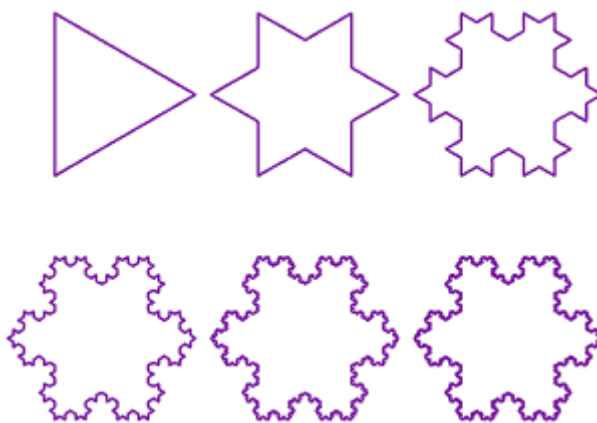


Obrázok 2: Princíp tvorby fraktálu.

Jedným z najznámejších fraktálov je Kochova krivka (obrázok 3), ktorá sa po prvýkrát objavila v článku švédskeho matematika Helge von Kocha z roku 1904. Princíp jej konštrukcie je jednoduchý. Vezmeme si rovnostranný trojuholník a rozdelíme každú z jeho strán na tretiny. Nad prostrednou tretinou skonštruujeme nový, menší rovnostranný trojuholník. Takto vznikne hviezda so šiestimi vrcholmi a 12 hranami. Ďalej pokračujeme podľa uvedeného návodu, pričom výsledkom bude vložka, ktorej hrany budú stále členitejšie. Postup môžeme opakovať donekonečna (Peitgen et al., 2004).

Dôležitým pojmom je tiež dimenzia, ktorá nám udáva, do koľkých na seba kolmých smerov sa môžeme v danom priestore vydať. Kochova krivka má neceločíselnú – fraktálnu – dimenziu. Fraktálna dimenzia Kochovej krivky je 1,2619, teda z topologického hľadiska je to niečo medzi priamkou (dimenzia = 1) a hladkou plochou (dimenzia = 2). Neceločíselnú dimenziu spôsobuje práve značná štruktúrovanosť krivky a toto číslo uvádza mieru zložitosti krivky (Crilly, 2011).

Kurióznou vlastnosťou Kochovej krivky je, podobne ako bola meraná dĺžka hranice ostrova, že hoci ohraničuje len konečnú plochu, lebo celé jej vnútro sa v každom kroku zmestí do jedného konkrétneho útvaru (napríklad kruhu), jej obvod donekonečna narastá. Je to teda krivka, ktorá ohraničuje konečnú plochu, ale jej hranica má nekonečnú dĺžku (Peitgen et al., 2004).

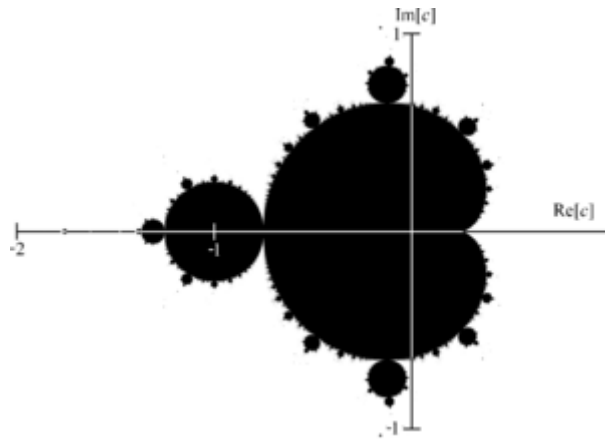


Obrázok 3: Kochova krivka.

Konštrukcia Kochovej krivky je postavená na jednoduchom opakujúcom sa pravidle iterácie alebo rekurzii. Ak si zvolíme ľubovoľnú mierku, pod ktorou budeme krivku skúmať, vždy budeme vidieť základnú opakujúcu sa členitosť. Obvod krivky nebude, ani pri najväčšom možnom zväčšení jej detailov, hladký. Hladkosť typická pre euklidovskú geometriu tu chýba.

Najslávnejším fraktálom je tzv. Mandelbrotova množina. Podobne ako Kochova krivka, aj táto množina vzniká použitím rekurzívneho, iteračného pravidla. Benoît Mandelbrot skúmal jednoduchý vzorec $x_{n+1} = x_n^2 + c$. Ak vezmeme počiatočnú hodnotu x a konštantu c , ďalšiu hodnotu vypočítame tak, že x umocníme na druhú a pripočítame konštantu. Takto novo získanú hodnotu dosadíme opäť do rovnice a celý proces môžeme opakovať teoreticky donekonečna. Mandelbrotov úžasný objav spočíval v tom, že pokiaľ x a c môžu byť komplexné čísla, teda čísla obsahujúce $\sqrt{-1}$, a za počiatočnú hodnotu x zvolíme 0, môže viesť zmena hodnoty c k dvom rôznym výsledkom. Vzniknutá postupnosť čísel môže divergovať k nekonečnu, ale existuje tiež nekonečne veľa hodnôt, ktoré k nemu nevedú (Mandelbrot, 2003). Mandelbrotova množina (obrázok 4) je práve množinou týchto hodnôt.

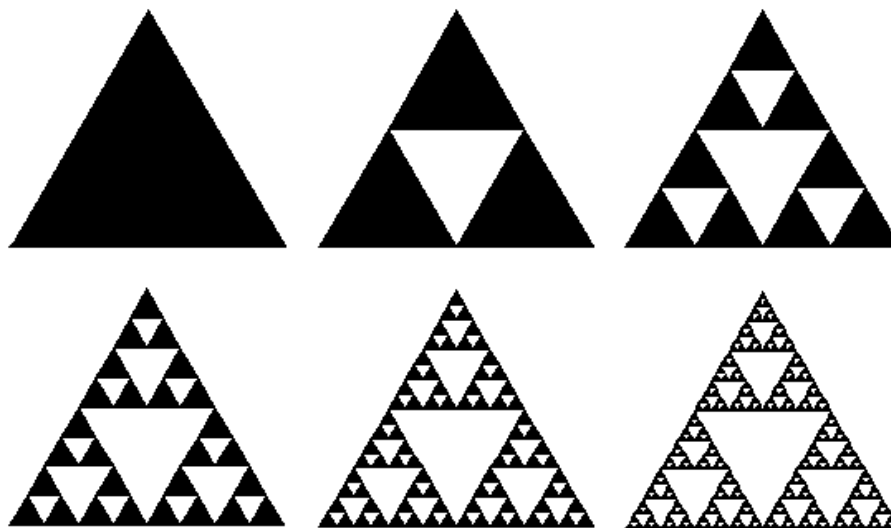
Ako to už býva, pri niektorých slávnych objavoch zohrala svoju úlohu do istej miery aj náhoda. Benoît Mandelbrot do počítača napísal uvedený rekurzívny vzorec a zvolil počiatočné hodnoty. Počítač však zabudol pred odchodom domov vypnúť, takže výpočty prebiehali stále a stále dookola, pričom program vykresľoval postupnosť, ktorá vznikala. Ráno Mandelbrot uvidel na monitore počítača krásny fraktál. Mandelbrot neskôr zistil, že v chaose sa vyskytujú niektoré fraktálne zásady a princípy, ktoré sa dajú uplatniť v modernej matematike na popísanie javov, ktoré by boli bez tohto objavu považované len za dielo náhody.



Obrázok 4: Mandelbrotova množina.

Mandelbrot svoje objavy publikoval vo svojom diele „Fractals and the Geometry of Nature“ (Mandelbrot, 1982), ktoré sa zaoberá práve fraktálovou geometriou, sebakodobnosťou a vzťahom medzi poriadkom a chaosom.

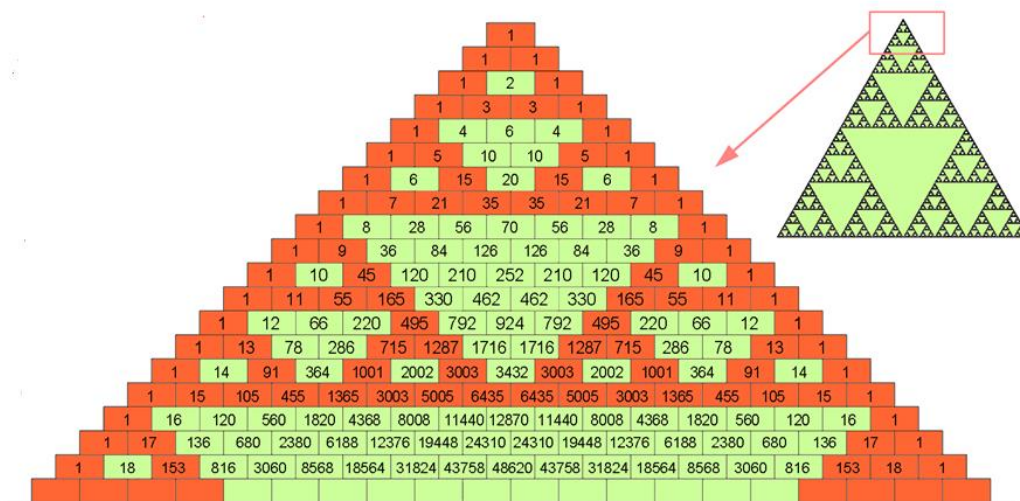
Jedným z ďalších významných fraktálov je tzv. Sierpinského trojuholník (obrázok 5; Peitgen et al., 2004), pomenovaný po poľskom matematikovi Wacławovi Sierpiskom.



Obrázok 5: Sierpinského trojuholník.

Základom Sierpinského trojuholníka je plný rovnostranný trojuholník, ktorý vieme pomocou stredných priecok rozdeliť na štyri zhodné a tiež rovnostranné trojuholníky, čo vyplýva z podobnosti a z vlastností rovnostranného trojuholníka. Prostredný trojuholník „vyberieme“ a uvedený postup ďalej opakujeme.

Zaujímavou skutočnosťou je ďalší objav, ak vezmeme Pascalov trojuholník (obrázok 6) a vyfarbíme rôznymi farbami párne (zelená) a nepárne (oranžová) čísla, získame obrázok, kopírujúci štruktúru Sierpinského trojuholníka (Peitgen et al., 2004).



Obrázok 6: Pascalov a Sierpinského trojuholník.

3 Využitie fraktálovej geometrie

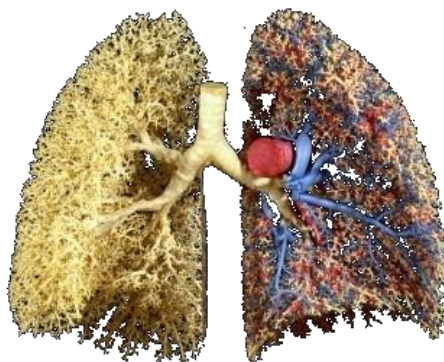
Postupne sa fraktálová geometria presúvala z fázy objavovania do fázy praktického využitia. Vďaka Mandelbrotovmu objavu, že v chaose sa vyskytujú niektoré fraktálne zásady a princípy, sa modernej matematike darí nachádzať matematické vzťahy aj v javoch, ktoré by boli bez tohto objavu považované len za dielo náhody. Tá naďalej ostáva do istej miery prítomná. Chaos je sebakopodbný, teda nezáleží na tom, akú mierku na pozorovanie si zvolíme, stále pôjde o chaos.

Fraktály nie sú len počítačom vygenerované obrázky, na pohľad síce pekné, ale z praktického hľadiska nevyužiteľné. V prírode sú fraktály bohato zastúpené (obrázok 7) napríklad v podobe paprad'ového listu, karfiolu, slimačích ulít, bleskov, oblakov, či vodopádov. Aj keď sú to veľmi nepravidelné fraktály a nedajú sa korektne matematicky zapísať, môžeme si všimnúť, že po priblížení sa opakuje pôvodný vzor (Voss, 1988).



Obrázok 7: Fraktály v prírode.

Ani ľudské telo nie je výnimkou a fraktály sú v ňom prítomné vo vetvení sa ciev a pľúcnych alveol, ktoré je detailne viditeľné, ak sa pozrieme na obrázok pľúc (obrázok 8; Comanescu et al., 2006).



Obrázok 8: Fraktály v ľudskom tele.

Fraktály si našli miesto svojho využitia v medicíne, chémii, biológii, či informatike. Využívajú sa napríklad na modelovanie rôznych procesov. Metódy rozvíjané v teórii chaosu sa uplatnili pri riešení mnohých biologických a fyziologických problémov dotýkajúcich sa človeka.

3.1 V medicíne

Ľudské telo je malou elektrárnou. Elektrická aktivita srdca sa prejavuje zmenami elektrického napätia a to nielen v svalovine, ale i na povrchu tela (Trojan, 1999). Tieto zmeny vznikajú sumáciou elektrických prejavov (akčných potenciálov) všetkých srdcových buniek. Pretože jednotlivé bunky nemajú v danom čase rovnakú hodnotu akčného potenciálu, na povrchu membrán a všade v okolí srdca vniká tok elektrického prúdu. Tkanivo ľudského tela je vodivé, keďže obsahuje veľké množstvo nabitých iónov. Medzi rôznymi miestami na povrchu tela vzniká napätie, ktoré vieme v čase zaznamenávať pomocou elektrogardiogramu (EKG; Trojan, 1999).

Pri sledovaní signálu z EKG, sa zistilo, že srdcová činnosť vykazuje nepravidelnosti, ktoré sú typické práve pre nelineárne dynamické systémy. Hoci by sa mohlo zdať, že činnosť srdca je viac-menej pravidelnou, nie je to tak, keďže je ovplyvňovaná mnohými podmienkami ako fyzická záťaž, trávenie, spánok, dýchanie. V podstate ide o synchronizáciu srdcovej činnosti s rytmom dýchania. Signál srdca môže byť krátkodobo aj úplne periodický, vtedy však ide prevažne o patologické javy, napríklad fibrilácia (Mäkikallio, 1998).

V tehotenstve je možné pomocou chaotických filtrov oddeliť EKG signál plodu od celkového signálu EKG matky a ďalšieho šumu. Proces eliminácie okolitého šumu a spôsob oddelenia EKG signálu plodu o matky opisujú podrobne Richter, Schreiber a Kaplan (1998).

3.2 Vo fyzike

Fyzika opisuje tzv. problém troch telies, ktorý takisto súvisí s fraktálmi a dynamickými systémami. Problém je zadán takto: Máme vo vesmíre tri telesá a dané počiatočné podmienky – polohu telies, ich hmotnosť a počiatočnú rýchlosť a smer pohybu. Úlohou je analyticky vypočítať polohu telies v ľubovoľnom okamihu. Bolo dokázané (XiaoMing, ShiJun, 2014), že tento problém sa analyticky nedá riešiť. Vzhľadom na to, že pre problém dvoch telies je riešenie v newtonovskej mechanike triviálne, toto zistenie bolo prinajmenšom

prekvapivé. Tri telesá sa pohybujú po čiastočne chaotických dráhach a sú priťahované k určitým bodom – podivným atraktorom – na svojej dráhe (XiaoMing, ShiJun, 2014).

3.3 V chémii

V chémii sa s fraktálnou štruktúrou môžeme stretnúť pri skúmaní Brownovho pohybu, ktorý vzniká chaotickým pohybom častíc v látke (Krätsmár-Šmogrovič et al., 2007). Je spôsobený nenulovou teplotou telesa, pričom v tomto prípade sa nulou nemyslí 0 °C, ale absolútna nula (−273,15 °C alebo 0 K). Pri tejto teplote, alebo skôr mraze, sa zastavuje všetok pohyb, teda častice sú v pokoji. Pri každej teplote, ktorá je vyššia od absolútnej nuly, je pohyb častíc prítomný buď v podobe slabého kmitania, alebo v podobe voľného pohybu častíc v priestore. Brownov pohyb môžeme sledovať napríklad pri miešaní dvoch kvapalín alebo plynov. Klasickým príkladom, ktorý demonštruje Brownov pohyb častíc, je difúzia (Růžicková, Kotlík, 2009). S využitím fraktálovej geometrie vieme tento neusporiadaný pohyb častíc pomerne presne simulovať aj na počítači.

3.4 V biológii

V biológii, ale i v chémii, stále stúpa záujem o odhalenie tajomstva genetickej informácie, uloženej v nukleových kyselinách DNA a RNA. Jednou z otázok je, ako rozlíšiť kódujúce a nekódujúce sekvencie (Kyriazis, 1991). Keďže predošlé výskumné postupy nepriniesli žiadne uspokojujúce odpovede, v roku 2002 sa čínsky tím rozhodol využiť, okrem iných výskumných prostriedkov, aj fraktálnu dimenziu a multifraktálnu analýzu. Matematickú reprezentáciu štruktúry DNA popisujú vo svojom diele „Fractals in DNA sequence analysis“ (Zu-Guo et al., 2002), pričom na jej vytvorenie im poslúžili poznatky z oblasti teórie chaosu aj fraktálovej geometrie. V dvojzávitnici DNA si všimli opakujúce sa úseky (fraktálové štruktúry), teda úseky s rovnakým poradím báz, a práve uvedené úseky sú vhodnými kandidátmi na naviazane restričných endonukleáz, teda enzýmov, ktoré dokážu štiepiť reťazec DNA. Následne je odštiepená časť reťazca za účinku enzýmu DNA-ligázy „pripevnená“ na klonovací vektor (plazmid), za vzniku rekombinantného vektora, ktorý je vložený do host'ovskej bunky. Takýmto klonovaním je možné vytvoriť mnoho kópií rekombinantnej DNA.

3.5 V ekonomike

Fraktály si našli svoje uplatnenie aj v ekonomike. Američan R. N. Elliottovi v polovici tridsiatych rokov 20. storočia prichádza na burzu, kde ho fascinujú pohyby cien na Wall Street. Uvedomuje si dynamické cyklické správanie sa trhu a spíše pre toto správanie zoznam pravidiel. Tie vydáva vo svojej práci „The Wave Principle“ (Elliott, 1992). Po úspešných prognózach, ktoré s využitím predchádzajúcich zistení urobil, získava povest' burzového mága. Podľa neho dostala názov Eliotova vlna, ktorá predstavuje tendenciu cien na burze pohybovať sa vo vlnách. Vlna v grafe vzniká prispôbovaním sa cien aktuálnej potrebe daného tovaru. Keď je tovaru málo, jeho cena stúpa, keď je ho prebytok, cena zaň klesá. Bolo dokázané, že Eliotove vlny sú fraktálmi, pretože jedna Eliotova vlna je tvorená mnohými ďalšími, pričom nezáleží na mierke, ktorú si pri sledovaní priebehu vlny

zvolíme. Pri analýze vlny môžeme spozorovať dve fázy, ktoré sa cyklicky opakujú – impulzívna fáza (v smere trendu) a korekčná fáza (proti smeru trendu; Elliott, 1992).

3.6 V informatike

Pravdepodobne najväčšie uplatnenie má fraktálová geometria v počítačovej grafike. Rozvoj grafických možností počítačov si vyžiadala objavenie a zapojenie nových postupov, postupov ako modelovať prírodné objekty.

Na modelovanie objektov sa dlhý čas používali modelovacie programy CAD a CAM (Crilly et al., 1991), ktoré boli veľmi užitočné v prípade modelovania technických a geometrických predmetov. Programy však neprinášali vierohodné a kvalitné zobrazenia zložitejších prírodných objektov, napríklad pohorí, stromov, rastlín, kameňov alebo morských vln. Kvôli členitosti týchto objektov bola práca časovo náročná (Žára et al., 2004).



Obrázok 9: Fraktálmi generovaný obraz pohoria.

Grafikom na pomoc prišlo procedurálne modelovanie (Žára et al., 2004), kedy animátor nežadáva priamo tvar objektu, ale spôsob (predpis), akým bude objekt generovaný. Tento spôsob nielenže prináša kvalitné výsledky, vďaka ktorým diváci v kinách nevedia rozoznať simulovaný objekt od reálneho, ale i niekoľkonásobne skracuje čas potrebný na vytvorenie týchto objektov. Pri procedurálnom modelovaní sa okrem iného využívajú aj fraktály (obrázok 9). Výhoda spočíva nielen v rýchlosti generácie objektov, ale i v menšom úložnom priestore, ktorý je potrebný na textúru generovanú fraktálmi, keďže zaberá len niekoľko bitov.

4 Záver

Mnohí matematici, vrátane Mandelbrota, boli uchvátení a nadchnutí krásou fraktálov. Ne-jeden z nich si vytváral obrázky fraktálov len pre ich krásu, bez toho, aby sa snažil obja-vovať ich aplikáciu v praktickom živote. Práve tieto obrázky prispeli k popularizácii frak-tálovej geometrie aj medzi laikmi.

Ak by chýbalo akékoľvek využitie fraktálovej geometrie, fraktály by sa stali iba umelec-kými dielami, ktoré sú síce krásne na pohľad, ale v bežnej praxi nepoužiteľné. Pokrok vo vede si však žiadal experimentovať a pokúsiť sa prepojiť také oblasti a témy, ktoré zdan-livo nemajú nič spoločné. Takýmto spôsobom sa fraktálová geometria stala dôležitou aj pre iné vedné odbory ako matematiku a našla si svoje miesto a možnosti využitia v medi-cíne, fyzike, biológii, chémii, ekonomike, či informatike. Samozrejme, nepopierateľné vy-užitie fraktálov sa nachádza aj v umení a architektúre.

Elegantné zákony, ktoré v prírode platia a je ich možné opísať jazykom matematiky, na-vonok prejavujú svoju eleganciu v tvaroch, štruktúrach, či dráhach objektov. Táto chao-tická krása je výsledkom mnohých faktorov, ktoré ju ovplyvňujú a podmieňujú. Môžeme považovať za zázrak, že dokážeme nahliadnuť aspoň sčasti za oponu a uvidieť tú najnapí- navejšiu a najkrajšiu scénu, ktorú tam – na pódiu „organizovaného chaosu“, hrá tá najta-lentovanejšia umelkyňa – príroda sama.

Literatúra

1. Ashford, O. M. 1985. *Prophet or Professor? : Life and work of Lewis Fry Richardson*. Bristol : Adam Hilger. ISBN 978-0-85274-774-2.
2. Comanescu, A. – Comanescu, D. – Neagoe, A. 2006. Fractal models for human body systems simulation. In *Journal of Biomechanics*. Vol. 39, no. 1, pp. 431. ISSN 0021-9290.
3. Crilly, T. 2011. *Matematika : 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať*. Bratislava : SLOVART. ISBN 978-80-556-0294-3, s. 103.
4. Crilly, A. J. – Earnshaw, R. – Jones Huw. 1991. *Fractals and Chaos*. New York : Springer-Verlag. ISBN 978-1-4612-7770-5.
5. Čižmár, J. 2017. *Dejiny matematiky : od najstarších čias po súčasnosť*. 1. vyd. Bratislava : Perfekt, a. s. ISBN 978-80-8046-829-3, s. 130–221, 227–231, 332–336, 355–373, 835.
6. Eckmann, J. P. – Ruelle, D. 1985. Ergodic Theory of chaos and strange attractors. In *Reviews of modern physics*. Vol. 57, no. 3, pp. 617. ISSN 0034-6861, s. 279–312.
7. Elliott, R. K. 1992. The Third Wave Breaks on the Shores of Accounting. In *Accounting Horizons*. Vol. 6, no. 2, pp. 61–96. ISSN 0888-7993.
8. Krätsmár-Šmogrovič, J. et al. 2007. *Všeobecná a anorganická chémia*. 2., upravené vyd. Martin : Osveta. ISBN 978-80-8063-245-8, s. 131.
9. Kyriazis, M. 1991. Applications of chaos theory to the molecular biology of aging. In *Experimental Gerontology*. Vol. 26, no. 6, pp. 569–572. ISSN 0531-5565.
10. Kellert, S. H. 1994. *In the wake of chaos : Unpredictable Order in Dynamical Systems*. London : The University of Chicago Press. ISBN 0-226-42976-8, s. 1–5, 12.
11. Mäkkikallio, T. 1998. *Analysis of heart rate dynamics by methods derived from nonlinear mathematics*. Oulu : Oulu University Library. ISBN 951-42-5013-3, s. 19–20.
12. Mandelbrot, B. B. 1982. *The fractal geometry of nature*. New York : W. H. Freeman and Company. ISBN 978-0716711865.

13. Mandelbrot, B. B. 2003. *Fraktály : tvar, náhoda, dimenzia*. 1. vyd. Praha : Mladá Fronta. ISBN 80-204-1009-0.
14. Mordukhovich, B. 2011. Beauty of mathematics. In *Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti*. Vol. 89, no. 2, ISSN 1825-1242.
15. Papert, S. et al. 2004. Affective Learning – A Manifesto. In *BT Technology Journal*. Vol. 22, no. 4, str. 263.
16. Peiten, H.-O. – Jürgens, H. – Saupe, D. 2004. *Chaos and fractals*. 2. vyd. New York : Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-21823-6, s. 62, 76–79, 81, 87–90.
17. Reyes, M. G. 2004. The rhetoric in mathematics: Newton, Leibniz, the calculus, and the rhetorical force of the infinitesimal. In *Quarterly Journal of Speech*. Vol. 90, no. 2, pp. 159–184. ISSN 0033-5630.
18. Richter, M. – Schreiber, T. – Kaplan, D. T. 2004. Fetal ECG extraction with nonlinear state-space projections. In *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. Vol. 45, no. 1, pp. 133–137. ISSN 0018-9294.
19. Růžicková, K. – Kotlík, B. 2009. *Chemie v kostce*. 1. vyd. Praha : FRAGMENT. ISBN 978-80-253-0599-7, s. 191.
20. Trojan, S. 2004. *Lékařská fyziologie*. 4. prepracované a doplnené vyd. Praha : Grada. ISBN 80-247-0512-5, s. 276–277.
21. Voss, R. F. 1988. Fractals in nature. In Barnsley, M. F., ed. *The Science of Fractal Images*. New York : Springer-Verlag. S. 21-70. ISBN 978-1-4612-8349-2.
22. XiaoMing, L. – ShiJun, L. 2014. On the stability of the three classes of Newtonian three-body planar periodic orbits. In *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*. Vol. 57, no. 11, pp. 2121–2126. ISSN 1674-7348.
23. Zu-Guo, Y. et al. 2002. Fractals in DNA sequence analysis. In *Chinese Physics*. Vol. 11, no. 12, pp. 1313–1318. ISSN 1009-1963.
24. Žára, J. et al. 2004. *Moderní počítačová grafika*. 2. vyd. Brno : Computer Press. ISBN 8025104540, s. 265–300.

Kontakt

Mgr. Jana Žolnová

Katedra chémie, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre

Trieda Andreja Hlinku 603/1, 949 74 Nitra

jana.zolnova95@gmail.com

Cirkevná základná škola sv. Cyrila a Metoda

Komenského ul. 3064/41, 926 01 Sered'