Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 6, No. 2, p. 1 – 17
ISSN 2453-6083

Matematické bohatstvo Fibonacciho čísel
Mathematical Treasure of Fibonacci Numbers

Miroslav Chválny[a]

[a1]Stredná priemyselná škola stavebná, Cabajská 4, 950 50 Nitra, Slovakia

Received September 7, 2020; received in revised form October 9, 2020; accepted October 14, 2020

Abstract

In this article, we discuss relationships between Pascal's triangle and the Fibonacci sequence. We point out some attributes of Fibonacci numbers, a triangular number field similar to Pascal's triangle, which is composed form Fibonacci numbers. We derive relations for diagonal and row sums of the Hosoya's Triangle.

Keywords: Pascal's Triangle, Fibonacci Sequence, Hosoya's Triangle.

Classification: 97A20

Úvod

Zrejme najvýznamnejší európsky matematik stredoveku Leonardo Pisánsky, známy viac pod prezývkou Fibonacci, sa zapísal do dejín matematiky predovšetkým tým, že oboznámil Európu s indicko-arabskou pozičnou desiatkovou sústavou. Okrem toho jeho kniha Liber abaci obsahuje riešenia elementárnych problémov, vrátane tzv. úlohy o králikoch. Jedna z foriem motivácie žiakov, študentov i samotných učiteľov je historické bádanie, t. j. fenomén, ktorý obohacuje aj súčasný matematicko-pedagogický proces a zároveň podnecuje u žiakov záujem bádať a objavovať nové poznatky a nové súvislosti aj v 21. storočí.

Historické pozadie Fibonacciho postupnosti

Fibonacci, vlastným menom Leonardo Pisánsky (približne 1170 -1250). V roku 1202 napísal svoj najvýznamnejší spis „Liber abaci“ („Kniha o výpočtoch“), ktorý značne prepracoval v roku 1228. Knihu možno považovať za najpozoruhodnejšiu matematickú knihu celej stredovekej európskej histórie. V 12. kapitole o postupnostiach sa nachádzajú úlohy na výpočet súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti, geometrickej postupnosti, postupnosti druhých mocnín prirodzených čísel a špeciálnej postupnosti definovanej rekurentne.

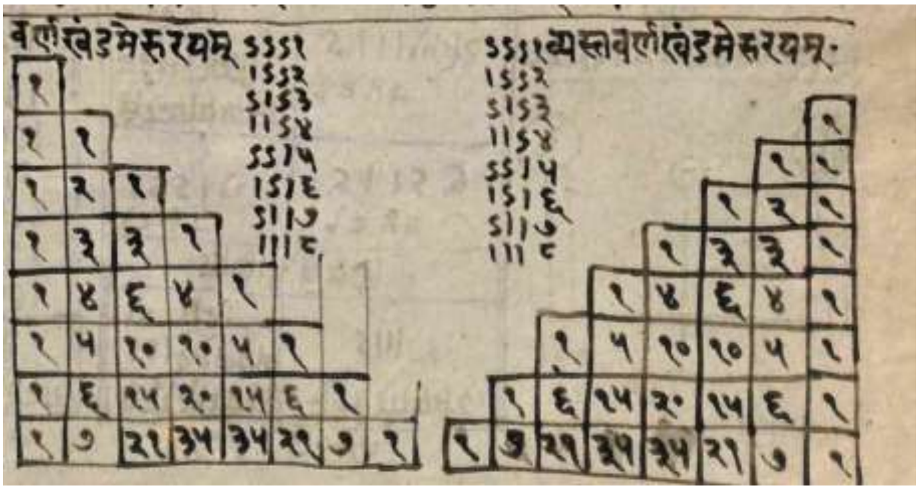
Táto posledná postupnosť sformulovaná ako úloha o rozmnožovaní králikov je zrejme najslávnejším matematickým objektom knihy. Úlohou je určiť počet králičích párov po jednom roku, keď na začiatku roka existuje jeden pár, po mesiaci sa mu narodí pár, ktorý je po mesiaci schopný rozmnožovania a ďalší mesiac má za potomkov ďalší pár, atď., pričom pôvodný pár má každý mesiac ako potomstvo ďalší pár a podobne to je aj s ďalšími pármi, pričom do roka žiaden pár neuhynie. Každý člen tejto postupnosti okrem prvých dvoch členov $F_1 = 1, F_2 = 1$ je daný rekurentným vzťahom

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \;\; n \in N.$$

[1]Corresponding author: m.chvalny@stonline.sk
DOI: 10.17846/AMN. 2020.6.2.1-17

Albert Girard (1595-1632), ako prvý uviedol rekurentnú definíciu tejto postupnosti v dnešnej podobe. V druhej polovici 19. storočia francúzsky matematik F. E. Lucas (1842-1891) skúmal niektoré vlastnosti členov tejto postupnosti. Bol to práve on, ktorý na počesť Leonarda zaviedol pomenovanie Fibonacciho postupnosť a jej členy nazval Fibonacciho čísla [1], [2] a [3].

Avšak v historických prameňoch nachádzame poznatky, ktoré nás zavedú do obdobia okolo roku 300 pred Kr., kedy žil staroveký indický matematik a básnik Acharya Pingala (पिङ्गल). O jeho živote vieme len veľmi málo. Bol autorom spisu Chandaḥśāstra (tiež nazývaný Pingala-sutras), v ktorom opísal prvé známe vysvetlenia binárnych čísel, Fibonacciho čísel (tzv. maatraameru) a Pascalovho trojuholníka (tzv. meru-prastaara, Obr. 1) [4] a [5].



Obr. 1: *Pingala Meru - Prastaara.* Zdroj:[6].

Fibonacciho postupnosť v Pascalovom trojuholníku

V tejto časti si ukážeme, kde sa v Pascalovom trojuholníku skrývajú Fibonacciho čísla. V roku 1654, v súvislosti so štúdiom pravdepodobnosti, B. Pascal napísal spis o tom , ktorý sa dnes nazýva Pascalov trojuholník [7].

Je to trojuholníkové číselné pole (Obr. 2) zostavené z kombinačných čísel $\binom{n}{k}$, kde $n \geq 0, 0 \leq k \leq n$; k, n sú celé čísla. Je zrejmé, že táto schéma je nekonečná. Nasledujúci obrázok zobrazuje Pascalov trojuholník pre $n = 6$.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

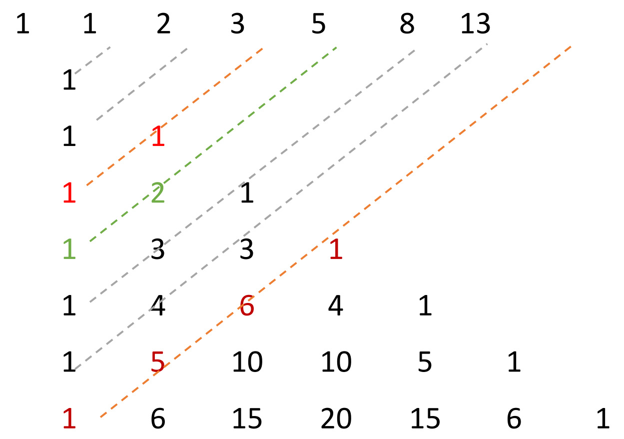
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

Obr. 2: *Pascalov trojuholník. Vlastný obrázok.*

Ak chceme zdôrazniť, kde sa v tejto schéme skrývajú Fibonacciho čísla, je výhodné prepísať Pascalov trojuholník do pravouhlého tvaru (Obr. 3). Určme súčet s_n všetkých kombinačných čísel, ktoré sa nachádzajú na priamke prechádzajúcej kombinačným číslom $\binom{n}{0}$ a zvierajú s príslušným riadkom tohto trojuholníka uhol 45°. Pre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ dostaneme:



Obr. 3: *Pascalov trojuholník v pravouhlom tvare a Fibonacciho čísla. Vlastný obrázok.*

$$s_0 = \binom{0}{0} = 1 = F_1,\quad s_1 = \binom{1}{0} = 1 = F_2,$$

$$s_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 2 = F_3,\quad s_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 3 = F_4,$$

$$s_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 5 = F_5,\quad s_5 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 8 = F_6,$$

$$s_6 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 13 = F_7,\quad s_7 = \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 21 = F_8\,.$$

Na základe týchto súčtov môžeme vysloviť hypotézu, že postupnosť $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$. je totožná s postupnosťou $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \ \dots$., t.j. pre všetky celé nezáporné čísla n platí $s_{n-1} = F_n$.

Konkrétne to znamená, že pre každé $n \in N$ platí

$$F_n = \begin{cases} \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}, & \text{ak } n \text{ je nepárne,} \\[2ex] \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}}, & \text{ak } n \text{ je párne.} \end{cases}$$

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Je jednoduché overiť, že identita platí pre $n = 1\ a\ n = 2$; $F_1 = \binom{0}{0} = 1\ a\ F_2 = \binom{1}{0} = 1.$

Predpokladajme, že identita platí pre hodnoty menšie ako n, dokážeme, že uvedená identita platí aj pre n.

a) Ak n je párne číslo, tak $n-2$ je párne číslo a $n-1$ je nepárne číslo, preto

$$F_{n-2} = \binom{(n-2)-1}{0} + \binom{(n-2)-2}{1} + .. + \binom{(n-2)-1-(i-1)}{i-1} + \dots + \binom{\frac{(n-2)}{2}}{\frac{(n-2)-2}{2}},$$

$$F_{n-1} = \binom{(n-1)-1}{0} + \binom{(n-1)-2}{1} + \binom{(n-1)-3}{2} + \ldots + \binom{(n-1)-1-i}{i} + \ldots.. + \binom{\frac{(n-1)-1}{2}}{\frac{(n-1)-1}{2}}.$$

Využitím rekurentného vzťahu $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dostaneme, že

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots.. + \binom{n-1-i}{i} + \ldots. + \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}}.$$

b) Ak n je nepárne číslo

c) $F_{n-2} = \binom{(n-2)-1}{0} + \binom{(n-2)-2}{1} + .. + \binom{(n-2)-1-(i-1)}{i-1} + \cdots + \binom{\frac{(n-2)-1}{2}}{\frac{(n-2)-1}{2}}$,

$$F_{n-1} = \binom{(n-1)-1}{0} + \binom{(n-1)-2}{1} + \binom{(n-1)-3}{2} + \ldots + \binom{(n-1)-1-i}{i} + \ldots.. + \binom{\frac{(n-1)}{2}}{\frac{(n-1)-2}{2}},$$

dostaneme

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots.. + \binom{n-1-i}{i} + \ldots. + \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}. \qquad [8].$$

Softvér *Mathematica* nám umožňuje vyčísliť Fibonacciho čísla aj s vysokými indexami.

Napríklad Fibonacciho čísla

$F_{100} = \binom{99}{0} + \binom{98}{1} + \binom{97}{2} + \binom{96}{3} + \ldots + \binom{51}{48} + \binom{50}{49}$,

$F_{200} = \binom{199}{0} + \binom{198}{1} + \binom{197}{2} + \binom{196}{3} + \ldots + \binom{101}{98} + \binom{100}{99}$,

$F_{699} = \binom{698}{0} + \binom{697}{1} + \binom{696}{2} + \binom{695}{3} + \cdots + \binom{351}{347} + \binom{350}{348} + \binom{349}{349}$

vyčíslime jednoduchým príkazom $Fibonacci[n]$, konkrétne

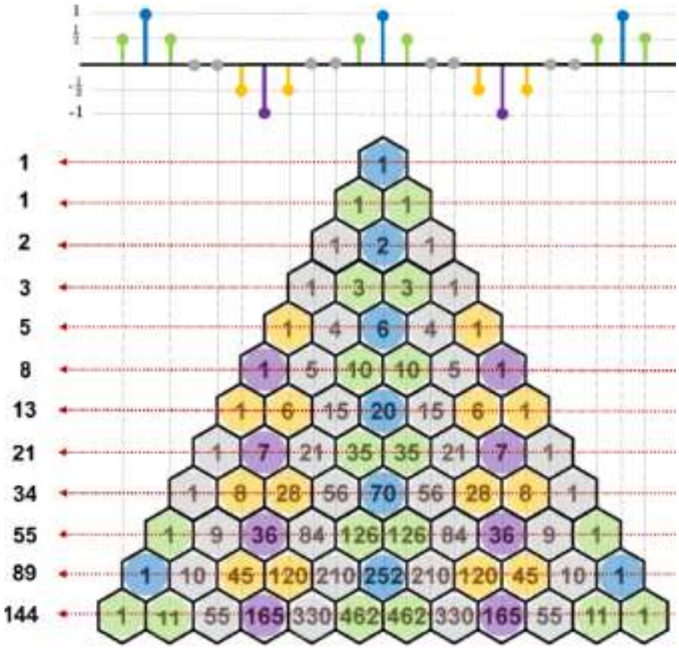
Fibonacci[100]= 354224848179261915075

Fibonacci[200] = 280571172992510140037611932413038677189525

**Fibonacci[699] =
54059936666307888585371224524040479564193340847128274990827350 63
36975240676728448671290816396634209121071249875468346691590435815
3636317442639426.**

Nová vizualizácia Fibonacciho čísel v Pascalovom trojuholníku

V roku 2018, Bernhard A. Moser uviedol nový spôsob výpočtu Fibonacciho čísel v Pascalovom trojuholníku [9].
Tento pôsobivý postup je založený na súčte čiastočných súčinov vytvorených jednotlivými prvkami Pascalovho trojuholníka a výberom prvkov z množiny $\left\{-1, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.



Obr. 4: *Nová vizualizácia Fibonacciho čísel v Pascalovom trojuholníku. Zdroj:* [9].

Napríklad,

$$144 = 1.\frac{1}{2} + 11.\frac{1}{2} + 55.0 + 165.(-1) + 330.0 + 462.\frac{1}{2} + 462.\frac{1}{2} + 330.0 + 165.(-1) + 55.0 + 11.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = F_{12}$$

Myšlienka novej identity sa opiera o vzťah $F_{k+1} = 1^T Q^k e_1$, kde e_k je k-rozmerný jednotkový vektor, $1^T = (1,1,1,1)$ a $Q = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}$.

Po úpravách (pozri [10]), dostaneme nasledovné vzťahy, ak k je párne číslo, tak

$$F_{k+1} = \binom{k}{\frac{k}{2}} + 2\sum_{q=1}^{\left\lfloor\frac{k}{10}\right\rfloor}\binom{k}{\frac{k}{2}-5q} - \sum_{\substack{q=1,\\ nepárne}}^{\left\lfloor\frac{k+1}{5}\right\rfloor}\binom{k+1}{\frac{k+1}{2}-5q},$$

ak k je nepárne číslo, tak

$$F_{k+1} = \frac{1}{2}\binom{k+1}{\frac{k+1}{2}} - 2\sum_{\substack{q=1,\\ nepárne}}^{\left\lfloor\frac{k}{5}\right\rfloor}\binom{k}{\frac{k}{2}-\frac{5}{2}q} + \sum_{q=1}^{\left\lfloor\frac{k+1}{10}\right\rfloor}\binom{k+1}{\frac{k+1}{2}-5q}.$$

Softvér *Mathematica* nám ponúka nástroje na overenie uvedených vzťahov aj aj pre pomerne vysoké indexy, napríklad pre $k = 166$, $k = 225$.

$\mathrm{feven}[\mathrm{k\_}] := \mathrm{Binomial}[k, \frac{k}{2}] + 2\sum_{q=1}^{\mathrm{Floor}[\frac{k}{10}]} \mathrm{Binomial}[k, (\frac{k}{2} - 5q)] - \mathrm{Sum}[\mathrm{Binomial}[(k+1), (\frac{k+1}{2} - \frac{5}{2}q)], \{q, 1, \mathrm{Floor}[\frac{k+1}{5}], 2\}]$

feven[166]
35600075545958458963222876581316753
$\mathrm{odd}[\mathrm{k\_}] := \frac{1}{2}\mathrm{Binomial}[(k+1), (\frac{k+1}{2})] - 2\mathrm{Sum}[\mathrm{Binomial}[k, (\frac{k}{2} - \frac{5}{2}q)], \{q, 1, \mathrm{Floor}[\frac{k}{5}], 2\}] + \sum_{q=1}^{\mathrm{Floor}[\frac{k+1}{10}]} \mathrm{Binomial}[k+1, (\frac{k+1}{2} - 5q)]$

fodd[225]
76159080909572301618801306271765994056795952743

Záporné a kladné Fibonacciho čísla

Pomocou vzťahu $F_{-n} = (-1)^{n-1}F_n$ môžeme rozšíriť definíciu Fibonacciho postupnosti aj pre záporné celé čísla [11]. Tým dostaneme nasledovné členy

$$..,13,-8,5,-3,2,-1,1,0,1,1,2,3,5,8,13,\dots$$

Rekurentný vzťah $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre $n \in N$ je pritom zachovaný. Týmto môžeme vyjadriť Fibonacciho čísla pomocou číselných hodnôt príslušných riadkov Pascalovho trojuholníka pre každé $n \in N$.

Vyjadrenie $F_n, pre\ n \in [n, n+7]$ sú v Tab. 1 (pozri tiež [12]).

$F_n =$	**1** . F_n							
$F_{n+1} =$	**1** . F_n+	**1** . F_{n-1}						
$F_{n+2} =$	**1** . F_n +	**2** . F_{n-1}+	**1**. F_{n-2}					
$F_{n+3} =$	**1** . F_n +	**3** . F_{n-1}+	**3**. $F_{n-2} +$	**1**. F_{n-3}				
$F_{n+4} =$	**1** . F_n +	**4** . F_{n-1}+	**6**. $F_{n-2} +$	**4**. F_{n-3}+	**1**. F_{n-4}			
$F_{n+5} =$	**1** . F_n +	**5** . F_{n-1}+	**10**. $F_{n-2} +$	**10**. F_{n-3}+	**5**. F_{n-4}+	**1**. F_{n-5}		
$F_{n+6} =$	**1** . F_n +	**6** . F_{n-1}+	**15**. $F_{n-2} +$	**20**. F_{n-3}+	**15**. F_{n-4}+	**6**. F_{n-5}+	**1**. F_{n-6}	
$F_{n+7} =$	**1** . F_n +	**7** . F_{n-1}+	**21**. $F_{n-2} +$	**35**. F_{n-3}+	**35**. F_{n-4}+	**21**. F_{n-5}+	**7**. F_{n-6}+	**1**. F_{n-7}

__Tab. 1__: Vyjadrenie F_n pomocou Pascalovho trojuholníka.

Nech $n = 6$, potom máme nasledovné hodnoty:

$F_6 =$	**1** . F_6									= 8
$F_7 =$	**1** . F_6+	**1** . F_5								= 13
$F_8 =$	**1** . F_6 +	**2** . F_5+	**1**. F_4							= 21
$F_9 =$	**1** . F_6 +	**3** . F_5+	**3**. $F_4 +$	**1**. F_3						= 34
$F_{10} =$	**1** . F_6 +	**4** . F_5+	**6**. $F_4 +$	**4**. F_3+	**1**. F_2					= 55
$F_{11} =$	**1** . F_6 +	**5** . F_5+	**10**. $F_4 +$	**10**. F_3+	**5**. F_2+	**1**. F_1				= 89
$F_{12} =$	**1** . F_6 +	**6** . F_5+	**15**. $F_4 +$	**20**. F_3+	**15**. F_2+	**6**. F_1+	**1**. F_0			=144
$F_{13} =$	**1** . F_6 +	**7** . F_5+	**21**. $F_4 +$	**35**. F_3+	**35**. F_2+	**21**. F_1+	**7**. F_0+	**1**. F_{-1}		=233
$F_{14} =$	**1** . F_6 +	**8** . F_5+	**28**. $F_4 +$	**56**. F_3+	**70**. F_2+	**56**. F_1+	**18**. F_0+	**8**. F_{-1}+	**1**. F_{-2}	=377

__Tab. 2__: Vyjadrenie $F_6, ..F_{14}$ pomocou Pascalovho trojuholníka.

Fibonacciho čísla vo vrstvách vekov

V nasledujúcej tabuľke je uvedený stručný historický prehľad najvýznamnejších výsledkov týkajúcich sa súvislostí Fibonacciho čísel a Pascalovho trojuholníka, ako aj ich súvislostí s mnohými inými matematickými objektmi a pojmami.

Tabuľka je zostavená chronologicky [pozri tiež 13].

Dátum	Udalosť (jav, objav, súvislosť)	Zdroj(e)
300 pr. n. l.	A.Pingala-Pingala sutras, maatrameru, meru-prastaara	[4], [5]
200 pr. n. l.	Indickí matematici používali *Pascalov trojuholník* iba v úlohách kombinatoriky.	[19, (s. 27]
1100	Ťia Sien sa v diele *Vysvetlenie tabuliek reťazovej metódy odmocňovania* zaoberá výpočtom štvrtých odmocnín použitím dnešných binomických čísel $\binom{n}{k}$ len do n=6.	[2, (s. 234] [19, (s. 27]
1202	Prvé vydanie knihy *Liber abaci*.	[13, (s.17)] [14, (s. 100)]
1228	Prepracované vydanie knihy *Liber abaci*-Úloha o králikoch, prvýkrát sa objavujú Fibonacciho čísla.	[13, (s.17, 31)]
1303	Ču Š-ťie (1260-1320) v *Jaspisovom zrkadle štyroch prvkov* uvádza trojuholníkovú tabuľku binomických čísel $\binom{n}{k}$ až po n=8.	[2, (s. 235] [19, (s. 27]
1427	Al-Káší (okolo 1370-1429)-dielo *Kľúč aritmetiky* obsahuje tabuľku binomických koeficientov až po deviatu mocninu.	[2, (s. 278] [19, (s. 287]
1527	Petrus Apianus (1495-1522) – prvý záznam Pascalovho trojuholníka v Európe.	[2, (s. 461] [19, (s. 28]
1544	Michael Stifel (1487-1567)-publikoval časť Pascalovho trojuholníka.	[2, (s. 461] [19, (s. 28]
1556	N. Fontana Tartaglia (1500-1577)-vydal šesť riadkov Pascalovho trojuholníka.	[2, (s. 461]
1665	B. Pascal (1623-1662)-rozvoj binomických koeficientov alebo Pascalov trojuholník publikované v diele *Pojednanie o aritmetickom trojuholníku* (Traité du triangle aritmétique).	[2, (s. 461)]
1680	Giovani D. Cassini-objavil identitu: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \ \ pre\ n \geq 1.$	[13, (s.171)]
1753	Škótsky matematik R. Simson (1687-4768) dokázal rovnosť: $\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$, a vzťah: $C_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}\ , pre\ n \geq 1.$	[13, (s.114, 149)]
1765	Leonhard Euler publikoval formulu: $F_n = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\sqrt{5}}.$	[13, (s.116)]
1843	Francúzsky matematik Jacques P. M. Binet znovu objavil formulu: $F_n = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\Phi - \Phi'} = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\sqrt{5}}$. Dnes označujeme Binetov vzorec.	[1, (s.201)] [13, (s.116)]
1876	Édouard Lucas prvýkrát uverejnil identitu: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1,$ a $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$	[13, (s.168, 170)]
2. pol. 19. stor.	É. Lucas prvýkrát nazval postupnosť $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n\,,\ pre\ n \in N, pričom\ F_1 = 1\ a\ F_2 = 1$, postupnosťou Fibonacciho čísel.	[13, (s.17, 92)]
zač. 20. stor.	Americký matematik Mark Barr (1871-1950) zaviedol označenie: $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\doteq 1{,}6180339887498948482\ldots)$.	[13, (s.113)]
1964	John H. E. Cohn-dokázané, že jediná Fibonacciho čísla tvaru $F_n = x^2, (n \in N)\ sú\ \ F_1 = F_2 = 1, F_{12} = 144;$ a jediná Fibonacciho čísla tvaru $F_n = 2x^2, (n \in N)$ sú $F_3 = 2\ (x = 1)\ a\ F_6 = 8, (x = 2).$	[13, (s.126)]
1976	Haruo Hosoya-zostavil trojuholníkové číselné pole, tzv. Hosoyov trojuholník: $H(m,k) = F_{k+1}F_{m-k+1}.$	[15, (s. 187-195)]
2007	R. J. McIntosh a E. L. Roettiger-posledné výsledky týkajúce sa nájdenia Fibonacciho-Wieferichova prvočísla.	[13, (s.224)]

2018	Bernhard A. Moser-nová vizualizácia Fibonacciho čísel.	[9], [10]

Tab. 3: *Chronologický prehľad vývoja poznatkov o Fibonacciho postupnosti.*

Hosoyov trojuholník

V roku 1976, Haruo Hosoya z Ochanomizuskej Univerzity v Tokiu zostavil trojuholníkové číselné pole (Obr. 5), podobné Pascalovmu trojuholníku. Nazývame ho *Hosoyov trojuholník*.

Usporiadanie čísel je súmerné podľa priamky **p** prechádzajúcej vrcholom. Dve okrajové diagonály, severovýchodná a juhovýchodná, pozostávajú z Fibonacciho čísel. Každé vnútorné číslo je súčtom dvoch predchádzajúcich čísel na jeho uhlopriečke, napr.: 6=2+4=3+3.

Ak $H(m,k)$ je Hosoyov koeficient pre riadok $m = 0,1,2,3,\ldots$ a stĺpec $k = 0,1,2,\ldots$, potom

m=0	k=0	$H(0,0)$						
		1						
m=1	k=0,1	$H(1,0)$	$H(1,1)$					
		1	1					
m=2	k=0,1,2	$H(2,0)$	$H(2,1)$	$H(2,2)$				
		2	1	2				
m=3	k=0,1,2,3	$H(3,0)$	$H(3,1)$	$H(3,2)$	$H(3,3)$			
		3	**2**	2	**3**			
m=4	k=0, …,4	$H(4,0)$	$H(4,1)$	$H(4,2)$	$H(4,3)$	$H(4,4)$		
		5	3	**4**	**3**	5		
m=5	k=0,….,5	$H(5,0)$	$H(5,1)$	$H(5,2)$	$\boldsymbol{H(5,3}$	$H(5,4)$	$H(5,5)$	
		8	5	6	**6**	5	8	
m=6	k=0,….,6	$H(6,0)$	$H(6,1)$	$H(6,2)$	$H(6,3)$	$H(6,4)$	$H(6,5)$	$H(6,6)$
		13	8	10	9	10	8	13

Obr. 5*: Hosoyov trojuholník.* Zdroj: [15].

Na začiatku generovania Hosoyovho trojuholníka sú definované štyri začiatočné podmienky: $H(0,0) = H(1,0) = H(1,1) = H(2,1) = 1$. Každý prvok $H(m,k)$ číselného poľa môžeme rekurzívne definovať nasledovne:

$$H(m,k) = H(m-1,\ k) + H(m-2,k)$$
$$= H(m-1\,,k-1) + H(m-2,\ k-2),\ \text{kde } m \geq k \geq 0, m \geq 2, m,k \in N.$$

Keďže platí: $H(m,0) = H(m-1,0) + H(m-2,0)$,

$$H(0,0) = 1 = F_1,\ H(1,0) = 1 = F_2\,,\ H(2,0) = 2 = F_3\,,\ H(3,0) = 3 = F_4\,, \ldots$$

z toho vyplýva vzťah medzi $H(m,k)$ a Fibonacciho číslami: $H(m,0) = F_{m+1}$.

Podobne dostaneme nasledujúce vzťahy: $H(m,m) = H(m,0) = F_{m+1}$,

$$H(m,m-1) = H(m,1) = F_m\,.$$

Uvažujme už uvedenú rovnosť: $H(m,k) = H(m-1,\ k) + H(m-2,k)$, ktorú rekurzívne upravíme:

$$H(m,k) = H(m-1, \quad k) + H(m-2,k) =$$
$$= [H(m-2,k) + H(m-3,k)] + H(m-2,k) =$$
$$= 2\,H(m-2,k) + H(m-3,k) =$$

$$= 2\,[H(m-3,k\,) + H(m-4,k)] + H(m-3,k) =$$
$$= 3\,H(m-3,k) + 2H(m-4,k)$$

Pokračovaním získame nasledovný vzťah medzi $H(m,k)$ a Fibonacciho číslami:

$$\boldsymbol{H(m,k) = F_{j+1}H(m-j,k) + F_jH(m-j-1,k), \qquad kde\ 1 \leq j \leq m-k-1.}$$

Označme vzťahom $j = m-k-1$, ktorý dosadíme do posledného výrazu, potom dostaneme:

$$\boldsymbol{H(m,k)} = F_{m-k}\,H(k+1,k) + F_{m-k-1}\,H(k,k) =$$
$$= F_{m-k}\,F_{k+1} + F_{m-k-1}\,F_{k+1} =$$
$$= F_{k+1}\,(F_{m-k} + F_{m-k-1}) =$$
$$= \boldsymbol{F_{k+1}\,F_{m-k+1}}\,,$$

teda každé číslo $H(m,k)$ sa rovná súčinu dvoch Fibonacciho čísel, keďže platí aj $H(m,k) = H(m,m-k)$, čo je dôsledok súmernosti Hosoyovho trojuholník je

$$\boldsymbol{H(m,k) = H(m,m-k) = F_{k+1}\,F_{m-k+1}}\,.$$

Napríklad:

- $H(6,2) = 10 = 2\,.\,5 = F_3\,F_5$
- $H(9,6) = 39 = 3.13 = F_4\,F_7$
- $H(15,4) = 720 = 5.144 = F_5\,F_{12}$

Softvér Mathematica nám umožňuje vypočítať hodnoty $H(m,k)$ s vyššími indexmi:

- $H(25,4) = 88\,555 = 5\,.\,17\,711 = F_5\,F_{22}$
- $H(30,12) = 974\,173 = 233\,.\,4\,181 = F_{13}\,F_{19}$.

Položme $m = 2r, k = r,$ potom $H(2r,r) = F_{r+1}\,F_{2r-r+1} = F_{r+1}F_{r+1} = F_{r+1}^2$.

Čísla $H(2r,r)$ sa nachádzajú pozdĺž osi súmernosti a rovnajú sa druhým mocninám Fibonacciho čísel.

Napríklad:

- $H(2,1) = 1 = F_2^2$
- $H(4,2) = 4 = F_3^2$
- $H(6,3) = 9 = F_4^2$
- $H(8,4) = 25 = F_5^2$
- $H(10,5) = 64 = F_6^2$
- $H(30{,}15) = 974169 = F_{16}^2$

Výpis číselných hodnôt Hosoyovho trojuholníka pre riadok s indexom $m = 15$:

Column[Table[H[m, k],{m,30, 30},{k, 0, m}], Center]

{1346269, 832040, 1028458, 953433, 982090, 971144, 975325, 973728, 974338, 974105, 974194, 974160, 974173, 974168, 974170, 974169, 974170, 974168, 974173, 974160, 974194, 974105, 974338, 973728, 975325, 971144, 982090, 953433, 1028458, 832040, 1346269}

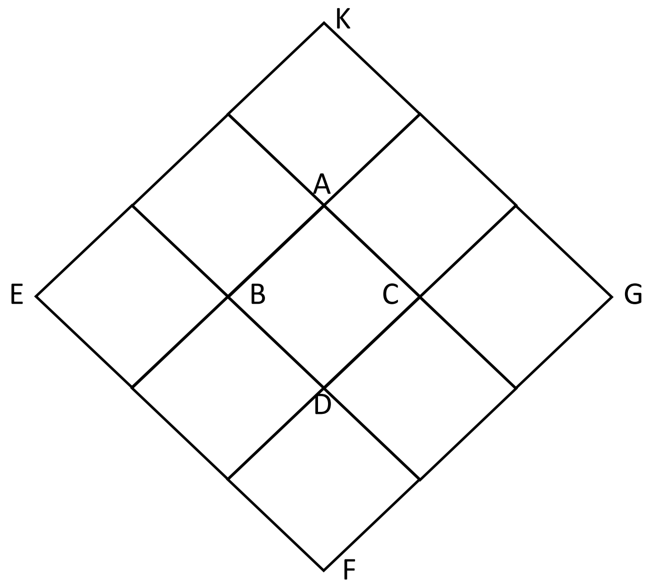
Magický kosoštvorec

Generovanie Hosoyovho trojuholníka začína štyrmi začiatočnými podmienkami, kde každé číslo môžeme považovať za vrchol kosoštvorca s jednotkovou stranou.

V skutočnosti je možné túto úvahu zovšeobecniť, teda použiť pre ktorýkoľvek kosoštvorec s najbližšími vrcholmi, napr.:

$$H(i,k), H(i-1,k-1), H(i-2,k-1), H(i-1,k).$$

Uvažujme (tzv. magický) kosoštvorec (Obr. 6) s vrcholmi *ABCD*.
Ak položíme $\mathrm{i}=6, \mathrm{k}=3$, potom $A=H(4,2)=4$, $B=H(5,2)=6$, $C=H(5,3)=6$, $D=H(6,3)=9$.



***Obr. 6**: Magický kosoštvorec 1. Zdroj:* [15].

Potom dostaneme:

- $F=A+B+C+D=25=H(8,4)=H(i+2,k+1)$
- $K=A+D-B-C=1=H(2,1)=H(i-4,k-2)$
- $E=C+D-A-B=5=H(5,1)=H(i-1,k-2)$
- $G=B+D-A-C=5=H(5,4)=H(i-1,k+1)$

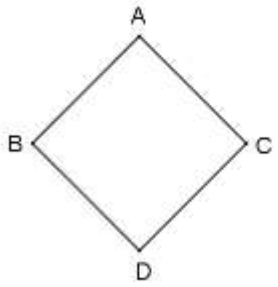
Vo všeobecnosti platia nasledovné vzorce:

$$\boldsymbol{H(m+2,k+1)=H(m,k)+H(m-1,k)+H(m-1,k-1)+H(m-2,k-1)}$$
$$\boldsymbol{H(m-4,k-2)=H(m-2,k-1)+H(m,k)-H(m-1,k-1)-H(m-1,k)}$$
$$\boldsymbol{H(m-1,k-2)=H(m,k)+H(m-1,k)-H(m-1,k-1)-H(m-2,k-1)}$$
$$\boldsymbol{H(m-1,k+1)=H(m-1,k-1)+H(m,k)-H(m-2,k-1)-H(m-1,k)}$$

Zaoberajme sa teraz súčinom hodnôt *A* a *D*, *B* a *C* vo vrcholoch (magického) kosoštvorca (Obr. 7) *ABCD*, kde $A=H(7,4)=15$, $D=H(9,5)=40$, $B=H(8,4)=25$, $C=H(8,5)=24$.

Výpis číselných hodnôt Hosoyovho trojuholníka pre riadok s indexom m= 7, 8, a 9.

Column[Table[H[m, k],{m, 7, 9},{k, 0, m}], Center]
{{{21,13,16,15,15,16,13,21}},
{{34,21,26,24,25,24,26,21,34}},
{{55,34,42,39,40,40,39,42,34,55}}}



***Obr. 7**: Magický kosoštvorec 2. Zdroj:* [15].

Je zrejmé, že

$$15\,.\,40 = 25\,.\,24,$$

teda súčiny hodnôt v protiľahlých vrcholoch kosoštvorca ABCD sa navzájom rovnajú. Tento poznatok môžeme vyjadriť všeobecným vzťahom,

$$H(m,k).\,H(m-2,k-1) = H(m-1,k-1).\,H(m-1,k)$$

alebo v tvare:

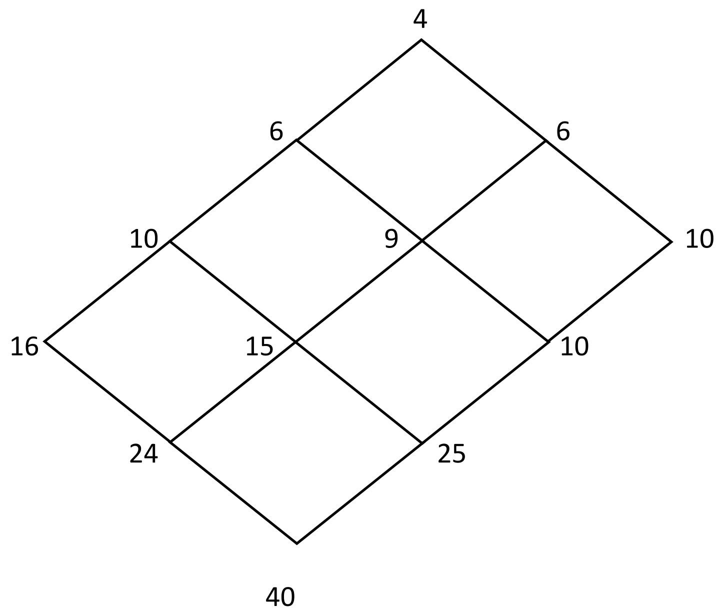
$$\frac{H(m,k)\;H(m-2,k-1)}{H(m-1,k-1)\;H(m-1,k)} = 1$$

Posledný vzťah je možné rozšíriť pre hodnoty vo vrcholoch ľubovoľného rovnobežníka.

Napríklad, nech skupina (pole) rovnobežníkov (Obr. 8) je ohraničená nasledovnými vrcholmi $A = H(4,2) = 4$, $D = H(9,4) = 40$, $B = H(7,2) = 16, C = H(6,4) = 10$.

Potom platí:
$40.4 = 16.10$
25. 6 = 15.10
24. 6 = 16. 9
15 .4 = 10. 6

....

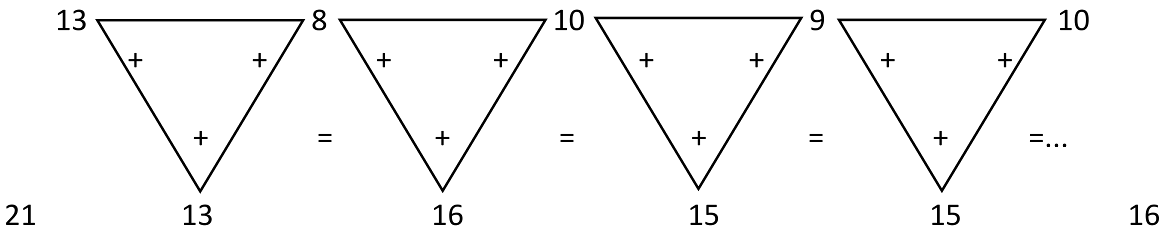


***Obr. 8**: Magický kosoštvorec 3. Zdroj:* [15].

Ostatné súčiny môžu byť overené podobne.

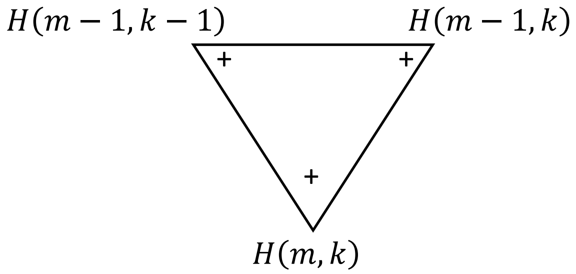
Skupiny trojuholníkov

V ďalšej časti sa sústredíme na skupinu (pole) trojuholníkov, usporiadaných s dvoma vrcholmi v jednom rade a tretím vrcholom smerujúcim nadol (Obr. 9).



Obr.: 9: *Skupina trojuholníkov 1. Zdroj:* [15].

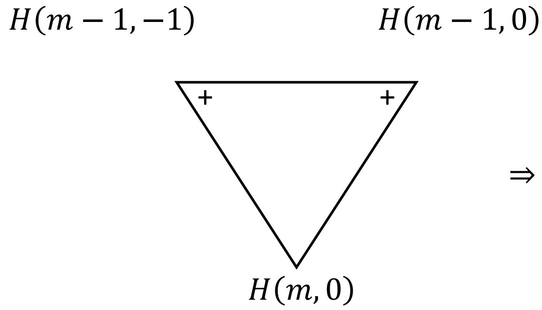
Súčet hodnôt vo vrcholoch v každom trojuholníku sa rovná *34*. Všeobecne označme (Obr. 10):



Obr.: 10. *Zdroj:* [15].

potom platí: $H(m,k)+H(m-1,k-1)+H(m-1,k)$ je konštanta pre každé m.

Hľadajme jej hodnotu, vyjadrenú ako Fibonacciho číslo (Obr. 11). Je zrejmé, že platí:



$$\Rightarrow H(m,0)+H(m-1,0)+H(m-1,-1)= F_{m+1}+F_m=F_{m+2}\,.$$

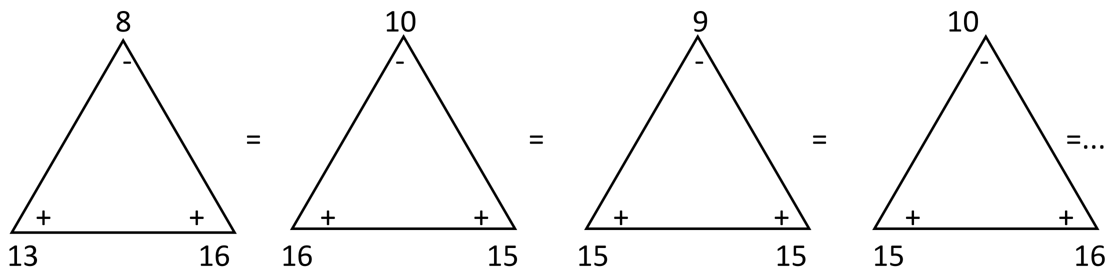
Obr.: 11. *Zdroj:* [15].

Konštanta pre danú skupinu trojuholníkov je teda daná vzťahom:

$$H(m,k)+H(m-1,k-1)+H(m-1,k)=F_{m+2}.$$

Overenie získaných výsledkov: $(13+8+13),(8+13+16),(10+9+15),\ldots=34$, kde $m=7, a\ F_9=34$, čo bolo konštatované.

Teraz zmeníme usporiadanie vrcholov v skupine (v poli) trojuholníkov a to s dvoma vrcholmi v jednom rade a tretím vrcholom smerujúcim nahor (Obr. 12).

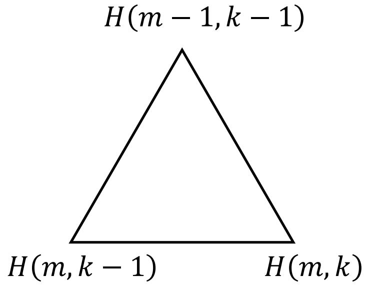


Obr.: 12: *Skupina trojuholníkov 2. Zdroj:* [15].

Nech: $A = H(7,2) = 16,\ B = H(7,3) = 15,\ C = H(6,2) = 10, potom\ A + B - C = 21,$

$$m = 7,\ \ a \quad 21 = F_8 = F_{m+1}.$$

Všeobecne označme (Obr. 13):



Obr.: 13. *Zdroj:* [15].

potom konštantu pre danú skupinu trojuholníkov môžeme vyjadriť:

$$H(m,k) + H(m,k-1) - H(m-1,k-1) = F_{m+1}.$$

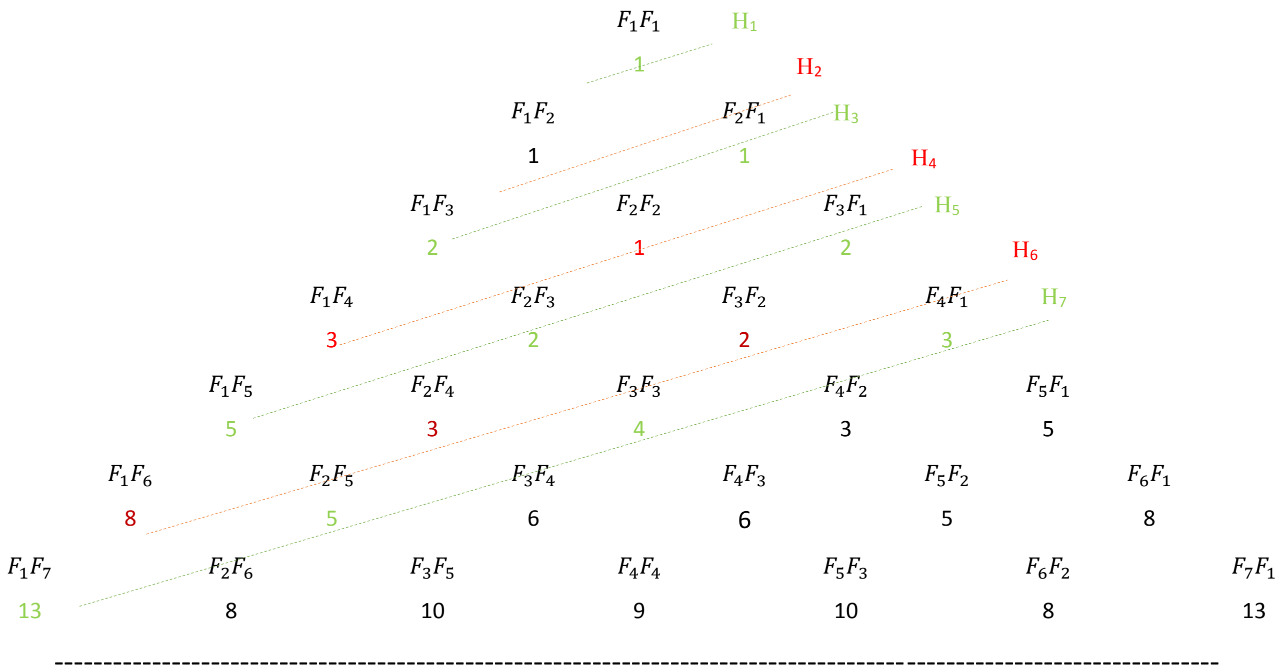
Hosoyov trojuholník nám ponúka skúmať ďalšie rôzne vzťahy medzi jeho prvkami. Pre ilustráciu uveďme aspoň niektoré [15].

Úloha. *Dokážte, že platí:*

$$H(m,k) + H(m-6,k-3) = 2\,F_{m-1},\ \ H(m,k) - H(m-4,k-2) = F_m.$$

Diagonálne súčty Hosoyovho trojuholníka

Na základe vzťahu $\mathrm{H(m,k) = F_{k+1}\,F_{m-k+1}}$ upravíme Hosoyov trojuholník do nasledovného tvaru:



Obr. 14: *Hosoyov trojuholník-tvar súčinov $F_{k+1}\,F_{m-k+1}$. Vlastný obrázok.*

Uvažujme nasledovné diagonálne súčty:

- pre párny index: $H_2 = 1 = F_1F_2$
  $H_4 = 3 + 1 = F_1F_4 + F_2F_2 = 4$
  $H_6 = 8 + 3 + 2 = F_1F_6 + F_2F_4 + F_3F_2 = 13$

$$H_8 = 21 + 8 + 6 + 3 = F_1F_8 + F_2F_6 + F_3F_4 + F_4F_2 = 38$$

Vo všeobecnosti môžeme napísať: $H_n = F_1F_n + F_2F_{n-2} + F_3F_{n-4} + F_4F_{n-6} + \cdots + F_{\frac{n}{2}}F_2$

- pre nepárny index: $H_1 = 1 = F_1F_1$

$$H_3 = 2 + 1 = F_1F_3 + F_2F_1 = 3$$
$$H_5 = 5 + 2 + 2 = F_1F_5 + F_2F_3 + F_3F_1 = 9$$
$$H_7 = 13 + 5 + 4 + 3 = F_1F_7 + F_2F_5 + F_3F_3 + F_4F_1 = 25$$

Vo všeobecnosti môžeme napísať:

$$H_7 = F_1F_n + F_2F_{n-2} + F_3F_{n-4} + F_4F_{n-6} + \cdots + F_{\frac{n+1}{2}}F_1$$

Uvedené všeobecné vzťahy napíšeme podľa [16] v tvare:

$$H_n = F_1F_n + F_2F_{n-2} + F_3F_{n-4} + F_4F_{n-6} + \cdots + F_{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor}F_{n-2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} = \sum_{p=1}^{\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor} F_pF_{n-2(p-1)}\,.$$

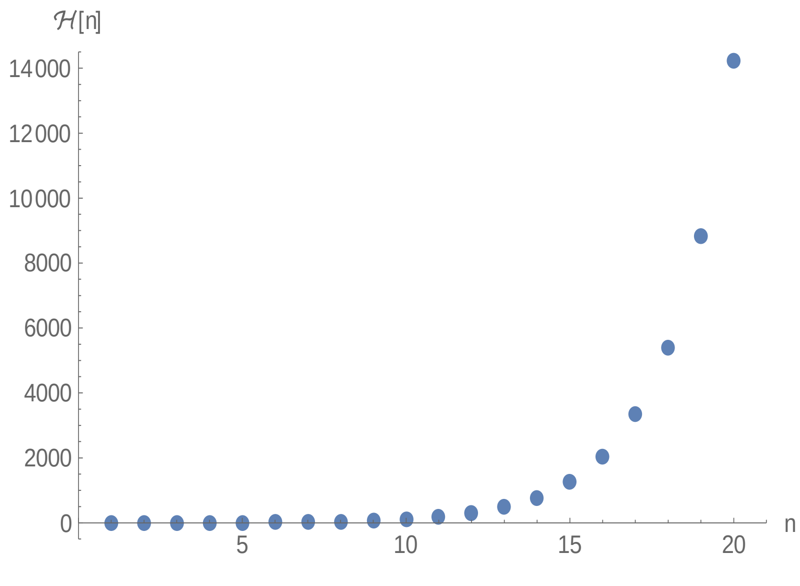
Výpis hodnôt prvých 50 -tich diagonálnych súčtov pomocou softvéru Mathematica:

$$\mathcal{H}[\text{n\_}] := \text{Sum}[\text{Fibonacci}[p]\text{Fibonacci}[n-2(p-1)], \{p, 1, \text{Floor}[\tfrac{n+1}{2}], 1\}].$$

Table[$\mathcal{H}$[n],{n,1,50}]
{1, 1, 3, 4, 9, 13, 25, 38, 68, 106, 182, 288, 483, 771, 1275, 2046, 3355, 5401, 8811, 14212, 23112, 37324, 60580, 97904, 158717, 256621, 415715, 672336, 1088661, 1760997, 2850645, 4611642, 7463884, 12075526, 19541994, 31617520, 51163695, 82781215, 133951675, 216732890, 350695511, 567428401, 918141623, 1485570024, 2403740304, 3889310328, 6293097000, 10182407328, 16475579353, 26657986681}.

Grafické zobrazenie hodnôt prvých 20 -tich diagonálnych súčtov pomocou softvéru Mathematica (Obr. 15).

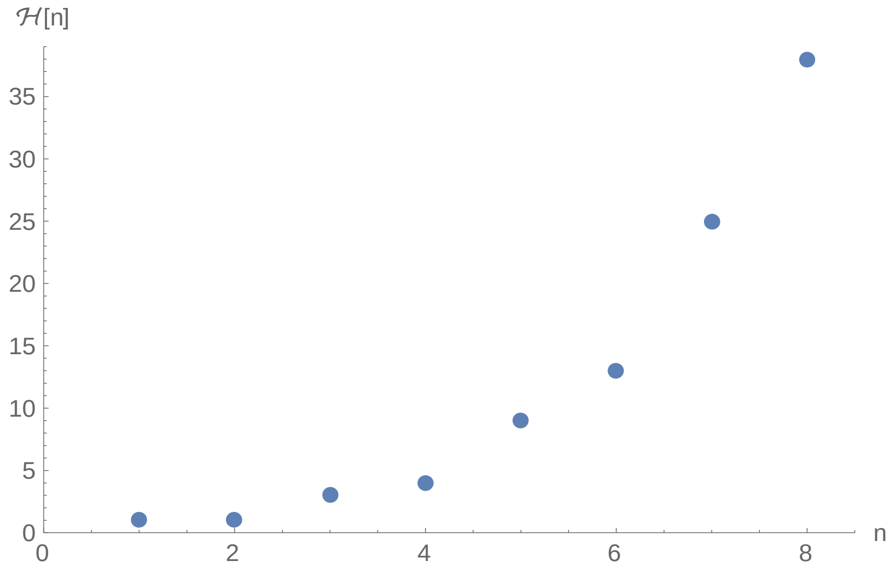
$S = \text{Table}[\mathcal{H}[n], \{n, 1, 20\}]$,
{1,1,3,4,9,13,25,38,68,106,182,288,483,771,1275,2046,3355,5401,8811,14212}
gS=ListPlot[S, PlotStyle->PointSize[0.02], PlotRange->{{0, 21}, {-500, 14500}},Axes->True,AxesOrigin->Automatic, AxesLabel->{"n","$\mathcal{H}$[n]"}].



Obr. 15: *Diagonálne súčty:* $\mathcal{H}[n], \{n, 1, 20\}]$. *Vlastný obrázok.*

Z uvedených výpisov hodnôt diagonálnych súčtov je zrejmé, že hodnoty značne rastú. Pre zjemnenie vizualizácie znázornime prvých 8 diagonálnych súčtov (Obr. 16):

$S = \mathrm{Table}[\mathcal{H}[n], \{n, 1, 8\}]$, $\{1,1,3,4,9,13,25,38\}$,
$\mathrm{gS} = \mathrm{ListPlot}[S, \mathrm{PlotStyle} \to \mathrm{PointSize}[0.02], \mathrm{PlotRange} \to \{\{0, 8.5\}, \{0, 39\}\}, \mathrm{Axes} \to \mathrm{True}, \mathrm{AxesOrigin} \to \mathrm{Automatic}, \mathrm{AxesLabel} \to \{"\mathrm{n}", "\mathcal{H}[\mathrm{n}]"\}]$



Obr. 16: *Diagonálne súčty:* $\mathcal{H}[n], \{n, 1, 8\}]$. *Vlastný obrázok.*

Generujúce funkcie, ako matematický nástroj možno použiť, ak chceme určiť členy postupnosti (konečnej, alebo nekonečnej), ktoré súvisia s riešením nejakej úlohy. Vychádzajúc z tejto všeobecnej myšlienky a použitím daných vzťahov a postupu v [16], dostaneme vzorec pre členy postupnosti $\mathrm{H_n}$:

$$\mathrm{Hn} = \frac{1}{2}\left(F_{n+3} - F_{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-5}{2}\right\rfloor}\right).$$

Napríklad:

$$\mathrm{H}_8 = \frac{1}{2}\left(F_{11} - F_{2\left\lfloor\frac{8}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{3}{2}\right\rfloor}\right) = \frac{1}{2}\,(F_{11} - F_7) = \frac{1}{2}\,(89 - 13) = 38$$

Riadkové súčty Hosoyovho trojuholníka

Tvorivý aspekt matematiky možno spoznať aj pri hľadaní vzťahov pre riadkové súčty Hosoyovho trojuholníka. Označme $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$postupnosť riadkových súčtov, t, j.:

$$1, 2, 5, 10, 20, 38, 71, 130, 235, 420, \ldots..,$$

Kde na obr. 17 je znázornených prvých šesť riadkov. Zápis (zľava do prava) v r-tom riadku sa rovná:

$$F_1\, F_r + F_2 F_{r-1} + F_3 F_{r-2} + \cdots + F_{r-1} F_2 + F_r F_1 = \textstyle\sum_{k=1}^{r} F_k\, F_{r-k+1}.$$

Zo [16], [17] vieme, že r-tý súčet je daný vzťahom:

$$\sum_{k=1}^{r} F_k\, F_{r-k+1} = \frac{1}{5}(r\, F_{r+1} + 2(r+1)\, F_r).$$

Napríklad: nech r=5, potom dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{5} F_k\, F_{5-k+1} = F_1\, F_5 + F_2F_4 + F_3F_3 + F_4F_2 + F_5F_1 \; = 1.5 + 1.3 + 2.2 + 3.1 + 5.1 = 5 + 3 + 4 + 3 + 5$$
$$= 20.$$

$$\tfrac{1}{5}(r\, F_{r+1} + 2(r+1)\, F_r) = \tfrac{1}{5}(5\, F_6 + 2(5+1)\, F_5) = \tfrac{1}{5}(5\,.8\; + 12\,.5) = \tfrac{1}{5}(40\; + 60) = 20.$$

$r_1 = 1$						F_1F_1					
						1					
$r_2 = 2$					F_1F_2		F_2F_1				
					1		1				
$r_3 = 5$				F_1F_3		F_2F_2		F_3F_1			
				2		1		2			
$r_4 = 10$			F_1F_4		F_2F_3		F_3F_2		F_4F_1		
			3		2		2		3		
$r_5 = 20$		F_1F_5		F_2F_4		F_3F_3		F_4F_2		F_5F_1	
		5		3		4		3		5	
$r_6 = 38$	F_1F_6		F_2F_5		F_3F_4		F_4F_3		F_5F_2		F_6F_1
	8		5		6		6		5		8

Obr. 17: *Hosoyov trojuholník-riadkové súčty*. (*Vlastný obrázok)*.

Softvér *Mathematica* použijeme jednak pre výpis hodnôt riadku s vyšším indexom, aj na overenie súčtu daného riadka, napr.: r= 30, (m=29),

Column[Table[H[m,k],{m,29,29},{k,0,m}],Center]
{{{832040, 514229, 635622, 589254, 606965, 600200, 602784, 601797, 602174, 602030, 602085, 602064, 602072, 602069, 602070, 602070, 602069, 602072, 602064, 602085, 602030, 602174, 601797, 602784, 600200, 606965, 589254, 635622, 514229, 832040}}},

$$\textstyle\sum_{k=1}^{30} F_k F_{-k+30+1} = 18394910 = \frac{1}{5}(2(30+1)F_{30} + 30F_{30+1}),$$

pre r=1000, získame nasledovnú hodnotu súčtu:

$$\sum_{k=1}^{1000} F_k F_{1000-k+1} = \frac{1}{5}(2(1000+1)F_{1000} + 1000F_{1000+1}) =$$
$$314700832401343207212167374565229765253831440384274074216746653448813442129861870928661633868802561164836374961177143811816312323782352900077386555325305991937493562727345353224564975614212906260222338711119417 50$$

Záver

Článok poskytuje študentom matematiky (aj učiteľom z praxe) inšpiratívny a pútavý text z veľmi rozsiahlej problematiky, akou je Pascalov trojuholník a jeho súvislosti a vzťahy medzi rôznymi matematickými objektami: Fibonacciho postupnosť, Fibonacciho čísla, Hosoyov trojuholník. Slovenský matematik Štefan Znám sa v práci [18] vyjadril takto *„Fibonacciho čísla sú často „šedou eminenciou“ v pozadí riešenia praktických problémov“*.

Literatúra

[1] Fulier, J.,-Šedivý, O., 2001. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky.* Nitra, UKF Nitra 2001., 270 s., ISBN 80-8050-445-8, (s. 195-196).

[2] Čižmár, J., 2017. *Dejiny matematiky. Od Najstarších čias po súčasnosť.* Prvé vydanie. Bratislava Perfekt 2017., 885 s., ISBN 978-80-8046-829-3, (s. 339-340).

[3] Seibert, J., 2018. *Fibonacciova čísla jako zdroj inspirace pro učitele.* Učitel matematiky. ISSN 1210-9037, 2018, ročník 26, číslo 1, (s. 51-52).

[4] https://mathigon.org/timeline/pingala (2020-05-04).

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Pingala (2020-05-04).

[6] https://wikivisually.com/wiki/Hosoya%27s_triangle (2020-05-22).

[7] Anglin, W., S., 1994. *Mathematics: A Concise History and Philosophy.* Springer-Verlag New York Inc. ISBN 0-387-94280-7, (s. 170).

[8] https://www.lehigh.edu/~gi02/math163/inductnotes.pdf (s. 10-11, 2020-05-26).

[9] Moser, B., A., 2018. *A Novel Fibonacci Pattern in Pascal´s Triangle.* (s. 1-4).
Dostupné na: https://arxiv.org/pdf/1811.02085v1.pdf (2020-06-04).

[10] Moser, B., A., 2014. *On a Multisection Style Binomial Summation Identity for Fibonacci Numbers.* Int. J. Contemp. Math. Sciences (IJCMS), vol. 9, no 4, s. 175-186.

[11] Halton, J., H., 1964. *On Fibonacci residues*. Fibonacci Quarterly, 1964, 2(3), s. 217-218.

[12] Posamentier, A., S., Lehmann, I., 2007. *The fabulous Fibonacci numbers*. Published 2007 by Prometheus Books New Your. ISBN 978-1-59102-475-0, (s.95-97).

[13] Jarošová, M., 2010. *Fibonacciho čísla a jejich aplikace.* Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Disertační práce. 2010. (s. 230-232).

[14] Pickover, A., C., 2012. *Matematická kniha.* Prvé vydanie v českom jazyku. Praha. Dokořán, Praha 5, 2012. 542. ISBN 978-80-7363-368-4 (Dokořán). ISBN 978-80-257-0705-0 (Argo).

[15] Koshy, T., 2001. *Fibonacci and Lucas numbers with application.* NewYork. John Wiley and Sons. 2001, 674s., ISBN 0-471-39969-8, (s. 187-195).

[16] Griffiths, M., 2011. *Fibonacci diagonalis.* The Fibonacci Quarterly, **49.1** (2011), s. 51-55.
Dostupné na: https://www.fq.math.ca/Papers1/49-1/GriffithsM.pdf (2020-06-08).

[17] Griffiths, M., 2010. *Digit Proportions in Zeckendorf Representations.* The Fibonacci Quarterly, Volume **48** (2010), Number 2, May 2010, s. 174.
Dostupné na: https://www.fq.math.ca/Papers1/48-2/Griffiths.pdf (2020-07-29).

[18] Znám, Š., 1986. *Teória čísel.* 2. vydanie. Bratislava: Alfa, 1986. 206s., (s. 141).

[19] Strečko, V., *Fragmenty z matematiky stredoveku.* Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 89 (2014), No. 2, s. 27-28. http://dml.cz/dmlcz/146574

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 6, No. 2, p. 18 – 23
ISSN 2453-6083

Bádateľská aktivita vo vyučovaní geometrie na základnej škole a postrehy učiteľov k danej aktivite

Inquiry-based Activity in Geometry at Lower Secondary School and Teachers´ Opinions of the Activity

Lucia Rumanová [a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 01 Nitra, Slovakia*

Received September 30, 2020; received in revised form October 7, 2020; accepted October 14, 2020

Abstract

In this article we focused on inquiry-based learning and its use in mathematical education. Inquiry-based learning can also be applied in a broader, multidisciplinary context. Teacher presents the problem and the pupil finds the answers by inquiry activity. We describe a specific problem of geometry at lower secondary school, which is related to the spatial imagination of pupils. We specify particular activity appropriate to the age of the child, which we have included in the educational process. We use guided inquiry and group work of students on a given problem. Inquiry activity was also realized in school practice. Therefore, we also present specific observations and opinions of mathematics teachers at lower secondary school.

Keywords: inquiry-based geometry learning, inquiry activity, educational process, projection, teachers´ opinions.

Classification: 97C80

Úvod

Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky je vhodná vyučovacia metóda pre žiakov na základnej školy, pretože môže posilniť záujmy žiakov o nie veľmi obľúbené vyučovanie geometrie a taktiež implementovať do vyučovacieho procesu samotnú aktivitu žiakov. A preto je možné touto metódou žiakom pomôcť k aktívnemu získavaniu vedomostí a poznatkov, taktiež podporiť spoluprácu a komunikáciu so spolužiakmi, ale aj s učiteľom, rovnako podporiť ich vyjadrovanie a prezentovanie sa.

Je všeobecne známe, že žiaci na rôznych stupňoch vzdelávania majú nedostatočnú priestorovú predstavivosť. Žiaci na základnej škole neovládajú v dostatočnej miere základné princípy, pojmy a vlastnosti zobrazovania rovinných a priestorových geometrických útvarov do roviny. V rámci vyučovacieho procesu pracujú s priemetom kocky ako s telesom.

V článku venujeme zobrazovaniu rovinných a priestorových geometrických útvarov do roviny s využitím bádateľsky orientovaného vyučovania.

*Corresponding author: lrumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2020.6.2.18-23

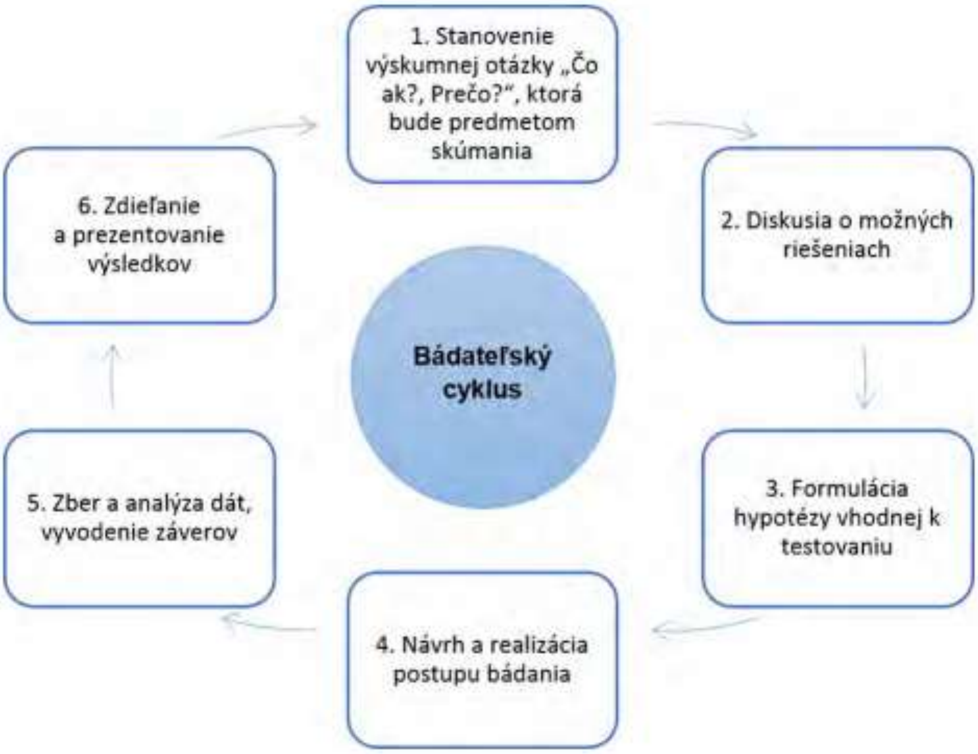
Uvedieme ukážky konkrétnych bádateľských aktivít súvisiacich s danou témou. Taktiež uvedieme názory a postrehy učiteľov matematiky na popísané aktivity, ktoré získali z ich vyučovacieho procesu na rôznych základných školách na Slovensku.

Bádateľky orientované vyučovanie

Pojem bádanie je v súčasnej dobe veľmi používané slovo v prírodovednom vzdelávaní, pričom je to ekvivalentný pojem k pojmom ako skúmanie alebo aj objavovanie. Základným vyučovacím modelom bádania je konštruktivistický prístup. To znamená, že si žiak poznatky konštruuje na základe vlastných skúseností v rámci samostatnej jeho aktívnej činnosti.

Všetky bádateľsky orientované aktivity by mali obsahovať problém alebo otázku, ktorú musí žiak svojou aktivitou riešiť, následne uviesť postup tohto riešenia, zozbiera a potom analyzuje dáta, pomocou ktorých odpovie na zadanú otázku, resp. vysvetlí zadaní problém.

Ak žiakovi zadáme bádateľskú aktivitu, tak v procese bádania kladie otázky, využíva vhodné argumentovanie v rámci vysvetľovania alebo zdôvodňovania objavených zistení. Realizácia bádateľských aktivít zahŕňa rôzne činnosti od formulácie problému, cez návrh a realizáciu postupu riešenia, zbieranie údajov pri experimentovaní alebo modelovaní a ich analýzu a vyhodnocovanie, interpretáciu výsledkov, formulovanie záverov a zdôvodňovanie objavených zistení (Lukáč a kol., 2016). Autor Llewellyn (2002) uvádza šesťstupňový model bádania (viď Obr. 1).



Obr. 1: Schématicky znázornení bádateľský cyklus (Llewellyn, 2002, In: Lukáč a kol., 2016)

Úrovňami bádania sa zaoberali rôzny autori (napríklad Schwab, 1962; Herron, 1971; Banchi, Bell, 2008). V Tabuľke 1 uvedieme úrovne bádania na základe počtu vopred poskytnutých informácií žiakovi (Bell et al., 2005).

***Tabuľka 1**: Úrovne bádania (Bell et al, 2005)*

Úroveň bádania	**Otázka (problém)?**	**Metódy riešenia?**	**Výsledok (záver)?**
Potvrdzujúce bádanie (Confirmation inquiry) Žiaci potvrdzujú platnosť nejakého zákona (poznatku, súvislosti) v aktivite, ktorej výsledok už poznajú.	✓	✓	✓
Štruktúrované bádanie (Structured inquiry) Žiaci riešia problém sformulovaný učiteľom na základe pripraveného postupu.	✓	✓	✓
Riadené bádanie (Guided inquiry) Žiaci riešia problém sformulovaný učiteľom na základe postupu, ktorý sami navrhnú.	✓		
Otvorené bádanie (Open inquiry) Žiaci riešia problém, ktorý samostatne sformulujú na základe postupu, ktorý sami navrhnú.			

Bádateľská aktivita vo vyučovaní geometrie na základnej škole

Pre žiakov 7. ročníka základnej školy sme navrhli aktivitu, ktorá súvisí so zobrazovaním priestoru do roviny. Daná téma patrí do oblasti Geometria a meranie, do tematického celku „Voľné rovnobežné premietanie“.

Požiadavkami na vstupné vedomosti a zručnosti pre žiakov sú:

- rozlišovať, pomenovať rovinné a priestorové útvary,
- mať osvojené základné pravidlá rysovania a vedieť používať pomôcky na rysovanie,
- ovládať základy práce s geometrickým softvérom GeoGebra.

Žiakom osvojované vedomosti a zručnosti sú:

- osvojiť si pojem rovnobežného premietania, vrátane pojmov priemetňa, smer premietania, priemet útvaru,
- pochopiť základné vlastnosti rovnobežného premietania,
- na základe vlastností rovnobežného premietania vedieť zobraziť rôzne geometrické útvary do roviny.

Žiakom rozvíjané spôsobilosti sú:

- predpovedať výsledky modelu,
- zaznamenať výsledky,

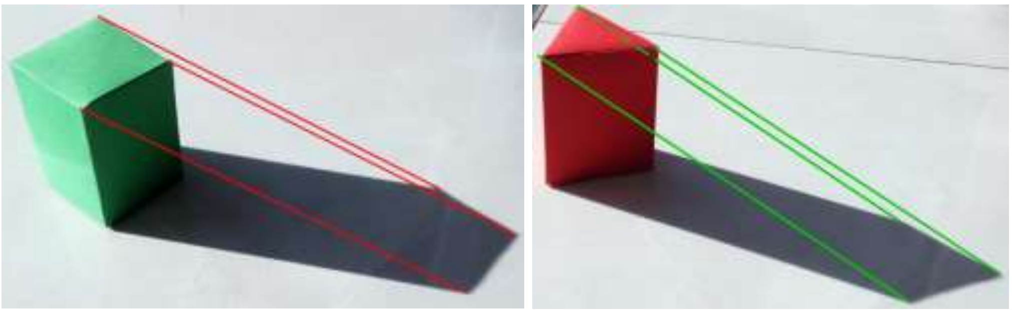
- zdieľať a prezentovať výsledky pred spolužiakmi,
- formulovať závery.

Zvolili sme nasledujúci priebeh vyučovacej hodiny:

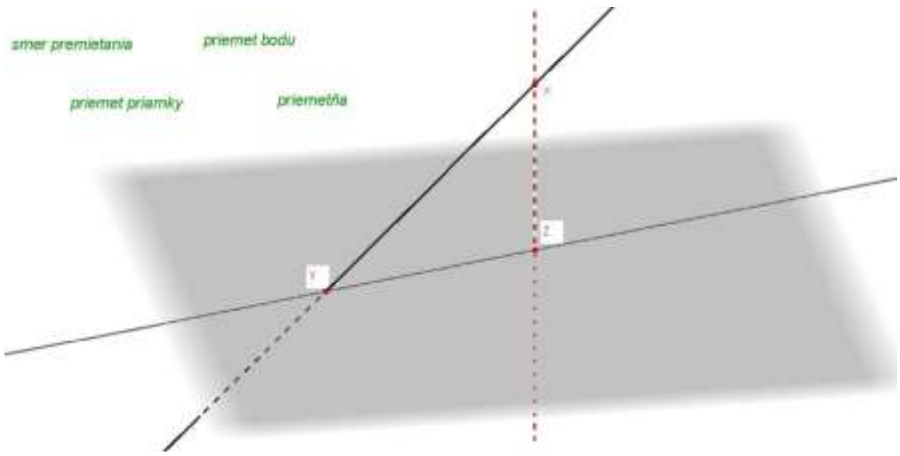
1. Podnet a motivácia (utvrdenie si základných pojmov súvisiacich s rovnobežným premietaním)
2. Spoločné plánovanie (plán riešenia projektu, skupinová práca žiakov)
3. Realizácia a prezentácia výsledkov (práca žiakov v skupinách, prezentácia žiackych zistení spojená s diskusiou)
4. Hodnotenie výsledkov

Podnet a motivácia

Na začiatku vyučovacej hodiny sme vzbudili záujem žiakov o rovnobežné premietanie pomocou obrázkov, úloh a otázok, ktoré sme uviedli v pracovnom liste (viď Obr. 2, 3).



Obr. 2: *Zadanie úlohy: Pozrite sa na dané obrázky a popíšte, čo na nich vidíte.*



Obr. 3: *Priraďte k jednotlivým útvarom správne pomenovanie. Diskutujte o nich a pracujte s interaktívnou konštrukciou v GeoGebre.*

Spoločné plánovanie

Žiakov sme po diskusii rozdelili do skupín a zadali sme im problémové úlohy na bádanie:

1. Opíšte úsečku, ktorej priemetom v rovnobežnom premietaní je jeden bod. Existuje viacej možností?

2. Zistite, aký geometrický útvar môže byť priemetom dvoch rovnobežných priamok v rovnobežnom premietaní. Tieto priamky sú rôznobežné s priemetňou a premietame ich kolmo do priemetne (t. j. smer premietania vzhľadom na priemetňu je kolmý).
3. Aký geometrický útvar môže byť priemetom trojuholníka v rovnobežnom premietaní, ak smer premietania je rôznobežný s priemetňou?

Každá skupina si premyslela plán riešenia projektu, pričom sme odporučili žiakom aj manipulatívnu činnosť s rôznymi dostupnými rysovacími a písacími pomôckami, ale aj geometrický program GeoGebra. Svoje zistenia žiaci budú prezentovať v závere vyučovacej hodiny. Taktiež sme vysvetlili žiakom aj spôsob hodnotenia projektu (splnenie úloh, správnosť úvahy, tvorivosť, prezentácia výsledkov), pričom hodnotenie bude formatívne a získané žiacke výsledky budú slovne hodnotené pri zverejnení a obhajobe riešenia daných problémových úloh jednotlivými skupinami žiakov v závere vyučovacej hodiny.

Realizácia a prezentácia výsledkov

Projekt žiaci riešili jednu vyučovaciu hodinu, pričom učiteľ je v pozícii konzultanta a pomáha žiakom len v prípade nutnosti. Na prácu v skupinách mali žiaci cca. 25 minút vrátane prípravy stručnej záverečnej prezentácie. Vedúci skupiny tiež môže vo svojej prezentácii zhodnotiť čo sa im na projekte podarilo dosiahnuť, s čím mali prípadné problémy a ako sa im pracovalo v skupine.

Po každej prezentácii skupiny nasledujú otázky od žiakov z ostatných skupín, ktoré súvisia s prezentovanými zisteniami danej skupiny. Takýto postup sa zopakuje pre všetky skupiny žiakov.

Hodnotenie výsledkov

V závere hodiny sme stručne analyzovali aj získané a prezentované žiacke riešenia, pričom sme zdôraznili v rámci formatívneho hodnotenia ich prácu na vyučovacej hodine, nakoľko riešená problematika je náročná pre žiakov základných škôl.

Správne odpovede na zadané problémové úlohy sme taktiež žiakom stručne zopakovali, a tým aj zosumarizovali objavené zistenia. Učiteľ môže v tejto fáze využiť aj pripravenú prezentáciu s prehľadnými výsledkami a správnym riešením daných problémov. Taktiež môže učiteľ využiť program GeoGebra na zobrazenie geometrických útvarov v priemetni.

Postrehy a návrhy učiteľov matematiky k realizovanej aktivite so žiakmi

Uvedenú bádateľskú aktivitu v pedagogickej praxi realizovalo 17 učiteľov matematiky z rôznych základných škôl na Slovensku. Konštatovali, že bola zaujímavá pre žiakov, ale náročná pre žiakov 7. ročníka a odporúčali by ju riešiť so žiakmi na dvoch vyučovacích hodinách matematiky. Ale určite by ju žiakom opätovne zaradili do vyučovacieho procesu, lebo naformulovaný problém je z didaktického hľadiska zmysluplný. Taktiež uviedli, že náročnosť problematiky je závislá aj od úrovne priestorovej predstavivosti žiakov.

Uvádzame ďalšie návrhy učiteľov na zlepšenie popísanej bádateľskej aktivity:

- *„...pre učiteľa nie je téma náročná, možno zvoliť vhodný spôsob ako vysvetliť žiakom zobrazenie geometrických útvarov do roviny, ja som zvolila taký spôsob, že som žiakom toto zobrazenie priblížila tak, že som na útvar zasvietila baterkou a tieň sa zobrazil na tabuľu...“*,

- *„...v rámci jednej vyučovacej hodiny som žiakom vysvetlila pojmy ako je priemetňa, smer premietania, priemet a na druhej vyučovacej hodiny už práca na aktivite bola výrazne lepšia...“,*
- *„...žiaci veľmi málo rysujú, čo sa prejavuje nielen na estetike, ale hlavne v chybovosti narysovaného objektu, preto treba viacej času venovať aj náčrtom a rysovaniu na hodinách geometrie...“,*
- *„...niektoré skupinky najskôr nevedeli čo majú robiť, resp. ako majú začať, no keď som im povedala, že si to môžu aj namodelovať - pomocou ceruzky alebo pera a svetla - lampáša, s radosťou sa pustili do práce a myslím, že zvládli vyriešiť úlohy super...“,*
- *„...motiváciou pre žiakov bolo na úvod prezentovanie perspektívy vo výtvarnom umení, teoretický základ tvorili následne základné spôsoby zobrazovania rovinných a geometrických útvarov; zadania uvedených problémov spracovávali jednotlivo alebo vo dvojiciach (formu si zvolili sami žiaci) a následne spolužiakom prezentovali svoje výsledky; na zlepšenie priestorovej orientácie som žiakom modelovala situácie v zadaní úloh aj pomocou programu GeoGebra“.*

Záver

Bádateľsky orientované vyučovanie s podporou aj moderných digitálnych technológií podporuje experimentálnu činnosť žiakov. Vhodne pripravená bádateľská aktivita je vhodná pre rôzne stupne vzdelávania a môže mať výrazní pozitívny efekt na zlepšenie konceptuálneho porozumenia učiva žiakmi v rôznych prírodovedných predmetoch ako dôsledok aktívnej práce v bádateľskom procese.

Poďakovanie

Článok vznikol v rámci projektu KEGA 019UKF-4/2020 s názvom „*Podnetné didaktické postupy vo vyučovaní zobrazovacích metód v sekundárnom matematickom vzdelávaní s ohľadom na požiadavky spoločnosti a praxe*“.

Literatúra

Banchi, H., Bell, R. 2008. The many levels of inquiry. In Science and children. ISSN: 00368148, 2008, 46, 2, 26-29.

Bell, G. G. 2005. Clusters, networks, and firm innovativeness. In Strategic management journal. ISSN: 01432095, 2005, 26, 3, 287-295.

Herron, M. D. 1971. The nature of scientific enquiry. In The school review. ISSN: 00366773, 79, 1971, 2, 171-212.

Llewellyn, D. 2002. Inquire Within: Implementing Inquiry-Bases Science Standards. Corwin Press, 2002. 258 s. ISBN 978-1-4522-4445-7.

Lukáč, S. a kol. 2016. Bádateľsky orientované vyučovanie matematiky a informatiky na stredných školách. 1. vydanie. Košice : Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, 2016. 220 s. ISBN 978-80- 8152-471-4.

Schwab, J. J., Brandwein, P. F. 1962. The teaching of science as enquiry. Harvard University Press, 1962. 152 s. ISBN 978-0674870468.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 6, No. 2, p. 24 – 33
ISSN 2453-6083

Výskyt osovej súmernosti v hudobnom prostredí
Using of Axial Symmetry in the Musical Materials

Katarína Laššová[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received October 8, 2020; received in revised form October 14, 2020; accepted October 16, 2020

Abstract

In this article, we deal with readable attention to the non-typical confrontation of learning processing axial symmetry and musical materials. We present non-traditional forms of using interdisciplinary relations between practical examples and geometric problems. Given tasks have musical character, but its solves the sample problem of axial symmetry. We also present some problems in worksheet which related to interdisciplinary relations for the students. The worksheet includes some other musical and mathematical examples about the axial symmetry. In the worksheet, the pupils have an opportunity to mark their feelings. We describe our findings, pupils' solutions of the tasks, as well as their opinions of the interdisciplinary.

Keywords: educational process, geometry, axial symmetry, musical materials, interdisciplinary relations, worksheet.

Classification: U60, D30

Úvod

„Matematika a hudba sú nezávislé. Sú hudobne hluchí ľudia neschopní zaspievať pieseň. Viem si predstaviť aj matematicky hluchých ľudí. Pravda, hudba je druh umenia a umenie hrá svoju úlohu v živote človeka. A matematik je tiež človek. Opačne, pri vplyve matematiky si zvykneme pomôcť frázou, že matematika učí správne myslieť. Lenže človek môže dobre myslieť aj bez matematických vzorcov.“
(Riečan, 2018 in Košťálová, 2018)

Čo môže hudba znamenať pre matematikov? Čím môže matematika zaujať hudobníkov? Má zmysel, aby hudobník mal základné matematické vedomosti? Majú zhodné zobrazenia nejaký zmysel pri stavbe hudobných nástrojov, či pri komponovaní prekrásnych hudobných skladieb? Takéto a aj podobné otázky môžeme často počúvať od žiakov, vynikajúcich umelcov aj vedcov. Poznáme odpovede na dané pochybnosti? Sme si vedomí zlúčiteľnosti, resp. nezlúčiteľnosti dvoch disciplín na prvý pohľad tak odlišných? Skúsme postupne uviesť odpovede na tieto otázky v našom článku.

Muzikológia, teda hudobná veda, je v celku skutočne postavená na určitých matematických princípoch. Na prvý pohľad sa však nemusí celkom zdať, že by hudba mala mať niečo spoločné práve s matematikou. Istý odborník, majster husliar, však metaforicky obrazne tvrdí, že *„Hudba je len jeden odbor matematiky.“* (Novák, 2018 in Košťálová, 2018) Už tu sa javí akoby

[*]Corresponding author: katarina.lassova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2020.6.2.24-33

hudba mala svoj piedestál teda pevne zakorenený nie len v srdci človeka, ako si snáď prirodzene predstavujeme, ale i v samotnej matematike.

Úvodným slovom prof. Beloslava Riečana však prichádzame k myšlienke, že hudba a matematika sú nezávislé. Hoci potvrdzujeme ideu tohto uznávaného významného slovenského matematika, hľadáme zhodné zobrazenia i v hudobných dielach, hudobných nástrojoch, či iných hudobných ukazoch. Je však už na pohľad zrejmé, že hoci samotná notografia obsahuje množstvo vlastných pravidiel zápisu nôt a iných príbuzných znakov, v skutočnosti nejeden notografický znak v sebe ukrýva osovú súmernosť. Objavujú sa i skladby u Paganiniho, Mozarta, Schneider-Trnavského, Czerneho, Beethovena, Bacha, Duvernoya a iných velikánov, ktoré sú nositeľmi konkrétneho zhodného zobrazenia. Dokonca i sám profesor Riečan ako kantor a vášnivý organista sa určitý čas venoval problematike prepájaniu hudby a matematiky. Výsledkom tejto jeho snahy bolo práve vydanie knihy Matematika a hudba (Riečan – Berger, 1997) a tiež to, že bol jedným z usporiadateľov Medzinárodného interdisciplinárneho seminára Matematika, hudba a umenie.

Hudba verzus matematika

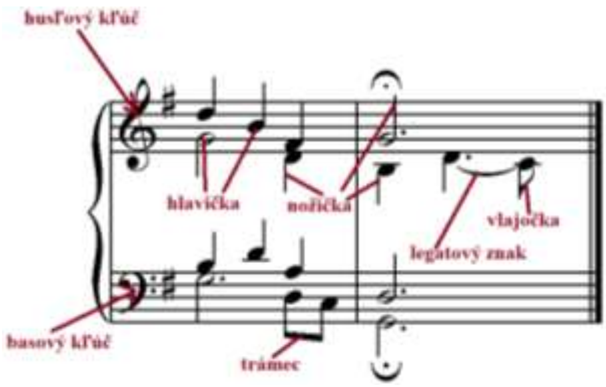
Pre správne nazeranie na problematiku interakcie matematiky a hudby môžeme vnímať i fakt, že ľudia zväčša majú peknú hudbu skutočne radi. A taktiež naopak, hudobníci si možno ani nie vždy uvedomujú, koľko matematiky sa môže nachádzať v samotnej hudbe, v zápise nôt, v stavbe nástrojov či v hraných a počutých zvukoch.

V článku sa však sústredíme na to, ako skladatelia tvorili potrebné hudobné zápisy odhliadnuc od akýchkoľvek ich znalostí matematických vzťahov. Taktiež uvedieme notografické prvky, ktorých jednoznačný tvar sa však postupne ustálil a nejeden znak, či skupina znakov sú tvorené vybraným zhodným zobrazením.

Danou problematikou sme sa zaoberali v našej bakalárskej (Košťálová, 2018) a diplomovej práci (Laššová, 2020).

Hudobné názvoslovie

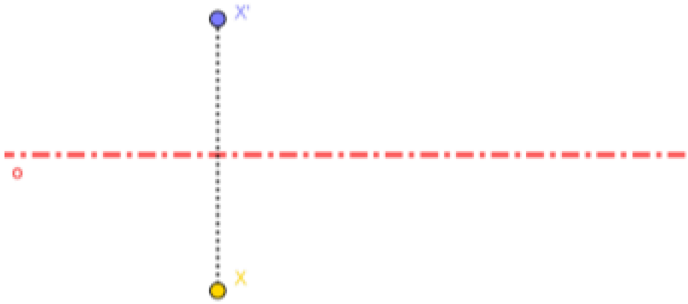
Pre lepšie pochopenie hudobnej problematiky v skratke názorne objasňujeme vybrané hudobné pojmy, ktorých poznanie je nutné k správnemu vnímaniu danej problematiky. Názvoslovie použité na Obr.1 sme prebrali z literatúry (Cmíral, 1967).



Obr. 1 Hudobné pojmy

Osová súmernosť

Venujme sa teda zhodnému zobrazeniu – osovej súmernosti, s ktorým sa stretávajú deti už v predškolskom veku. Vieme, že osová súmernosť je zhodné zobrazenie v rovine dané osou o alebo dvoma bodmi, vzorom a obrazom. Takéto vyjadrenie označujeme ako $S_{(o)}: X \to X'$, pričom X je vzor a X' je jeho obraz a zobrazujeme tak ako je uvedené na Obr. 2. Autor *(*Šedivý 1978) uvádza však i jasnú definíciu. „*Nech je daná priamka o. Každému bodu $X \in \pi$ priradíme bod $X' \in \pi$ tak, aby $XX' \perp o$, $XX' \cap o = X_0$, vzdialenosť bodu $X \in \overleftrightarrow{XX'}$ od priamky o nech sa rovná vzdialenosti bodu $X' \in \overleftrightarrow{XX'}$ od priamky o. $|XX_O| = |X'X_O|$, $\overrightarrow{X_0X}$, $\overrightarrow{X_0X'}$ sú opačné polpriamky. Takto definované zobrazenie nazývame osová súmernosť a priamku o osou súmernosti.*“ *(*Šedivý 1978)



Obr. 2 Zobrazenie body X v osovej súmernosti

Ukážky výskytu osovej súmernosti v hudbe

Jeden zo základných príkladov výskytu osovej súmernosti je stavba C-kľúču. Vidíme, že táto hudobnícka grafická značka zapisujúca sa na začiatku hudobného riadka určujúca polohu tónu c^1 (Obr. 3) pripomína istý matematický geometrický útvar. Môžeme tvrdiť, že v prípade, že os súmernosti o narysujeme horizontálne je tento hudobný symbol osovo súmerný.

Obr. 3 Altový kľúč

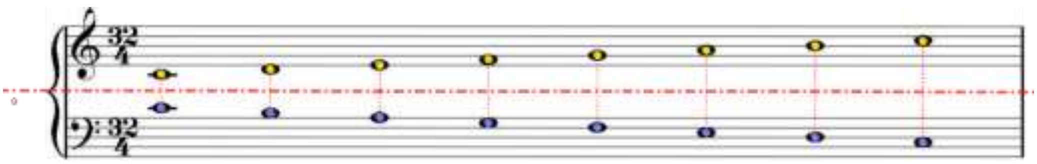
S iným prípadom osovej súmernosti sa stretávajú i klaviristi. Práve klaviatúra v sebe obsahuje významnú osovú súmernosť, ktorá je tak významná i samotnej klavírnej hre. Z prirodzenej hrdosti hudobníkov však často vyplýva i podstatný fakt pojednávajúci o len nepatrne letmej až priam badateľnej prítomnosti matematiky v akomkoľvek hudobnom prostredí. Mnohokrát sa však stáva, že existencia a silný výskyt matematiky ako takej je v hudbe, v hudobnom prostredí či v stavbe hudobných nástrojoch intenzívna a enormne zlomová. Všimnime si napríklad už spomínanú všetkým známu klaviatúru. Vnímajme, ako pri vhodnom uložení osi o zasadenej na kláves hrajúci tón d^1 môžeme s jasnosťou tvrdiť, že klaviatúra je vo svojej podstate osovo súmerná (Obr. 4). Týka sa to teda pohľadu na čierne klávesy v závislosti od bielych kláves. Hoci klavír takto osovo súmerne stavaný nie je, správne vybranú časť klaviatúry považovať za osovo súmernú môžeme, ba dokonca rôzne vybrané pasáže, stupnice, protipohyby či techniky v klavírnej hre využívajú práve túto vlastnosť a často im k tomu napomáha i osovo súmerné aplikovanie prstokladu.

Obr. 4 Klaviatúra

Osová súmernosť v stavbe hudobných nástrojoch je využívaná i v remesle zaoberajúcom sa výrobou a opravou sláčikových hudobných nástrojov, teda v husliarstve. Husliari pri zhotovení základnej dosky huslí (Obr. 5) pracujú práve s týmto čisto matematickým zhodným zobrazením. Nasledujúca ukážka (Obr. 6) pojednáva práve o tom, ako nesmierne dôležité v procese výroby huslí je presné rysovanie, mimoriadne spoľahlivé meranie a tiež bezchybná práca pri rezbárskej úprave samotného dreva.

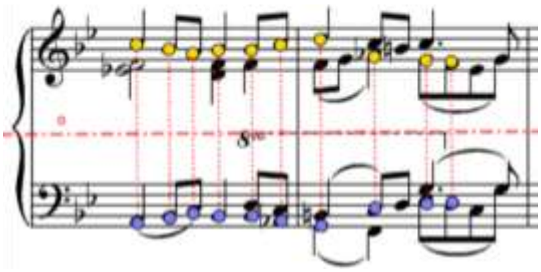
Obr. 5 Základná doska Obr. 6 Husle - stav výroby

Klavíristi počas hry na klavíri často znenazdajky využívajú tiež osovú súmernosť, ktorú vieme však zapísať i do notovej osnovy. Spôsob hry, v ktorej nachádzame samotnú osovú súmernosť my, hudobníci, nazývame odborne stupnicovým protipohybom. Tento špeciálne matematický výjav vzniká práve pre prípad protipohybu počnúc tónom c^1 pre obe ruky. Z pohľadu geometrie (Obr. 7) vidieť zreteľne osovú súmernosť medzi notami pravej a ľavej ruky.



Obr. 7 Protipohyb

Aby sme však neostali len pri akýchsi teoretických základoch mysliac si, že len tie využívajú osovú súmernosť, pozrime sa aj hlbšie na konkrétne diela a ukážky majstrov muzikantov a skladateľov, ktorí možno vedome, možno i nevedome využívali vo svojej tvorbe osovú súmernosť. Hoci sa táto myšlienka zdá byť pre nás, matematikov, čisto matematický spôsob komponovania hudobných skladieb, s pokorou prijmime stratégiu tvorby hudobníkov a priznajme, že hudobníci v tomto prípade riešia práve už spomínaný protipohyb. Istý velikán, Mikuláš Schneider-Trnavský, protipohyb tiež vo svojej tvorbe využíval. Nachádzame ho v jeho viacerých skladbách. Za jednu vhodnú názornú ukážku môžeme považovať i pieseň *Hľa, otvára sa brána nebies (*Schneider-Trnavský, 1986), *viď Obr.8*. Všimnime si zobrazený 5. a 6. takt, kde protipohyb, resp. osovo súmerné hlavičky nôt sú vyznačené farebne. Sledujme i to, ako blízko k sebe majú tieto dve záležitosti – hudobná v pojme protipohyb a matematická v idei osovej súmernosti.



Obr. 8 Ukážka zo skladby s názvom „Hľa, otvára sa brána nebies"

Tvorba pracovného listu k danej problematike

Príkladov, v ktorých sa osová súmernosť ponúka hudobníkom ako nevyhnutná pomôcka pri akejkoľvej hudobnej činnosti, by sme vedeli nájsť niekoľko. Uvedomujúc si však nedostatok vedomostí o danej problematike u žiakov stredných škôl sme sa rozhodli zostaviť pracovný list a tým dať žiakom na vedomie možnosť využitia osovej súmernosti nie len v bežných geometrických útvaroch vyskytujúcich sa v učebniciach matematiky, ale i v nečakaných oblastiach života, akou je napríklad i hudba.

Ako ukážku zaradenia možných príkladov prelínajúcich hudbu zhodné zobrazenia sme v rámci našej bakalárskej práce (Košťálová, 2018) vytvorili pracovný list, ktorí sme dali vyplniť 22 žiakom Gymnázia sv. Cyrila a Metoda v Nitre, 6 žiakom z Gymnázia Janka Jesenského v Bánovciach nad Bebravou, 2 žiakom z Gymnázia Františka Švantnera v Novej Bani a 4 študentkám z UKF v Nitre (pozn. ďalej už len „žiaci“). Na vypracovanie všetkých 7 úloh mali všetci 45 minút, niektorí potrebovali ešte aj 15 minút z prestávky.

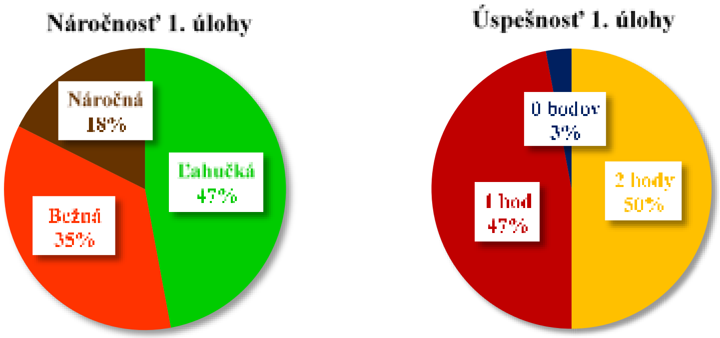
Našim cieľom v predloženom článku nie je predviesť, zhodnotiť, prípadne analyzovať celý pracovný list. Sústredíme sa len na vybrané úlohy a ich analýzy, ktoré sa týkajú práve popísanej osovej súmernosti.

Prvá úloha v pracovnom liste mala nasledujúce znenie. *„Na nasledujúcom obrázku vidíš jeden takt s notami, kde však noty v druhom riadku, t. j. pre ľavú ruku, chýbajú. Preto do notovej osnovy zakresli noty, ktoré získaš osovou súmernosťou s osou o_1, o_2, čo budú tie chýbajúce noty pre ľavú ruku.“* (Košťálová, 2018)

Žiaci mali k dispozícii obrázok s chýbajúcimi notami a tiež priestor na ich hodnotenie náročnosti a obťažnosti danej úlohy. Pod úlohy sme taktiež my zapisovali ich úspech/neúspech alebo nedoriešený príklad (Obr. 9).

Obr. 9 Zadanie prvej úlohy

Po analýze danej úlohy sme vytvorili graf, v ktorom uvádzame hodnotenie žiakmi, t. j. náročnosť a hodnotenie žiakov, teda ich úspešnosť (Obr. 10).



Obr. 10 Hodnotenie žiackej úspešnosti prvej úloyhy

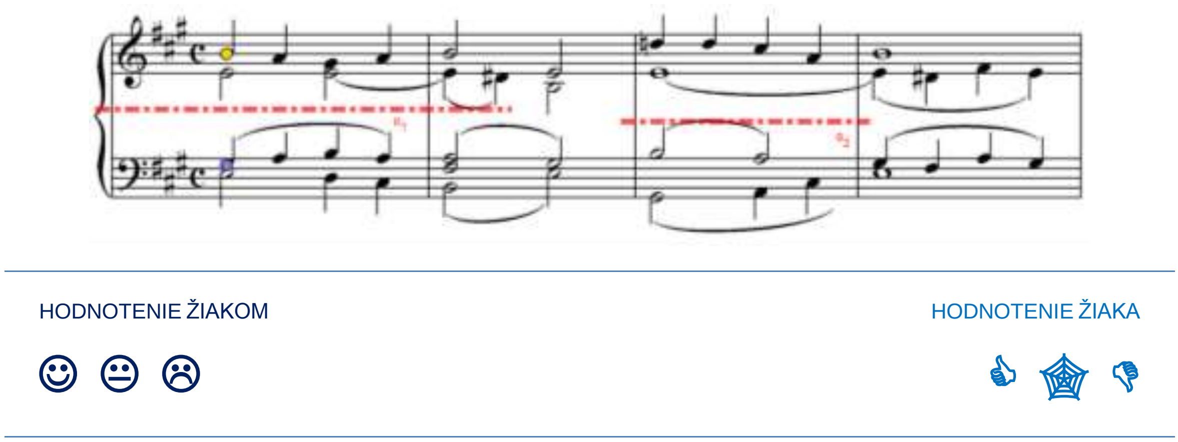
Uvedená úloha sa vyznačovala najmä obzvlášť peknou žiackou prácou. Polovica žiakov mala vyriešenú úlohu na 100 %. Jeden žiak nevedel vôbec úlohu vyriešiť a zvyšní žiaci sa prevažne mýlili v tom, že si nevšimli obidve osi súmernosti, ale len tú prvú. Preto všetky noty zobrazili len podľa osi o_1. 16 žiakov s pochopením a vyriešením tejto úlohy nemalo problém a riešenie sa im zdalo veľmi ľahké. 12 žiakov malo problém s pochopením zadania a 6 žiakov sa vyjadrilo o úlohe, že bola veľmi náročná. Na Obr. 11 môžeme vidieť žiaka Gymnázia sv. Cyrila a Metoda v Nitre ako rieši pracovný list. Ďalej je uvedená ukážka riešenia pracovného listu žiačky Gymnázia Janka Jesenského v Bánovciach nad Bebravou (Obr. 12).

Obr. 11 Pracovná plocha žiíaka

Obr. 12 Správne riešenie žiaka (prvá úloha

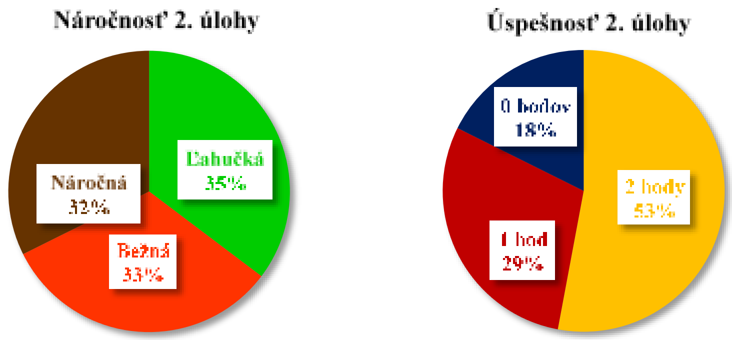
Iný typ úlohy z pracovného listu mal nasledujúce znenie. *„V tejto úlohe je použitý úryvok z piesne „K Márii voláme“, v ktorej sme vyznačili dve osi súmernosti o_1, o_2. Tvojou úlohou bude na nasledujúcom obrázku označiť noty, ktoré sú osovo súmerné podľa daných osí. Nájdi obraz a aj vzor osovo súmerných nôt. Vyznačiť ich do obrázka môžeš farebne, môžeš tiež dokresliť alebo narysovať pomocné čiary, atď. Prípadne, ak vidíš v obrázku (v notách) aj iné zhodné zobrazenie, môžeš vyznačiť aj to, tiež ho pomenuj.“* (Košťálová, 2018)

Žiaci mali teda k dispozícii obrázok úplného notového zápisu (Obr. 13). Po spätnej kontrole ich riešení sme dospeli k záverom hodnotenia, ktoré zobrazujú aj grafy na Obr. 14.



Obr. 13 Zadanie druhej úlohy

Na základe vyriešených úloh sme usúdili, že daná úloha sa zdala byť pre niektorých žiakov trochu mätúca. Žiaci nepokladali za jednoduché spomedzi nôt vybrať práve tie, ktoré by boli osovo súmerné. Vyžadovalo to presné rysovanie a meranie a to sa podľa našich zistení mnohým žiakom nechcelo alebo nepodarilo. Napokon však viac ako polovica žiakov úspešne zvládla túto úlohu a len 6 žiakov ju vôbec nevyriešilo správne. Názory žiakov na náročnosť úlohy boli rôzne (Obr. 14).



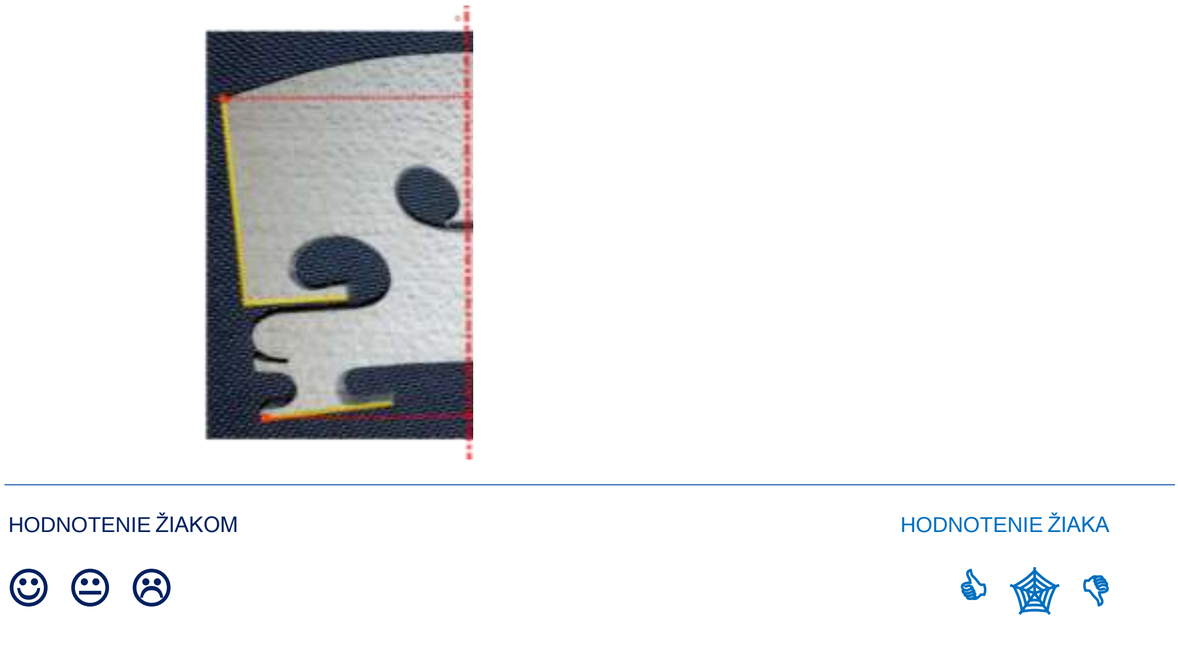
Obr. 14 Hodnotenie žiackej úspešnosti druhej úlohy

Na Obr. 15 uvádzame jedno zo správnych a pekných žiackych riešení.

Obr. 15 Správne riešenie žiaka (druhá úloha)

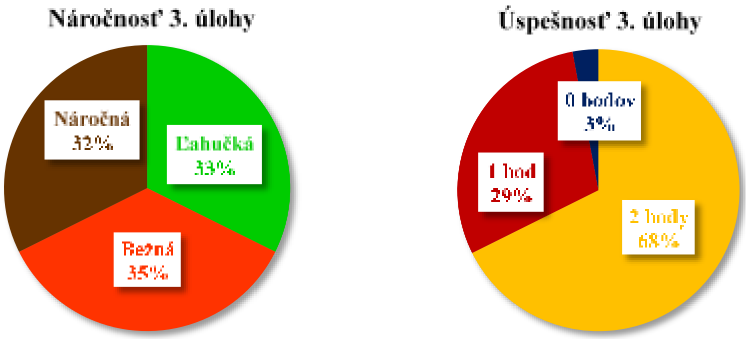
Tretí typ zadania úlohy o osovej súmernosti sa týkal jednej súčiastky sláčikových hudobných nástrojov podopierajúca struny nazývanej husľová kobylka. Uvádzame znenie zadania úlohy v pracovnom liste. *„Na nasledujúcom obrázku vidíš polovicu novej husľovej kobylky bez zárezov na struny. Tvojou úlohou bude čo najpresnejšie dorysovať druhú polovicu tejto husľovej kobylky, pokiaľ vieš, že je osovo súmerná podľa osi* o*. Môžeš použiť farebné pomocné čiary a vyznač aj výsledný tvar husľovej kobylky. Možno Ti pomôžu aj pomocné žlté plné, aj červené bodkované úsečky.“* (Košťálová, 2018)

K danému textu prislúchal nasledujúci obrázok (Obr. 16).



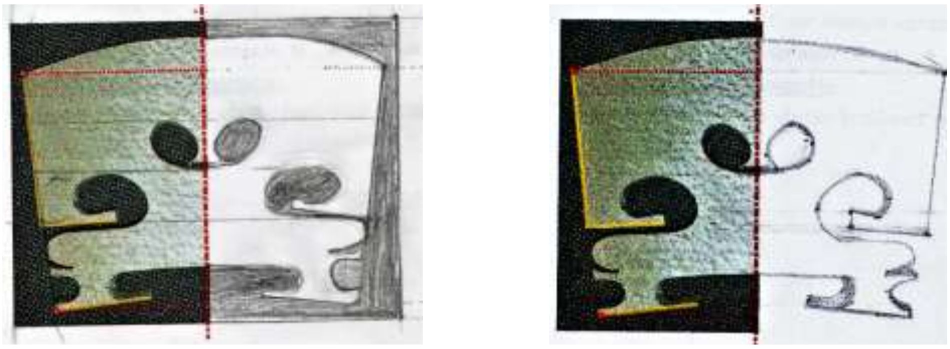
Obr. 16 Zadanie tretej úlohy

Z analýzy tretej úlohy vyplývali nasledovné grafy (Obr. 17). Celkovo sa úloha žiakom páčila a nebola pre nich náročná. Svedčia o tom aj výsledky ich práce, pričom 23 žiakov vyriešilo túto úlohu úplne vynikajúco. Z priamych priamo vyslovených reakcií niektorých žiakov sme sa dozvedeli, že sa im rysovať nechcelo. Avšak pri našom hodnotení úloh z pracovného listu nás prekvapila úspešnosť tejto úlohy.



Obr. 17 Hodnotenie žiackej úspešnosti tretej úlohy

V úlohe nás špeciálne potešili i bezprostredné odkazy žiakov prislúchajúce danej úlohe. Istá žiačka napísala: *„Tretia úloha bola ťažšia v tom, že som nevedela, čo je husľová kobylka a navyše je ťažké prenášať obrázok s nepravidelnými stranami.“* Paradoxom je, že táto žiačka získala za túto úlohu plný počet bodov. Ďalšia žiačka nám napísala pri úlohu odkaz: *„Som výtvarníčka a umelcom nejde matika.“* Všimli sme si však, že napriek dosahovaniu slabých výsledkov na hodinách matematiky sa vo veľkej miere prejavila tvorivosť a talent tejto žiačky. Aj táto žiačka teda získala plný počet bodov za riešenie úlohy. Iná žiačka zas okrem doplnenia základného obrazu husľovej kobylky vytvorila aj obraz tieňa, ktorý vznikol pri fotografovaní. Nasledujúce žiacke riešenia (Obr. 18) svedčia o tom, že žiaci úlohu vypracúvali svedomito a doplnili svoje konkrétne riešenie rysovaním, tieňovaním, vyplnením pozadia či použitím farieb.



Obr. 18 Správne riešenia žiakov (tretia úloha)

Záver

Na záver si skúsme opäť položiť niekoľko otázok. Čo nám prinieslo takto imanentné uvažovanie o synkretizme hudby a matematiky? Malo to vôbec nejaký zmysel? Predpokladáme, že vyučovanie matematiky využívajúce atypické útvary bude schopné vniesť do obvyklých vyučovacích hodín matematiky vyšší zmysel?

Zodpovedať môžeme i reakciami mnohých žiakov, ktorí tak nám po vyriešení spomínaného pracovného listu zanechali odkazy. Boli vyzvaní k tomu, aby na poslednú stranu napísali bezprostredné zhrnutie pocitov a tak dostali príležitosť vyjadriť sa a napísať svoju skúsenosť z vypracovávania pracovného listu. Mnohí sa odvážili opísať nám svoju situáciu a pocit priamo počas vypĺňovania pracovného listu podobne, ako sme uviedli pri tretej úlohe. Uvedieme teda aj reakcie žiakov, ktorí sa nebáli napísať svoj celkový názor na pracovný list.

Žiačka, ktorá získala celkovo plný počet bodov napísala: *„Super nápad spojiť hudobnú s matematikou. V prvej úlohe by som však nechala zobrazené trámce nôt, potom to človeka popletie. Ďakujem ☺“* Žiak s výsledným hodnotením 100 % sa vyjadruje takto: *„Zadania úloh* *boli nápadité a netradičné. Väčšina úloh bola zvládnuteľná, ale s niektorými som sa riadne potrápil. Bolo to však celkom príjemné spestrenie dňa aj týždňa. ☺"* Žiak, ktorý vyžadoval aj ústne vysvetlenie úloh, no nakoniec mal všetko správne, si o sebe myslel: *„Potrebujem doučiť."* Šikovný žiak, ktorý dosiahol 100 % úspešnosť napísal: *„Bolo to super. Niečo nové, farebné a pekné."* Žiačka, ktorá vyriešila všetky úlohy v pracovnom liste správne, píše svoju kritiku nasledovne: *„Trochu zle sa mi meralo – noty sú príliš výrazné a malinké, niektoré zadania mi chvíľu trvalo pochopiť. Možno by som zvolila inú formuláciu. Inak som tu strávila zopár pekných chvíľ. ☺"* Viacerí žiaci sa sťažovali: *„Nepochopiteľné zadania úloh."* Dvaja chlapci, hoci obaja stratili tri body napísali: *„Super."*, *„Naj."*. Žiačky, ktoré stratili 4-5 bodov z celkového počtu sa však ospravedlňovali: *„Prepáčte, ale ja som hlúpa, keby to viem, rada to dobre vyplním. ☺."*, *„Matika nie je práve mojou silnou stránkou, nemám ju rada, ospravedlňujem sa za zlé vypracovanie úloh."*, *„Je to pre mňa náročné, lebo ja som hlúpa, ale snažila som sa."* Jeden chlapec, ktorý získal len 8 bodov napísal: *„Matika ma baví, ale geometrická časť mi príde nudná a nezáživná."* Druhý žiak, ktorý mal taktiež len päťdesiatpercentnú úspešnosť sa vyjadril: *„Veľmi zložité, nič som nevedel, lebo matiku všeobecne neviem."* Žiačky, ktorých úspešnosť bola menšia ako 35% písali: *„Nechápem zadaniam ☹, nemám veľmi logické myslenie ☺."*, *„Ja ako nehudobníčka nerozumiem daným úlohám s notami."*, *„Prepáčte, asi som vám pokazila celý priemer, ale ja som v tomto neschopná."*

Z uvedeného možno vidieť, že reakcie žiakov boli skutočne veľmi rôznorodé. Je však zrejmé, že žiaci s takouto formou riešenia osovej súmernosti na hodine matematiky stretli celkom prvý krát. Napriek tomu však dosahovali prekvapivé výsledky – v kladnom i v zápornom zmysle. Tiež nás prekvapilo, že, mnohí úspešní riešitelia boli hudobníci. „Dopad" ich hudobného vzdelania na správne riešenia bol v mnohých prípadoch skutočne silný. I z tohto dôvodu, mnohí len celkom intuitívne v 1. úlohe vyriešili problém osovej súmernosti. Vďaka znalosti hudobných vzťahov získali aj v pracovnom liste pri vypracúvaní úloh výborné výsledky. Preto si myslíme, že medzipredmetové vzťahy možno upevňovať aj takými zaujímavými úlohami, námetmi, čo určite žiakov zaujme a ponúkne iný pohľad na vyučovanie matematiky.

Poďakovanie

Článok vznikol s podporou projektu 019UKF-4/2020 s názvom "Podnetné didaktické postupy vo vyučovaní zobrazovacích metód v sekundárnom matematickom vzdelávaní s ohľadom na požiadavky spoločnosti a praxe".

Literatúra

KOŠŤÁLOVÁ, K. *Zhodné zobrazenia v rôznych hudobných dielach*. Bakalárska práca. Nitra, FPV UKF, 2018, 76 s.

RIEČAN, B. – Berger R. (1997). *Matematika a hudba*, Bratislava, Veda, 1997, 215 s.

LAŠŠOVÁ, K. *Vybrané matematické celky a ich prepojenie s rôznymi oblasťami praxe*. Diplomová práca. Nitra: FPV UKF, 2020, 147 s.

CMÍRAL, A. *Základní pojmy hudební*. Praha, Státni hudební vydavateľství, 1967, 580 s.

ŠEDIVÝ, O. *Vybrané kapitoly z geometrie (Geometrické zobrazenia)*. Bratislava, SPN, 1978, 140 s.

SCHNEIDER TRNAVSKÝ, M. Jednotný katolícky spevník. Bratislava, Spolok sv. Vojtecha, 1986, 579 s.