

Strategies Applied by Pupils During the Representation of Natural Numbers

Šárka Pěchoučková^a – Martina Kašparová^a

^a*Department of Mathematics, Physics and technical Education, Faculty of Education, University of West Bohemia in Plzeň, Klatovská 51, 306 14 CZ*

Received November 4, 2019; received in revised form November 18, 2019; accepted November 22, 2019

Abstract

The process of creating a conception of natural number poses a complex problem. We focused primarily on manipulation activities, namely on manipulation with Cuisenaire rods, and we studied the strategies employed by first-year and second-year pupils during the enactive representation of natural numbers 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 19, 27, 34, 46 and 55. In the course of this experiment based on observation, following strategies were recorded: counting-on strategy, filling-in strategy “L”, filling-in strategy “S”, applied facts strategy, derived facts strategy, known facts strategy. The known facts strategy was most frequently applied in both first and second year and had two specific forms at older children. The use of counting-on strategy was considerably reduced in second grade. It was thus demonstrated that pupils had already automated operations of addition in the 0-20 range.

Keywords: natural number, manipulation, Cuisenaire rods, enactive representation, strategy

Classification: 97C30

Introduction

Natural number, like all abstract terms, cannot be perceived through our senses. We only know that the number is deputized by its representants. Five stones represent the natural number “five” as well as five steps do. This count can be expressed by the word “five” in spoken or written language, both with letters or mathematical symbols.

In the first and second years, an experiment was conducted that focused on the different strategies that pupils use to represent some natural numbers. A total of 103 pupils participated in the experiment.

Creating the conception of natural number

The process of creating a conception of natural number has several phases. A stage that can be called “**passive encounter with a number**” commences soon after birth. A baby listens to adults’ and siblings’ speeches in its vicinity. In this speech, the number appears within the context of everyday situations. The child however perceives the number like he/she perceives other words, he/she might not be aware of them just yet and does not assign any meaning to the numeral.

*Corresponding author; email: pechouck@kmt.zcu.cz

In the second year of life the “World of Numbers” emerges from the “World of Things”. This stage is called “**nuclei of numerical conceptions**”. Children begin to be aware of numbers and numerals in other people’s speech. They realize that words three, five, eight go together and that their meaning is different from the meanings of other words (mum, dad, car, toy, ...). The rhythm plays an important role during the emerging of World of Numbers” from the “World of Things”, i.e. use of simple (counting-out) rhymes.

In the stage of “**creating the conception of quantity**”, a child does not use concrete numbers to express quantity but rather works with indeterminate quantity, expressed by words like *many, few, too much,...* The expression of quantity can however be influenced by child’s subjective emotions. The number of objects that provoke positive emotions for a child (e.g. lollipops) will be labelled as few. The same number of objects that provoke negative emotions (e.g. toys to be tidied up) will be labelled *many*.

If the child is in the “**stage of separated models**”, he/she understands “two” as e.g. pair organs: two, hands, two feet, two eyes, two ears. Later, he/she counts a larger number of objects by one, thus using numerals *one, two, three...* At the beginning however children recite a line of words without understanding the principle. This is manifested by omitting some words or changing their order. At about four years of age, the child begins to understand the connections between the recited line of words and counted objects – he/she points correctly at the objects one by one and recites a line of words (numerals). Each object is assigned a single correct numeral. Around five years of age, the child is capable of understanding the cardinality principle: the last pronounced word determines the total count of objects. Furthermore, he/she comprehends the order, i.e. that a number pronounced later is greater than a number pronounced before that. It is however necessary to underline that the conceptions of number are isolated in this phase; the child understands the single cases in a separated way. In fact, the child focuses on the object type, its color, size and position. From the child’s point of view, 4 blue dice and 4 yellow dice represent two different situations. This phase is related to the preoperational stage of cognitive development.

The “**first abstraction lift-up**” occurs when the child starts to realize that when determining the count of objects, the only criterion that matters is their number and not color, size, type, position or material.

When the child realizes that 4 objects are all that is required for the conception of number 4, he/she finds themselves in the **generic models stage** and can work with different models – fingers, abacus, towers of dice, number line, various types of natural number representation. This stage is related to the concrete operational stage, where it is important to perceive numbers visually, in particular by object manipulation or graphic representation. Children go through this stage at around 6/7 years of age.

The “**second abstraction lift-up**” occurs when the child has formed a concrete conception of a number and he/she finds themselves at the **abstraction level** where he/she is able to work with the number without need to see concrete objects, thus working with the number only in their mind. The number can be replaced by symbols (e.g. letters). The child is at the formal operational stage. This stage begins at the onset of adolescence (Hejný 1990; Kaslová 2010).

Representation and its types

We understand representation as “basic element of cognitive relationship of a human to the world” (Kolláriková, Pupala 2001, p. 188). The Dictionary of Psychology (Hartl, Hartlová 2009, p. 506) defines representation in two ways:

1. “object itself, its conception or symbol that substitutes it”
2. “is understood by cognitivists as a direct stimulus, the elaboration of this stimulus in one’s mind, its coding, its image, conception, abstract idea or alternatively recall of past experience”

External representation is that part of physical world that enables the pupil to penetrate deeper into the cultural world or to cultivate his/her spiritual world. Internal representation reproduces an image of the phenomenon in pupil’s spiritual world, it is his new conception. It is the result of pupil’s activity and it is impossible to induce it in the pupil’s mind without their own interest (Hartl, Hartlová 2009).

In agreement with the above-mentioned definitions, we are going to distinguish external and internal representation of natural number in this text. A symbol substituting a natural number will be regarded as external representation. A conception of natural number will be regarded as internal (mental, cognitive) representation.

M. Sedláková (2004) speaks of external and internal (mental, cognitive) representation. She considers visual and verbal types of representation as external. Visual representation, mediated by an image or a drawing, is more concrete because it is associated to the visual modality of information only. The verbal (linguistic) representation, mediated by speech is abstract and it does not bear any direct connection to modality. Internal representation is further divided into symbolic and distributive representation.

When creating the concept of a number, the child works with various illustrative representants, which facilitate the formation of mental image and therefore also of internal representations of numbers (Hejný, Kuřina 2015). Auditory representation is also one of representation types. The beginning of a traditional Czech song “One, two, three, four, five” is an auditory representation of number 5. There are various types of mental representation, ranging from separated models over generic models up to terms.

American psychologist Jerome Bruner distinguishes three types of representation alias three levels of cognition (Ruisel 2004):

- Enactive representation
- Iconic representation
- Symbolic representation

Enactive representation is directly connected to child’s activity and physical experience. An example of number 4 enactive representation is the construction of a tower consisting of 4 blocks, four claps of hands, removal of four marbles from a bag or four jumps.

Cuisenaire rods are a suitable tool for the enactive representation of natural number. Their author was George Cuisenaire from Belgium (1891 – 1976), who claimed notes in musical scales corresponded to numeric relations. This is why he constructed a “mathematical keyboard”, a set of carefully designed rods of specific lengths and colors. Cuisenaire rods have the shape of regular rectangular prism with the base edge of 1 cm. The rod length varies

between 1 cm and 10 cm. Rods of equal length have the same color and represent the same number (in Table 1, in Fig. 1).

Table 1: Cuisenaire rods

Rod length	Rod color	Natural number represented by the rod	Referred to as further in this text
1 cm	White	1	Single-unit rod
2 cm	Red	2	Two-unit rod
3 cm	Light green	3	Three-unit rod
4 cm	Purple	4	Four-unit rod
5 cm	Yellow	5	Five-unit rod
6 cm	Dark green	6	Six-unit rod
7 cm	Black	7	Seven-unit rod
8 cm	Brown	8	Eight-unit rod
9 cm	Blue	9	Nine-unit rod
10 cm	orange	10	Ten-unit rod



Fig. 1: Cuisenaire rods

Iconic representations encompass the use of various substitute models of reality such as images, schemes and concepts. Numeric figures of natural numbers 1 – 6 on a die are an example of iconic representation (in Fig. 2). Kaslová (Kaslová, 2010) classifies these figures among natural number models and calls them “configuration models”.



Fig. 2: Iconic representations of natural numbers on dice

Symbolic representations describe phenomena and relationships with language, e.g. using a mathematical symbolical language (mathematic symbols). “4” is a symbolic representation of number four. The use of symbolic representations means a deviation from imminent physical reality, it is therefore a representation mediated by abstract terms and categories.

Experiment in the 1st year of elementary school

An experiment was carried out in the first year of elementary school, whose subject were the strategies used by pupils (6-7 years of age) during the manipulation with Cuisenaire rods. The aim was to discover, which strategies were applied by 1st year pupils during the enactive representation of number 4, number 5, number 6, number 9 and number 11 by the means of Cuisenaire rod manipulation. Our task was to select suitable tools for the enactive representation of a number and to build a series of activities to motivate children and simultaneously to discover their strategies applied during the enactive representation of above-mentioned numbers.



Fig. 3: Modified Cuisenaire rods

In the course of a whole school year, the pupils were presented with a total of 5 tasks, during which they used Cuisenaire rods so that the impact of pupils' fine motor skills on their manipulation activities was excluded. Modified rods were used in tasks 1, 2, 3, which differed from each other in length but not color to eliminate the color interference at children (in Fig. 3). In subsequent tasks, when children were already acquainted with this tool, and thus

the impact of color on the rod choice was not fundamental, pupils worked with original Cuisenaire rods.

Every pupil was solving the tasks in an independent manner, separated from other children, sitting at a desk with piles of Cuisenaire rods to his/her disposition (in Table 2). Some piles were uncovered, others were revealed gradually during the problem solving. Near each pile, there was a card indicating the number represented by rods in the pile. Only at task 2 all rods were mixed and placed in a single pile. The tasks were motivated by the acquisition of “special money” represented by Cuisenaire rods. Before the actual task, children were introduced to the “value” of single “coins”. The pupil was subsequently given a card representing the price of goods, and the pupil’s task was to attempt to pay this price (to carry out and enactive representation of a natural number).

Table 2 shows the natural numbers in the order in which their enactive representation was required for each task, and Cuisenaire rods that the children could use.

Table 2: Overview of tasks for 1st year students

Task	Task 1	Task 2*	Task 3	Task 4	Task 5
Date of experiment	November 2014	January 2015	March 2015	April 2015	June 2015
Represented numbers (in this order)	4, 6, 5	4, 6, 5	5, 4, 6	4	4
Used Cuisenaire rods	Single-unit to three-unit rods				
Represented numbers (in this order)			9	6, 5	6, 5
Used Cuisenaire rods			Single-unit to six-unit rods	Single-unit to four-unit rods	
Represented numbers (in this order)				11, 9	11, 9
Used Cuisenaire rods				Single-unit to six-unit rods	

* In Task 2, all the rods were in one pile.



Fig. 4: Tools for first-year experiment

To illustrate how single tasks were presented to children, we describe here in detail the presentation of Task 1, which was motivated as follows. (If subsequent sentence begins on next line, it means that the child was given space for reaction). Occasional deviations tried to accommodate different children's personalities and their spontaneity.)

Do you go shopping?

On your own or with mummy?

What do you enjoy shopping the most?

Today we are going to play shopping together. We have some special money here. This is one Czech koruna (experimenter picks up a single-unit rod and shows it to the child), this is two Czech koruna (experimenter picks up a two-unit rod and shows it to the child), this is three Czech koruna (experimenter picks up a three-unit rod and shows it to the child). The goods' price is on these cards. Try to pay for it.

(In case the child does not react for a while, the experimenter reminds him/her of the "money values". If the child still does not react, the experimenter suggests him/her the counting-on strategy.)

Subsequent tasks were presented in a similar way.

Basic cognitive phenomena

In the described experiment, children carried out an external representation of natural numbers, namely the enactive representation in agreement with Bruner. Some children counted out loud during the enactive representation. We named this phenomenon "**verbal and auditory representation**". There was thus an interconnection of the term "verbal" of psychologist Sedláková and the term "auditory" of didactics experts Hejný and Kuřina, as we assume both types of representation are closely related to each other, as are speech and hearing. One representation type is complemented by another one. The acoustic perception canal plays an important role here (Pěchoučková 2018).

Other phenomena linked to enactive representation of natural number using manipulation with Cuisenaire rods are visual perception of a number and haptic perception of a number. By perception we understand the sensory notion (Hartl, Hartlová 2009), i.e. the reflection of

reality by sensory organs. By **visual perception of a number**, we intend auditory notion of a number, in particular the observation of objects before the beginning of actual representation of the given number. Taking the case of manipulation with Cuisenaire rods, the pupil carries out visual perception of e.g. number 2 if he spends time observing the pile of two-unit rods. This is why time was measured and recorded during the experiment. By **haptic perception** we intend the contact notion (in other words “tactile documentation of a number”), when the pupil touches objects with fingers or whole hand during or after the representation process, without manipulating them. In particular it means touching some of the Cuisenaire rods.

Strategies used during the representation of a number

The term “strategy” was introduced into didactics of mathematics by G. Polya. He understood a strategy as a plan for solving a problem. Vágnerová states that “strategy means establishing a certain process, which is deemed the most effective to reach the aim” (Vágnerová 2001, p. 75). Authors Hejný, Michalcová (2001) define strategy as a plan by which one puts into practice (or intends to put into practice) an activity that pursues a certain aim. This plan is not necessary detailed or thought-through. One can act spontaneously without realizing which strategy they are using. We are going to examine mathematical strategies, i.e. strategies linked to activities where mathematics is present. For simplification we are going to use here the term “strategy” only.

When examining the strategies used by pupils for the enactive representation of selected natural numbers, we proceeded from the research of Grey (1991), who discovered that the process of addition of two one-digit numbers ($4 + 3$) without know context can involve

1. Method, when the pupil uses counting-on for each of the addends and subsequently also for the unified quantities
2. Method, where one quantity is known and the other is being counted on
3. Counting derived from known facts
4. Direct answer if the child already knows the links

The strategy chosen by child during the representation of a natural number can indicate the extent of child’s understanding of this number (Gervasoni 1999). However, we have to consider that not always children use their strongest strategy. Therefore, it is necessary to prepare such situations for them that would lead to application of the most complex strategy.

Strategies described in following text were observed during the work with Cuisenaire rods. An illustration is attached for each strategy. Time required by pupil for described activity is stated in round brackets.

Counting-on strategy

The pupil carries out enactive representation of given number only by using single-unit rods, which he/she counts one by one. This strategy corresponds to process 1 described by Gray (see above).

Illustration 1 – Adam

Adam turns over card with number 5. He counts five single-unit rods with his left hand and places them on the card (6 sec).

Filling-in strategy „L“: Pupil chooses the largest rod to his/her disposition and thinks about additional rods to complete the first one (Pěchoučková 2018).

Illustration 2 – Anna

Anna turns over card with number 5. She picks up a three-unit rod with her right hand and places it on the table (3 sec). She thinks, observed the piles with single-unit rods and two-unit rods (3 sec). She adds two single-unit rods with her left hand.

During the enactive representation of number 5, Anna used the filling-in strategy „L“. She took the largest one of offered rods, i.e. a three-unit rod, and during a visual perception of number 1 and number 2 she thought which additional rod to use to complement the first one.

Illustration 3 – Bruno

Bruno turns over card with number 9. He picks up a six-unit rod with his right hand, says „Six.“ He lays the rod on the card (3 sec). He observes the piles from right to left and stops at the three-unit rod pile (3 sec). He stretches his right hand out towards the pile, picks one rod, says „and three“ and lays it on the card (3 sec).

During the enactive representation of number 9, Bruno used the filling-in strategy „L“. He took the largest one of the offered rods – the six-unit one in this case – and based on visual perception of number 6, number 5, number 4 and number 3 he was considering which other rod to use to complement the first one.

Filling-in strategy „S“: Pupil chooses a smaller rod than the largest one from the offered set and thinks about additional rods to complete the first one (Pěchoučková 2018).

Illustration 4 – Barbora

Barbora turns over card with number 9. She picks up one five-unit rod with her right hand and puts it on the card (3 sec). Her eyes wander between the piles of four-unit and five-unit rods (3 sec). Her eyes halt on the four-unit rod pile. She pick up one of them with her right hand and lays it on the card (2 sec).

During the enactive representation of number 9, Barbora used the filling-in strategy „S“. She took a five-unit rod (which was not the largest one of the offered rods) and during a visual perception of number 4 and number 5 she was considering which other rod to use to complement the first one.

Illustration 5 – Cyril

Cyril turns over card with number 4. He picks up one single-unit rod with his left hand and put it on the table (4 sec). He observes the rod piles (5 sec). With the same hand, he takes one two-unit rods and adds them to the single-unit rod (2 sec). He stretches out his hand over the pile of two-unit rods, keeps it there and observed the pile (2 sec). Then he moves his hand to the pile of single-unit rods, takes one of them and adds it to the two previous rods (1 sec).

During the representation of number 4, Cyril first chose a single-unit rod, which was the smallest one of the offered rods. Then he carried out a visual perception of other numbers and thought about the choice of next rod.

Applied facts strategy: During the enactive representation of subsequent number, pupil exploits the representation of previous one (Pěchoučková 2018).

Illustration 6 - Cilka

Cilka turns over card with number 5. She looks at the pile with one-unit rods, then on the three-unit rod pile. She picks one three-unit rod with her right hand, holds it in the air, picks a two-unit rod with her left hand. She lays both rods simultaneously on the card (6 sec).

She turns over card with number 6. She looks at the three-unit rod pile. She picks one three-unit rod with her right hand and lays it on the card with number (4 sec). She picks a two-unit rod with the same hand and lays it on the card again (2 sec). She picks a single-unit rod with her left hand and adds it to the two rods laying on the card with number (2 sec).

During the representation of number 6, Cilka used the applied facts strategy. The $3 + 2$ representation, which she applied in the previous task during the representation of number 5, is part of $3 + 2 + 1$ representation of number 6.

Derived facts strategy: During the enactive representation of given number, the pupil flexibly applies a suitable strategy of this number which he/she has memorised before, i.e. he/she have not applied it yet during previous manipulations (Pěchoučková 2018).

Illustration 7 – Dana

Dana turns over card with number 5. She counts two two-unit rods with her left hand, one by one, she picks both of them with her left hand and lays them on the card (4 sec). Then she adds one single-unit rod with her left hand (3 sec).

Dana applied the strategy of derived facts. She knows the $2 + 2$ addition and she derives the next number from this fact by the addition of 1.

Illustration 8 – Daniel

Daniel turns over card with number 11. He says: „Eleven“. He picks one five-unit rod with his right hand, puts it on the card and says: „Five...“ (4 sec). He picks another five-unit rod with the same hand, puts it on the card and says „...and five...“ (2 sec). He pick a single-unit rod with his right hand, puts it on the card and says „...and one“ (2 sec).

Daniel used the strategy of derived facts. He uses the knowledge of two equal addends addition ($5 + 5$) and he derived the next number from this addition by adding number 1.

Known facts strategy: The pupil knows the appropriate numeric relation and performs the representation of given number based on the knowledge of this relation. This strategy corresponds to process 4 described by Gray (see text above).

Illustration 9 – Emil

Emil reveals card with number 6. He picks a three-unit rod with his right hand, puts it on the card (2 sec). He picks three single-unit rods at once with his left hand and adds them to the three-unit one (3 sec).

Emil used the known facts strategy. The time required for solving this problem corresponds to the applied strategy. Emil did not think about the solution as he did not observe the piles with rods during the task. He has already automated number 6 as $3 + 1 + 1 + 1$ in his mind.

Illustration 10 – Eva

Eva turns over card with number 11. She picks up one five-unit rod with her right hand and lays it on the card (3 sec). She picks up a six-unit rod with her right hand and lays it on the card (2 sec).

Eva used the known facts strategy. She has had an automated relation of $5 + 6$.

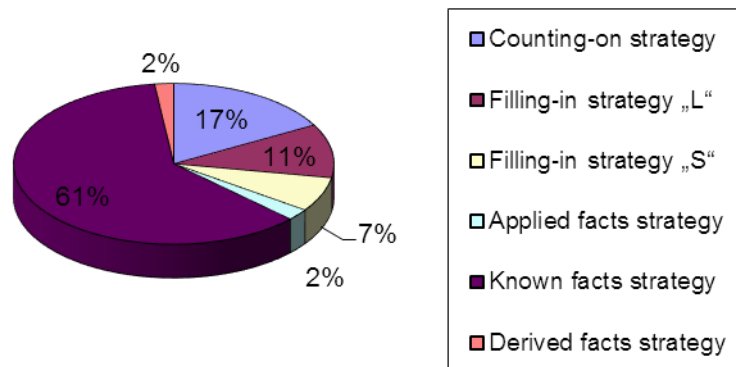
Table 3 summarises the strategies applied for single numbers during the whole experiment. If we compare the strategy application frequency for single numbers, we can see that the known facts strategy was used with the lowest relative frequency at number 9 – pupils used other strategies for this number to a greater extent than for other numbers, e.g. filling-in strategy “L” or filling-in strategy “S”. Applied facts strategy was used exclusively for the representation of number 6, although the order of tasks was chosen as to enable the use of this strategy also for the representation of number 5, number 9 and number 11. Furthermore, the relative frequency of derived facts strategy use was low, this strategy appeared most frequently during the representation of number 11 ($5 + 5 + 1$). Other numbers suitable for this strategy were number 5 ($2 + 2 + 1$) and number 9 ($4 + 4 + 1$). At number 9, pupils mostly chose a five-unit rod first and worked with it based on known facts strategy or filling-in strategy „S“.

Table 3: Summary table – 1st year

	Number 4	Number 5	Number 6	Number 9	Number 11
Counting-on strategy	20 %	20 %	21 %	10 %	-
Filling-in strategy „L“	5 %	9 %	10 %	18 %	23 %
Filling-in strategy „S“	2 %	1 %	9 %	28 %	16 %
Applied facts strategy	-	-	6 %	-	-
Known facts strategy	73 %	68 %	54 %	44 %	46 %
Derived facts strategy	-	2%	-	-	15 %

The most frequently applied strategy overall was the known facts strategy, the least used one was applied facts strategy and the derived facts strategy. (Chart 1).

Chart 1: Overview of strategies in 1st year



Experiment in the 2nd year of elementary school

During the following school year, an experiment was carried out in the second year of elementary school with the same sample set of pupils (7 – 8 years old). The aim of this experiment was to discover which strategies were used by pupils during the manipulation of Cuisenaire rods for the enactive representation of number 7, number 10, number 12, number 19, number 27, number 46, number 34 and number 55. The experimenters' task was again to select suitable tools for the enactive representation of a number and to compile a set of activities to motivate the children and simultaneously to enable the study of strategies used during the enactive representation of numbers above.

In the course of a whole school year, the pupils were presented by three problems for whose solution they used the original Cuisenaire rods.

Like in the 1st year, the pupils were always elaborating the task in an independent manner, separated from other children in the class at a writing desk, where they had piles of Cuisenaire rods to their disposition. The rods were arranged left-to-right from single-unit ones to ten-unit ones from the pupil's perspective (Table 4). Some piles were uncovered, others were revealed during the problem solution. There was a card at each pile stating which number is represented by the rods. The problems were again motivated by a purchase with help of "special money" represented by Cuisenaire rods. The pupils were given a large card representing the price of goods and their task was to try to pay for the goods (to perform an enactive representation of natural number) (Fig. 5).



Fig. 5 Desk with tools prepared for 2nd year experiment

The pupils were asked to perform the enactive representation of eight numbers in the 1-100 category, where both odd and even numbers were represented. Table 4 contains information on the types of rods used by pupils for the enactive representation of given numbers. The script of information on used rods corresponds to the script of number(s) they were used for.

Table 4: Task overview for 2nd year pupils

Task	Task 1	Task 2	Task 3
Date of experiment	November 2015	February 2016	May 2016
Represented numbers	7		
Used Cuisenaire rods	Single-unit to five-unit rods		
Represented numbers	10		
Used Cuisenaire rods	Single-unit to six-unit rods		
Represented numbers	12	12	
Used Cuisenaire rods	Single-unit to eight-unit rods		
Represented numbers (in this order)		19, 27, 46	27, 46, 34, 55
Used Cuisenaire rods		Single-unit to ten-unit rods	

To illustrate how the single tasks were presented to children, we detail here the presentation of task 1, which was motivated as follows:

Do you still remember our shopping together last year?

Do you remember what money we used?

Let's remind us again.

This is one Czech koruna (experimenter picks up one single-unit rod from the pile and shows it to the child), *this is two Czech koruna* (experimenter picks up one two-unit rod from the pile and shows it to the child). *This is three Czech koruna* (experimenter picks up one three-unit rod from the pile and shows it to the child). *Here we have four Czech koruna* (experimenter picks up one four-unit rod from the pile and shows it to the child). *This is five Czech koruna* (experimenter picks up one five-unit rod from the pile and shows it to the child). *The price of goods is on the card. Try to pay for it.*

Now I am going to add you some more money (experimenter reveals another pile with rods). *Here we have six Czech koruna* (experimenter picks up one six-unit rod from the pile and shows it to the child). *The price of goods is on the card. Try to pay for it.*

We are going to add some more money again (experimenter reveals other piles with rods). *Here we have seven Czech koruna* (experimenter picks up one seven-unit rod from the pile and shows it to the child) *and here are eight Czech koruna* (experimenter picks up one eight-unit rod from the pile and shows it to the child). *The price of goods is on the card. Try to pay for it.*

Only some of the strategies applied by pupils in the 1st year were observed again in the 2nd year during the enactive representation of natural numbers 7, 10, 12, 19, 27, 34, 46 and 55 using the Cuisenaire rods. These were the counting-on strategy, the filling-in strategy “L”, the filling-in strategy “S”, the applied facts strategy and the known facts strategy. As these strategies were described in detail in previous text, their description will not be repeated here but we are going to demonstrate each of them on a concrete illustration. We will focus on the last one, known facts strategy, whose use had in the case of enactive representation of natural numbers two specific forms depending on the procedure applied by the pupil.

Counting-on strategy:

Illustration 11 – Filip

Filip turns over card with number 7. He looks in turns on the card with number and on uncovered piles with rods. He hovers his hand over four-unit and three-unit rods. He keeps his right hand over the pile of three-unit rods. He looks also on other piles and hesitates (10 sec). Eventually, he picks seven single-unit rods with his right hand (10 sec) and lays them one by one near the card (12 sec).

Before starting to carry out the enactive representation of number 7, Filip performed visual perception of all rods to his disposition to gain insight into the problem. In the meantime, he was thinking which strategy to choose. Eventually he decided in favour of counting-on strategy.

Filling-in strategy “L”:

Illustration 12 - Ferdinand

Ferdinand turns over card with number 55. He counts five ten-unit rods with the thumb of his right hand, picks them with his right hand and transfers immediately to his left hand (8 sec).

He double-checks number 55 on the card, looks at the piles and thinks (6 sec). He picks five single-unit rods with his right hand, one by one. He puts the ten-unit rods on the table near the card, counts again the single-unit rods in his hands and then adds them to the card with number (12 sec).

During the enactive representation of number 55, Ferdinand used the filling in strategy “L” ($10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$). First, he chose the largest of available rods – ten-unit rods – and then he thought which other rods to use to complete them. He was using the visual perception of all available rods and the auditory perception of single rods as aid.

Filling-in strategy “S”:

Illustration 13 – Gabriela

Gabriela turns over card with number 7, looks at it, observes the available piles with rods, looks at the experimenter. She rubs her lips with her left hand, keeps watching the card. (Experimenter tries to repeat the task: “Try to pay for this.”) She observed the rod piles again (25 sec). She picks three three-unit rods at the same time with her left hand, lays the hand with rods on the card (7 sec) and asks: “Here?” (Experimenter repeats: “Seven Czech koruna.”) Gabriela puts rods on the table, she touches two four-unit rods, she pauses. She goes back to three-unit rods laying on the table, puts her left hand on them and counts. She raises her head smiling and says: “A-ha.” (6 sec). She puts one three-unit rod back on the pile, pick one single-unit rod with the same hand and observes the experimenter’s reaction (the experimenter invites Gabriela to lay the rods on the card). She moves chosen rods on the card with her right hand (8 sec).

Before beginning the enactive representation of number 7, Gabriela performed a visual perception of all offered rods to gain insight into the problem. The enactive representation of this number was also supported by a haptic perception of four-unit rods. She used the filling-in strategy “S” ($3 + 3 + 3$), where she made a mistake. Nevertheless, she realized this mistake and replaced one three-unit rod by a single-unit one ($3 + 3 + 1$).

Applied facts strategy:

Illustration 14 – Gustav

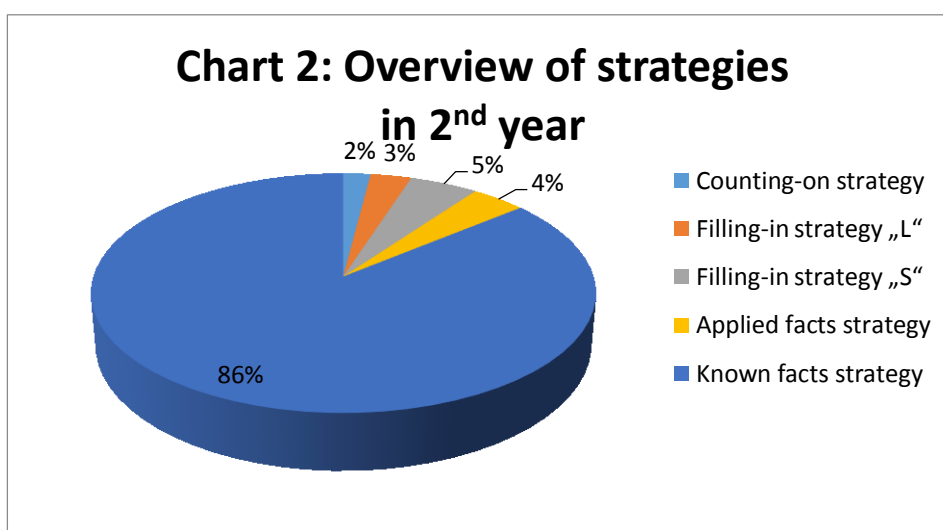
Gustav turns over card with number 7. He picks a three-unit rod with his left hand, lays it on the card. He picks a four-unit rod with he same hand and lays it on the card (7 sec).

He turns over card with numbers 10. He picks one three-unit rod with his left hand and one four-unit rod with his right hand at the same time and lays both rods simultaneously on the card. He picks one more three-unit rod with his left hand and adds it to the previous two rods (8 sec).

Gustav employed the applied facts strategy during the representation of number 10. The $3 + 4$ representation used by him in the previous task with number 7 was part of his $3 + 4 + 3$ representation of number 10. The use of this strategy is a proof of boy’s insight into number 10.

Filling-in strategy „S“	14 %						27 %	
Applied facts strategy		6 %	9 %					
Known facts strategy	71 %	94 %	91 %	100 %	100 %	100 %	73 %	92 %
				37 %	41 %	39 %	21 %	21 %
				63 %	59 %	61 %	52 %	71 %

Table 5 summarizes the strategies employed for single numbers during the experiment. When comparing the frequencies of strategies used for every number, we can see that then known facts strategy was used by pupils at all of them. It was 86 % of all cases (Chart 2). During the enactive representation of number 19, number 27 and number 46, this strategy was used by all pupils from the sample set. Most of them linked this strategy to the method of expanded two-digit number notation in decimal system. This was the case for 63 % of pupils at number 19, 59 % pupils at number 27 and 61 % of pupils at number 46. This could be related to the fact that during that time of school year, pupils have been already working with decomposition of two-digit numbers into tens and ones. On the other hand, the known facts strategy is not the only strategy employed for number 12. The used facts strategy was employed here as well, where pupils exploited the enactive representation of previous number 10. The same strategy occurred at number 10, where pupils used the representation of number 7. The application of this strategy would be too lengthy for other numbers, though. The enactive representation of number 55 corresponded to two strategies. The known facts strategy prevailed but the filling-in strategy “L” was present as well (Chart 2).



The known facts strategy was the most frequently used one, the counting-on strategy was used the least (Chart 2). The reason for most frequent use of known facts strategy could have been that pupils had already automated numeric relations of addition in the 1-20 range as well as the decomposition of a two-digit number into tens and ones.

When we compare strategies used by pupils in the first year during the enactive representation of numbers above with strategies used in the second year, we can say that the known facts strategy was the most frequently used strategy in both years, although its use increased by more than a third in the second year. This was presumably caused by the fact that the second-year pupils had already automated numeric relations of addition in the 1-20 range. Also, this strategy was suitable for the extended natural number notation in decimal system. The application of counting-on strategy was considerably reduced in second year for all numbers including single-digit ones; use of this strategy would be too lengthy for two-digit numbers. The derived facts strategy was observed to a small extent in the first year however it did not occur again in the second year. The applied facts strategy was a minority strategy in both years.

Conclusion

The process of natural number conception formation is accompanied by various phenomena. Here we focussed on strategies employed by pupils for the enactive representation of selected natural numbers using manipulation with Cuisenaire rods. The experiment however followed also other interesting phenomena, such as the process of forming separated and generic models of given natural number as well as processual, conceptual and proceptual understanding of a number and numeric relations used by pupils during the enactive representation of a number. The analysis of these phenomena will be undertaken later.

Acknowledgement

The article is a partial output of the project GRAK2019 of the Faculty of Education of the University of West Bohemia in Pilsen.

References

- Gervasoni, A., 1999. *Children Learning Number*. In Proceedings of Targeting Excellence. Continuing the Journey. Melbourne: Education Victoria, pp. 20 - 24. ISSN 1326-0286.
- Gray, E. M.; Tall, D. O., 1991. *Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking*. In Proceedings of PME XIII. Assisi: Education, pp. 72 - 79. ISBN 978-0-86491-366-1, ISSN 0771-100X.
- Hartl, P.; Hartlová, H., 2009. *Psychologický slovník*. 2. vyd. Praha: Portál. 774 s. ISBN 978-80-7367-569-1.
- Hejný, M., 1990. *Teória vyučovania matematiky 2*. 1. vyd. Bratislava: SPN. 554 s. ISBN 80-08-00014-7.
- Hejný, M.; Kuřina, F., 2015. *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. 3. vyd. Praha: Portál. 232 s. ISBN 80-7178-581-4.
- Hejný, M.; Michalcová, A., 2001. *Skúmanie matematického riešiteľského postupu*. 1. vyd. Bratislava: Metodické centrum. 216 s. ISBN 80-8052-085-2.
- Kaslová, M., 2010. *Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání*. 1. vyd. Praha: Raabe. 206 s. ISBN 978-80-86307-96-1.
- Kolláriková, Z.; Pupala, B. a kol., 2001. *Předškolní a primární pedagogika*. 1. vyd. Praha: Portal. 455 s. ISBN 80-7178-585-7.

Pěchoučková, Š. 2018. *Přirozené číslo a manipulace s Cuisenairovými hranolky*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni. 118 s. ISBN 978-80-261-0765-1.

Ruisel, I., 2004. *Intelligence a myšlení*. 1. vyd. Bratislava: Ikar. 192 s. ISBN 80-7178-425-7.

Sedláková, M., 2004. *Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie. Mentální reprezentace, mentální modely*. 1. vyd. Praha: Grada Publishing, a. s. 252 s. ISBN 80-247-0375-0.

Vágnerová, M., 2001. *Kognitivní a sociální psychologie žáka základní školy*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Karolinum, Univerzita Karlova v Praze. 304 s. ISBN 80-246-0181-8.

Irrationality and Some Historical Remarks on Euler's Number e

Viliam Ďuriš^a

^a*Department of Mathematics Faculty of Natural Sciences Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovakia*

Received March 3, 2020; received in revised form March 10, 2020; accepted March 30, 2020

Abstract

One of the most important constants of mathematics is the Euler's number e . Many world mathematicians have studied the properties of number e and this number has an irreplaceable place not only in mathematics but also in other scientific disciplines. In the first part of the article we will focus on the introduction of the number e from a historical view and we will show some of its important features. The irrationality of the number e was first proven by Leonhard Euler in 1737. We present one of the possible proofs in the second part of this article.

Keywords: Leonhard Euler, number e , irrational, proof, historical remarks

Classification: 11A99, 01A99

1 Introduction

The number e is a very significant mathematical constant whose history is relatively "young". The first effort to simplify mathematical calculations was the introduction of numbers' logarithms, which in the 16-th century was dealt with independently by amateur mathematicians John Napier (1550 - 1617) and Joost Bürgi (1552 - 1632).

John Napier was the first in 1614 to have published a table of logarithms of the values of goniometric functions of sine, cosine, and tangent, which were favourably evaluated by professional mathematicians. In 1615, the English mathematician Henry Briggs (1561 - 1630) replaced Napier's logarithm by the decimal logarithm that helped to the mass use of logarithms and also presented a certain approximation of the decimal logarithm of a number later referred to as e .

The Dutch physicist, mathematician and astronomer Christiaan Huygens (1629-1695) made further progress in 1661, when he defined a "logarithmic" curve (in today's terminology, the exponential curve in the equation $y = k \cdot a^x$), with calculations coming to the computation of the constant created by the decimal logarithm of the "today's" number e to 17 decimal places.

The "today's" number e was first discovered and defined by using the limits by addressing the compound interest issue in 1683 by the Swiss mathematician Jacob Bernoulli (1654 - 1705), who first evaluated the limit of the sequence $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$.

In 1690, the "today's" number was e named and marked b by the German philosopher and mathematician, Gottfried Wilhelm Leibniz. Leonhard Euler (1707 - 1783) was the first

*Corresponding author; email: vduris@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2020.6.1.20-25

mathematician to use the label around 1727 “ e ” for the number e and for the first time it was published in 1736 in his work *Mechanica*. Leonhard Euler examined and revealed different features of the number e [1] and came to an approximation of the number e to 18 decimal places $e = 2,718281828459045235$. Euler was the first to prove that the number e is irrational. In the next few years, many mathematicians tried to express the number e to as many decimal places as possible and to find its different properties. At present, the number e is expressed in millions of decimal places [2].

The number e is called

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045235360287471352 \dots$$

The number e has some characteristic properties among all positive real numbers. First, we show that the number e is the only positive real number that meets the inequality (with the unknown a):

$$a^x \geq 1 + x$$

for each $x \in \mathbb{R}$. To show this relationship we will need a lemma.

Lemma. Let be $d, x \in \mathbb{R}, d > -1, x \geq 1$. Then, it holds that

$$(1 + d)^x \geq 1 + xd.$$

The proof can be found in [3].

1. Let the number $a > 0$ have that property, that $a^x \geq 1 + x$ it applies to every $x \in \mathbb{R}$. We can show that $a = e$. Let be $x = \frac{1}{n}$ for $n = 1, 2, \dots$. Then

$$a^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n}$$

From this

$$a \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = s_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

If we put $x = -\frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \dots$, then

$$\begin{aligned} a^{-\frac{1}{n+1}} &\geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\ \frac{1}{a^{\frac{1}{n+1}}} &\geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} \geq a^{\frac{1}{n+1}} \end{aligned}$$

From that

$$a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = t_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Then from the inequalities $a \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ we have

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq a \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

By $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Since

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

based on the fundamental properties of the limits [4] we get $a = e$.

2. We show that the number e has the property that for each $x \in \mathbb{R}$ it holds

$$e \geq 1 + x$$

For $x = 0$, the relationship is valid. Let be $x > 0$ and let us determine a natural number n so that it holds $n \geq \frac{1}{x}$. Then $nx \geq 1$ and based on the relationship $(1 + d)^x \geq 1 + xd$ for $d = \frac{1}{n}$ and the inequalities $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $n = 1, 2, \dots$, we obtain:

$$e^x \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \geq 1 + nx \frac{1}{n} = 1 + x$$

Let be $x < 0$. Then $-\frac{1}{x} > 0$. Let us determine a natural number $n > 1$ so that it holds $n \geq -\frac{1}{x}$. Then we have $-nx \geq 1$ and, again on the basis of the relationship $(1 + d)^x \geq 1 + xd$ for $d = -\frac{1}{n}$, we derive that

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} \geq 1 + x.$$

For $n > 1$, it holds

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(\frac{1+(n-1)}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \geq e.$$

As $x < 0$, by powering the inequality $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \geq e$ to $-x$, we receive

$$e^{-x} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx}.$$

Furthermore, by powering to the value -1 we get the following

$$e^x \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-nx} \geq 1 + x,$$

what completes the proof.

For the number e it holds

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Let be $x \in \mathbb{R}$. Let be chosen $n_0 \in \mathbb{N}$ so that for each $n > n_0$ the inequality $\left|\frac{x}{n}\right| < 1$ holds.

In accordance with the preceding, the inequality $e^t \geq 1 + t$ holds for any $t \in \mathbb{R}$. Let's pose $t = \frac{x}{n}$, $n > n_0$. Then

$$e^{\frac{x}{n}} \geq 1 + \frac{x}{n} > 0.$$

By powering to n , we receive

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Let be n a natural number greater than $-x$. Then, by substituting for $t = -\frac{x}{n+x}$ (for $n > n_0$ and $n > -x$) into the inequality $e^t \geq 1 + t$, we get

$$e^{-\frac{x}{n+x}} \geq 1 - \frac{x}{n+x}.$$

Next, let's edit the right side

$$1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n+x}{n+x} - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}} > 0.$$

Hence

$$e^{-\frac{x}{n+x}} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.$$

Let us power both sides of the inequality to n . Then

$$e^{-\frac{nx}{n+x}} \geq \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

and from that

$$\frac{1}{e^{\frac{nx}{n+x}}} \geq \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} \Rightarrow e^{\frac{nx}{n+x}} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

By $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{nx}{n+x}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^x.$$

If $n \rightarrow \infty$, then given the continuity of the function $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ g(t) = e^t$, we get

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{nx}{n+x}} = e^x$$

and based on the fundamental characteristics of the limits [4], it holds

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2 Number e is irrational

Finally, we will show that the number e is irrational [3].

Let us consider the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, where $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $n = 1, 2, \dots$. This sequence is an increasing one. Then, for each $n > 2$, it holds

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n > \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{(n-1) \text{ times}} = 2^{n-1}.$$

Hence, $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$. That's implies that $a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$ for any natural number $n > 2$. The sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is therefore also bounded from above. Then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ exists and is equal to $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Now, we will indirectly show that the limit of this sequence is not a rational number.

Let suppose that $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ exists and should be $b > 3$ ($\frac{a}{b}$ does not need to be in a canonical form). For any $n \in \mathbb{N}$ holds that $\frac{a}{b} > 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ and so for $\varepsilon > 0$ due to the definition of the sequence limit, it holds that for all n from a certain starting point that $\left| a_n - \frac{a}{b} \right| = \frac{a}{b} - a_n < \varepsilon$ holds.

Especially, the $\varepsilon = \frac{1}{2(b!)}$ holds for $0 < \frac{a}{b} - a_n < \frac{1}{2(b!)}$ big enough n (hence, we can already assume that $b < n$). Then

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{b!} \right) - \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{1}{2(b!)}.$$

We multiply it by a number $b!$ and we get

$$b! \left[\frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{b!} \right) \right] - \left[\frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \dots + \frac{b!}{n!} \right] < \frac{1}{2}.$$

Let's mark $c = b! \left[\frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{b!} \right) \right] \geq 1$. For the second element it holds

$$\begin{aligned} & \frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \dots + \frac{b!}{n!} = \\ & = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \dots + \frac{1}{(b+1) \dots n} = \\ & = \frac{1}{b+1} \left[1 + \frac{1}{b+2} + \dots + \frac{1}{(b+2) \dots n} \right] < \frac{1}{b+1} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-b-1}} \right] < \frac{2}{b+1}. \end{aligned}$$

On the basis of this estimate, we are getting $1 \leq c < \frac{1}{2} + \frac{2}{b+1}$.

As $b > 3$, it holds that $1 \leq c < 1$, which is a contradiction and the number to which the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges is not rational.

We can prove now that $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$.

Let be $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$. We will show that $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$.

We already know that $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

We can show that $b_n \leq e$ for any $n \in \mathbb{N}$. Let k is any natural number, however, fixed in the next consideration. Then for any $n \in \mathbb{N}$, $k < n$, it holds

$$\begin{aligned} c_n & = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) < \\ & < 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \dots \cdot \\ & \quad \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < e. \end{aligned}$$

We complete the definition of $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 1$. Then

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \\ &\dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \leq e. \end{aligned}$$

For each natural number n , it holds $a_n < b_n \leq e$. Then for $n \rightarrow \infty$ we get

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq e.$$

Hence, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$ and it means that the number e is irrational.

Conclusion

In the paper we showed the proof that the number e is irrational and introduced some important historical remarks on number e . It can be also shown that the number e is not algebraic but transcendent [3][5].

The number e has a wide range of applications, whether in differential and integral calculus, in physical or economic applications. The number e also has many other interesting properties. For example it can also be expressed in the form of a non-terminating continued fraction [6]

$$e = [2, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots],$$

where $a_{3m} = a_{3m-2} = 1, a_{3m-1} = 2m, m = 1, 2, \dots$. Hence

$$\begin{aligned} e &= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, \dots] = \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}} \end{aligned}$$

and then the irrationality of number e follows from the shape of its development into the continued fraction.

References

[1] Maor E. (1994). *e The Story of a Number*. UK: Princeton University Press, ISBN 0-691-03390-0.

[2] Hablik M. (2011). *5 Million Digits of Euler's Constant e*. Amazon Digital Services LLC, e-book.

[3] Šalát T. (1977). *e*. In: *Matematické obzory 10/1976*. Bratislava: JSMF, p. 43-56.

[4] Allendoerfer O. (1969). *Principles of Mathematics*. US: McGraw-Hill, Inc. ISBN: 9780070013902.

[5] Keng H. L. (1982). *Introduction to Number Theory*. New York: Springer-Verlag, ISBN 3-540-10818-1.

[6] Vít P. (1982): *Řetězové zlomky*. Prague: Mladá fronta.

Futbalové bitky o Britániu

Football Battles of Britain

Ľubomír Rybanský^{a*} – Marek Varga^b

^{a,b}*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constatntine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra*

Received: March 25, 2020; received in revised form: March 30, 2020; accepted: April 1, 2020

Abstract

In the article we connect football with mathematics, or more precisely football with statistics. We chose the most famous football match in the world - the North West derby. These matches between Liverpool FC and Manchester United FC are known as Battle of England or Battle of Britain. By using their results from 1906 (only in the First division and later in Premier League), we want to predict the results of the next matches, or at least the winner. Finally we compared our predictions with the predictions of bookmakers.

Keywords: derby, forecast, model, ordinal regression.

Classification: K80, K90

Úvod

Predpovedanie výsledkov športových udalostí ako sú zápasy alebo turnaje priťahuje pozornosť nielen športových priaznivcov, ale i vedeckej komunity už dlhší čas. Veľkej popularite sa tešia najmä futbalové a tenisové zápasy. V súčasnosti sú navyše k dispozícii pomerne rozsiahle databázy výsledkov, ktoré je možné využiť aj na tvorbu nových metód a modelov predpovedania výsledkov. Presnosť predpovedí nie je iba akademickou otázkou, ale aj pomerne lukratívnym ekonomickým odvetvím, pretože presnejšie predpovede znamenajú väčšie zisky. Predpovedanie v športe prostredníctvom matematického modelovania je komplexná úloha, pri riešení ktorej je potrebné vyriešiť tri čiastkové úlohy: *proces hodnotenia* - stanoviť kvalitu tímov, ktorá sa zväčša stanovuje na základe matematických modelov, *proces predpovedania* - nájsť alebo vytvoriť štatistický model, ktorým budeme predpovedať a *proces testovania* - vhodnými štatistickými testami porovnať predpovede s reálnymi dátami [8]. V snahe o porozumenie procesu predpovedania sa skúmali a porovnávali predpovedné schopnosti rôznych zdrojov predpovedí, ktoré sa dajú vo všeobecnosti rozdeliť do štyroch kategórií:

1. Ľudský úsudok – predpoveď sa stanoví na základe predpovedí respondentov s rôznym stupňom znalostí, napríklad športových expertov.
2. Rebríčky – na odhad výsledkov budúcich stretnutí alebo turnajov sa používajú oficiálne rebríčky ako napríklad Rebríček FIFA vo futbale, alebo Rebríček ATP v tenise.

*Corresponding author; email: lrybansky@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2020.6.1.26-36

3. Matematické modely – predpovede športových udalostí sa vytvárajú pomocou existujúcich alebo nových matematických a štatistických prístupov.

4. Stávkové kurzy – k predpovedi výsledku športovej udalosti sa použijú stávkovými spoločnosťami resp. bookmakeri odhadnuté kurzy.

Často používaným a všeobecne akceptovaným matematickým prístupom k predpovedaniu v športe je ELO systém, ktorý bol pôvodne navrhnutý pre šach a v súčasnosti je používaný aj pre hodnotenie športových tímov ale i hráčov [7]. Hvattum a Arntzen v [5] použitím logistickej regresie rozšírili ELO systém tak, aby bol schopný predikovať pravdepodobnosti výsledkov športových stretnutí, kde sú tri možné výsledky (domáci/remíza/hostí) na základe hodnoty ELO. Tento systém tvorby odhadov dosahoval lepšie výsledky ako Goddardov prístup založený na ordinálnej logistickej regresii [3], ale horšie výsledky ako dosahovali bookmakeri. Je potrebné zdôrazniť, že doteraz navrhnuté modely používajú k predpovedaniam aj výsledky iných stretnutí než iba výsledky dvojice tímov, ktoré sa aktuálne snažia predpovedať.

V našom článku sa zaoberáme vytvorením modelu, ktorý by predpovedal pravdepodobnosti výsledkov stretnutí v „The North West derby“ medzi FC Liverpool a Manchestrom United a to iba výlučne na základe výsledkov ich predchádzajúcich súbojov pri zohľadnení ich aktuálnej formy. Nezameriavame sa však na odhad výsledku stretnutia, ale chceme modelovať pravdepodobnosti možných výsledkov. Naš prístup je založený na ordinálnom regresnom modeli, čo by sme mohli nazvať štandardným prístupom.

V prvej časti článku sa zameriame na históriu derby a v ďalšej zdôvodníme opodstatnenosť premenných z ktorých budeme model zostavovať, zostavíme model a nakoniec porovnáme jeho predikčnú schopnosť na tých derby stretnutiach, ktoré neprispievali k vytvoreniu modelu a to porovnaním s predpoveďami bookmakerov. Nebudeme však porovnávať percentuálnu úspešnosť predpovedí na základe výsledkov, ale porovnáme Brierovo skóre, ktoré je pre tento účel vhodnejším nástrojom.

História „The North West Derby“

Pojmom „North West derby“ sa vo futbalovom svete rozumejú derby* – zápasy medzi historicky najúspešnejšími anglickými klubmi ležiacimi na severozápade tejto krajiny, a to Liverpool Football Club (ďalej LFC) a Manchestrom United Football Club (ďalej MU). Hoci tieto futbalové kluby vznikli v rokoch 1892 resp. 1902, súperenie týchto miest vzniklo už v dobách priemyselnej revolúcie (prelom 18. – 19. st.) – Liverpool bol prístav, a teda mal geografickú

*Ako derby zápasy sa označujú v športe najmä dlhoročné súperenia rivalov z jedného mesta, napr. „Old Firms derby“ (najstarší Celtic Glasgow – Glasgow Rangers), „derby dellacapitale“ (AS Roma – SS Lazio), „derby della Madonina“ (AC Milan – Internazionale Milano), „večiti derby“ (Partizan Beograd – Crvena zvezda Beograd), „intercontinental derby“ (Galatasaray Istanbul – Fenerbahce Istanbul), či najslávnejšie mimoeurópske „Superclasico“ (Boca Juniors Buenos Aires – River Plate Buenos Aires). Tieto už nezriedka vyše storočné súperenia boli dané už v okamihu vzniku spomentých klubov – niektoré reprezentujú chudobnú časť mesta, niektoré bohatšie štvrte, niekedy sú v hre náboženské rozdiely. Neskôr sa ako derby začali označovať aj zápasy medzi nezmieriteľnými rivalmi, ktoré vznikali medzi najúspešnejšími klubmi v daných krajinách. Z tých najslávnejších sem môžeme zaradiť „derby d’Italia“ (Juventus Torino – Internazionale Milan), „der Klassiker“ (Bayern Munchen – Borussia Dortmund), „elclasico“ (FC Barcelona – Real Madrid), „leClassique“ (Paris Saint-Germain – Olympique de Marseille), „nieuwe Klassieker“ (Ajax Amsterdam – PSV Eindhoven), či napokon nami vybraný zápas LFC – MU (podľa údajov z roku 2011 išlo o najsledovanejší zápas sveta vysielaný do 211 krajín [12])

Vo všeobecnosti sú tieto zápasy známe tým, že málokedy závisí ich výsledok od momentálnej formy, či postavenia v tabuľke – oveľa väčší vplyv má v samotnom stretnutí sústredenie hráčov na zdolanie (nebojíme sa použiť slovo) nenávideného protivníka.

výhodu pri obchodovaní so svetom. Koncom 19. st. však vybudovali lodný kanál až priamo do Manchestru (vzdialeného menej ako 60 km), čo nepriaznivo ovplyvnilo zamestnanosť a rozvoj Liverpoolu.

Prvoligové súperenie v najvyššej anglickej futbalovej súťaži sa začalo 25.12.1906 na štadióne Bank Street bezgólovou remízou a len nedávno (19.1.2020) sa dočkalo svojho 170 pokračovania, v ktorom boli úspešnejší hráči LFC na svojom domovskom stánku Anfield v pomere 2:0. V týchto súbojoch sú zatiaľ mierne úspešnejší hráči z Manchestru, ktorí zvíťazili v 66 stretnutiach, kým ich súper iba v 56 stretnutiach. Remízou, ale sotva zmierlivo sa rozišli v 48 prípadoch. United sú úspešnejší aj počte strelených gólov (229:210). Na tomto mieste musíme poznamenať, že do nášho modelu sme použili len výsledky z prvoligových zápasov (prvá liga sa v Anglicku nazývala First Division, od 1992 Premier League), hoci LFC a MU sa stretli samozrejme i v anglických pohároch a dokonca aj v európskej pohárovej súťaži.

Ak vyberieme zápasy s vysokým skóre, v LFC zrejme radi spomínajú na výhry 7 : 4 či 5 : 0, fanúšikom MU sa zrejme páčili zápasy s výhrami 6 : 1 či 4 : 0. Zaujímavejšie je spomenúť dva zápasy, ktoré skončili stavom 3 : 3. Prvý sa odohral v sezóne 1987/88, keď sa majstrom stal LFC, ale oslavy mu remízou naštrbil tradičný rival, hoci MUFC už prehrával 1 : 3. Zrkadlová situácia nastala v roku 1998, keď sa majstrom stal MU – vo vzájomnom zápase viedol už 3 : 0 po 25 minútach, ale LFC žiadnu potupu nedovolil, a napokon remizoval (hoci v tabuľke skončil až na 8. mieste).



Zdroj:

https://en.wikipedia.org/wiki/Liverpool_F.C



Zdroj

[https://en.wikipedia.org/wiki/Manchester_United_F.C.](https://en.wikipedia.org/wiki/Manchester_United_F.C)

Rivalita medzi klubmi sa samozrejme prenáša do vzťahov medzi hráčmi. Od roku 1964 sa neuskutočnil žiadny transfer medzi týmito klubmi (aj keď sú známe výnimočné prechody cez tretí klub), hráči určite nemajú záujem byť označení v choráloch fanúšikov za „zradcov“ resp. „judášov“. Vzhľadom na kvalitu klubov treba priznať, že ak sa niekto už stal legendou LFC či MU, automaticky šlo aj o legendu svetového futbalu (spomeňme aspoň mená Best, Keegan, Dalglish, Cantona, Giggs, Gerrard...). Všetci hráči samozrejme priznávajú, že North West derby

je oveľa dôležitejší zápas ako ich lokálne derby, t.j. „Manchester derby“ (MU – Manchester City) a „Merseyside derby“ či „friendly derby“ (nenechajme sa však pomýliť názvom, v zápasoch LFC – Everton Liverpool je historicky najvyšší počet červených kariet v Premier League). Zo všetkých príbehov snáď stačí spomenúť posledný štart legendy LFC Stevena Gerrarda („captain fantastic“), ktorý vystriedal do druhého polčasu premotivovaný a do červenej karty strávil na ihrisku 38 sekúnd...

Samostatnou kapitolou tejto rivality sú fanúšikovia oboch tímov. Tento text však naozaj nie je vhodným miestom na to, aby sme mohli popísať chorály určené nenávideným súperom, a tak sa radšej vrátíme k najväčším historickým úspechom oboch klubov. LFC vyhral 18 krát anglickú ligu, 6 krát európsku ligu majstrov, celkovo má vo vitríne 63 trofejí. MU bol 20 krát majstrom ligy, 3 krát európskym majstrom, celkovo vlastní 66 víťazných pohárov.

V článku sme sa pokúsili odhadnúť výsledky týchto zápasov, niekedy nazývaných aj „Bitka o Britániu“, pomocou istých vstupných údajov. Keďže ľahko nájdeme v histórii nečakané prekvapenia, zaváhania favoritov či víťazstvá jasných outsiderov, namodelovať rezultáty North West derby rozhodne nebude štandardnou úlohou...

Pravdepodobnosti a model ordinálnej regresie

Stávkové kancelárie štandardne neinformujú o šanciach tímov uvedením pravdepodobnosti výsledku stretnutia, ale formou kurzov. Napríklad v poslednom stretnutí LFC a MU, ktoré sa 19. januára 2020 na Anfield Road skončilo víťazstvom domácich 2:0, boli stávkovou kanceláriou Bet365 vypísané kurzy 1,45-4,68-7,49. Je zrejmé, že nižší kurz má udalosť, ktorá je pravdepodobnejšia a opačne vyšší kurz má udalosť, ktorá je menej pravdepodobná. Z kurzu k vieme veľmi jednoducho vypočítať tzv. *implikovanú pravdepodobnosť* udalosti p pomocou vzťahu $p = 1/k$. Pre uvedené kurzy by to znamenalo, že implikovaná pravdepodobnosť víťazstva LFC bola $\frac{1}{1,45} = 0,69$, implikovaná pravdepodobnosť remízy bola $\frac{1}{4,68} = 0,21$ a implikovaná pravdepodobnosť víťazstva MU bola $\frac{1}{7,49} = 0,13$. Avšak súčet uvedených implikovaných pravdepodobností $0,69 + 0,21 + 0,13 = 1,04$ presahuje hodnotu 1. Hodnota, o ktorú súčet implikovaných pravdepodobností presahuje hodnotu 1 presahuje, predstavuje zisk stávkovej kancelárie z celkovej prestávkovanej sumy (nazýva sa *vigorish* alebo skrátene *vig*), čo sú v tomto prípade 4%. Opačný proces, teda stanovanie kurzu z odhadnutej implikovanej pravdepodobnosti je zrejmy, avšak pri udalostiach, ktorých pravdepodobnosť je veľmi vysoká sa kurz stanovuje inak. Details možno nájsť napríklad v článku [4].

Na modelovanie pravdepodobnosti výsledku futbalového stretnutia, ktoré sa môže skončiť tromi rôznymi výsledkami, ako funkcie premenných vzťahujúcich sa k tomuto stretnutiu, je možné použiť ordinálnu logistickú regresiu. Model ordinálnej regresie, ktorý uvedieme, je spracovaný podľa [1] a [6].

Ak modelujeme ordinálnu závisle premennú y s r usporiadanými kategóriami, tak táto môže vzniknúť zo spojitaj náhodnej premennej y^* a z prahov $\theta_0, \dots, \theta_r$ tak, že

$$y = j \text{ ak } \theta_{j-1} \leq y^* < \theta_j; j = 1, 2, \dots, r.$$

Hovoríme, že premenná y je kategorizovaná verzia premennej y^* . Napríklad, ordinálna výstupná premenná „Výsledok futbalového stretnutia“ je reprezentovaná ako ohraničená verzia pôvodnej premennej vyjadrujúcej rozdiel v počte strelených gólov súperiacich tímov.

Model pre ordinálnu premennú y môžeme vyjadriť kumulatívnymi pravdepodobnosťami τ_j :

$$\tau_j \equiv P(y \leq j) = P(y^* < \theta_j), \quad j = 1, \dots, r.$$

Cieľom je nájsť vzťah medzi kumulatívnymi pravdepodobnosťami τ_j a vysvetľujúcimi premennými x_1, x_2, \dots, x_k .

Predpokladáme, že $y^* = -x'\beta + \varepsilon$, s $E(\varepsilon) = 0$, z čoho vyplýva, že $E(y^*) = -x'\beta$ a teda

$$\tau_j = P(\varepsilon \leq \theta_j + x'\beta).$$

Presný tvar modelu je určený rozdelením ε .

V prípade, že ε má štandardizované logistické rozdelenie:

$$P(\varepsilon \leq x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

hovoríme o kumulatívnom logistickom modeli resp. o modeli proporcionálnych šancí.

Potom

$$\tau_j = P(\varepsilon \leq \theta_j + x'\beta) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_j + x'\beta)}}, \quad (1)$$

a odtiaľto

$$\ln \frac{\tau_j}{1 - \tau_j} = \theta_j + x'\beta, \quad j = 1, \dots, r - 1, \quad (2)$$

kde θ_j sú absolútne členy, ktoré závisia iba od j ak koeficient β nezávisí od j , tak všetkých $r - 1$ modelov v (2) má vzhľadom k vysvetľujúcej premennej x rovnakú smernicu. Po odhade parametrov modelu získame odhady pravých strán v (2) z ktorých vypočítame pravdepodobnosti $P(y = j)$ hodnôt náhodnej premennej y

$$P(y = j) = P(y \leq j) - P(y \leq j - 1) = \hat{\tau}_j - \hat{\tau}_{j-1}.$$

Hodnotenie kvality modelu logistickej regresie sa dá posúdiť rôznymi metódami. Na testovanie zhody dát s modelom predikovanými hodnotami sa používa *Hosmer-Lemeshowov test* (ak sú vysvetľujúce premenné spojité), prípadne *Pearsonov chí-kvadrát test*. Testom *pomerom vierohodnosti* (LR test) testujeme, či je vhodné do modelu zahrnúť ďalšie parametre. V situácii keď sa rozhodujeme o výbere najvhodnejšieho z viacerých vzájomne si konkurujúcich modelov, je výhodné použiť informačné kritériá, prípadne štatistiku *deviance*, ktorá je definovaná ako záporne vzatý dvojnásobok rozdielu logaritmu vierohodnosti odhadovaného modelu a logaritmu vierohodnosti saturovaného modelu. Najčastejšie využívanými sú *Akaikeho informačné kritérium* (AIC) a *bayesovské informačné kritérium* (SIC), pre ktoré platí, čím menšia hodnota, tým lepší model.

Na stanovenie úspešnosti predpovedí v N položkách, z ktorých každá predpoveď je vyjadrená R -ticou pravdepodobností, ktorej každý člen f_{ti} , $t = 1, \dots, N$; $i = 1, \dots, R$ vyjadruje odhadovanú pravdepodobnosť nastania každej z R možných udalostí sa *Brierovo skóre* B , ktoré je definované vzťahom

$$B = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^R (f_{ti} - o_{ti})^2,$$

kde o_{ti} je binárna premenná nadobúdajúca hodnotu 1, ak sa v t -tej položke realizovala i -ta udalosť a hodnotu 0, ak sa realizovala iná ako i -ta z R -tice možných udalostí. Čím nižšia je hodnota Brierovho skóre, tým presnejšie sú predpovede. Minimálna a súčasne najlepšia hodnota Brierovho skóre je 0. Maximálna hodnota pre binárne položky je 1 a pre položky s tromi možnými výsledkami 2. Bez ohľadu na počet možných výsledkov, je možné Brierovo skóre upraviť tak, aby bola maximálna hodnota rovná 1.

Výstavba modelu a dáta

Pri zostavovaní vhodného modelu sme vychádzali zo 160 stretnutí medzi LFC a MU, pričom desať stretnutí z posledných 26 zápasov sme náhodne vybrali pre porovnanie úspešnosti predikčnej schopnosti modelu s predpoveďami bookmakerov. Aby bolo možné porovnanie realizovať, museli sme mať k dispozícii stávkové kurzy pre tieto stretnutia. Najstaršie nám dostupné záznamy z [13]siahajú do sezóny 2007/2008 a to k zápasu hranému 16.12.2007. Spolu to je práve 26 stretnutí, z ktorých sme náhodne vybrali už spomínaných desať. Dodatočné informácie o hracom kole ligového ročníka v ktorom sa tímy stretli a počte získaných bodov do dňa stretnutia v danom ligovom ročníku sme získali z [11].

Naším cieľom je zostaviť model, ktorý by odhadoval pravdepodobnosť výsledku NWD a to iba z historických výsledkov ich vzájomných súperení a aktuálnej formy tímov.

Modelovanou ordinálnou závisle premennou NWD je výsledok stretnutia z pohľadu LFC, ktorá nadobúda tri hodnoty: Liv – víťazstvo Liverpoolu, $Remíza$ – remíza, MU – víťazstvo Manchestru Utd.; $Liv > Remíza > MU$).

Ktoré ukazovatele by mohli byť užitočné pri odhade pravdepodobností výsledkov stretnutia?

Vo futbalových stretnutiach hrá nesporne dôležitú úlohu výhoda domáceho prostredia a nie inak tomu je v North West Derby, pretože LFC má bilanciu v domácom prostredí 38-22-24 a MU dokonca až 42-26-18. Premenná DV vyjadruje, ktorý z tímov bol domácim a nadobúda dve hodnoty: Liv (domácim tímom je LFC) a MU (domácim tímom je MU) Pre zohľadnenie efektu rivality sme uvažovali výsledok posledného vzájomného ligového stretnutia (premenná PZ , ktorá je ordinálna a nadobúda tri hodnoty: Liv – víťazstvo LFC, $Remíza$ – remíza, MU – víťazstvo MU; $Liv > Remíza > MU$). Z historických údajov z pohľadu LFC vyplýva, že po víťazstve v NWD bol LFC v nasledujúcom NWD úspešnejší (25-13-17), po remíze bol mierne úspešnejší MU (15-13-20) a po prehre LFC bol úspešnejší MU (16-21-29). Rozdiel vo výkonnosti tímov v príslušnej sezóne sme vyjadrili premennou $Rozdiel$. Pri jej definovaní sme museli zohľadniť v ktorom kole (hracom dni) súťažného ročníka sa tímy stretli, pretože rozdiel napríklad 12 bodov po dvadsiatom kole a po desiatom kole je kvalitatívne rozdielny. Druhý prípad signalizuje väčší rozdiel vo výkonnosti tímov, než prvý prípad. Ponúka sa tak riešenie, definovať rozdiel vo výkonnosti tímov ako podiel počtu získaných bodov do vzájomného stretnutia a počtu odohratých stretnutí. Tento prístup by však nebol korektný, pretože v roku 1981 sa zmenil bodovací systém z pôvodného: 2 body za výhru, 1 bod za remízu a 0 bodov za prehru, na trojbodový systém: 3 body za výhru, 1 bod za remízu a 0 bodov za prehru. Preto sme namiesto bodového rozdielu uvažovali $rozdiel$ vyjadrený v počte zápasov, ktorý by pri odstupe 12 bodov pri dvojbodovom systéme predstavoval šesť stretnutí, ale pri trojbodovom systéme iba štyri stretnutia. Premennú $Rozdiel$ sme zaviedli ako podiel $rozdielu$ vyjadreného v zápasoch a počtu odohratých stretnutí do vzájomného stretnutia. Kladné hodnoty premennej $Rozdiel$ zodpovedajú prípadom keď mal v tabuľke navrch LFC a záporné zasa prípadom keď bol úspešnejší MU.

Pri výstavbe modelu sme uvažovali aj o interakciách premenných, ktoré je možné teoreticky zdôvodniť nasledovne:

- $DV \times PZ$ - efekt domáceho prostredia sa môže vzhľadom na výsledok posledného vzájomného stretnutia líšiť, pretože je zrejmé rozdiel v tom, či bolo posledné víťazstvo dosiahnuté doma alebo vonku,
- $DV \times Rozdiel$ - ten istý výkonnostný rozdiel môže mať iný vplyv na šance tímov v domácom a v súperovom domácom prostredí,
- $PZ \times Rozdiel$ - pri tejto interakcii by sa uplatňoval iný efekt rozdielu vo výkonnosti vzhľadom na výsledok posledného vzájomného stretnutia.

Hodnoty kritérií (deviance a AIC) pre viacero uvažovaných modelov sú uvedené v tabuľke 1. Ukazuje sa, že najnižšie hodnoty a teda za najlepší spomedzi uvažovaných modelov môžeme považovať model v ktorom vystupujú všetky tri uvažované premenné (DV , $Rozdiel$, PZ) spolu s interakciou domáceho prostredia a výsledkom posledného vzájomného stretnutia.

Tab. 1: Výber modelu pre výsledok NWD. Najlepší model je hrubo zvýraznený. (Δ - deviance, AIC - hodnota Akaikeho informačného kritéria)

Model	Δ	AIC
DV	344,96	350,96
PZ	354,43	359,43
Rozdiel	347,03	353,03
DV+PZ	329,60	339,60
DV+Rozdiel	336,48	345,48
PZ+Rozdiel	340,62	350,62
DV+PZ+Rozdiel	328,21	340,21
DV+PZ+Rozdiel+DV×PZ	321,81	337,81
DV+PZ+Rozdiel+DV×Rozdiel	326,96	340,96
DV+PZ+Rozdiel+PV×Rozdiel	327,55	343,55
DV+PZ+Rozdiel+DV×PZ+DV×Rozdiel	321,12	339,12
DV+PZ+Rozdiel+DV×PZ+PZ×Rozdiel	321,29	341,29
DV+PZ+Rozdiel+PZ×Rozdiel+DV×Rozdiel	326,02	344,02
DV+PZ+Rozdiel+DV×PZ+PZ×Rozdiel+DV×Rozdiel	320,45	342,45

Model pre odhad pravdepodobností výsledkov NWD

Pre model, ktorý sme na základe AIC a hodnoty deviance vybrali ako najlepší, sme odhadli parametre, ktorých hodnoty, štatistickú významnosť a 95% intervaly spoľahlivosti uvádzame v tabuľke 2.

Tab. 2: Výsledok NWD, ordinálna regresia.

		$\hat{\beta}$	SE	$OR = e^{\hat{\beta}}$	t	p	-95%	+95%
Abs. člen 1 (MU)		-0,05	0,21	0,96	-0,21	0,834		
Abs. člen 2 (Remíza)		1,28	0,24	3,59	5,31	<0,001		
DV	1							
MU	0	0,00	0,00	1,00				
Liv	1	1,10	0,32	3,02	3,46	0,001	1,63	5,71
PZ	2							
MU	0	0,00	0,00	1,00				
Remíza	1	0,05	0,37	1,05	0,12	0,901	0,51	2,17
Liv	1	-0,23	0,36	0,79	-0,66	0,511	0,39	1,59
Rozdiel	1	0,83	0,65	2,28	1,27	0,203	0,66	8,47
DV x PZ	2							
Liv, MU	0	0,00	0,00	1,00				
Liv, Remíza	1	1,21	0,53	3,34	2,26	0,024	1,19	9,68
Liv, Liv	1	0,66	0,56	1,94	1,18	0,239	0,64	5,88

($\hat{\beta}$ – odhad parametra β , SE – štandardná chyba odhadu parametra β , OR – pomer šancí, t – testová štatistika Waldovho testu štatistickej významnosti parametra, p – p hodnota pre Waldov test, -95% - dolná hranica 95% intervalu spoľahlivosti pre OR, +95% - horná hranica 95% intervalu spoľahlivosti pre OR).

Z analýzy 160 vzájomných stretnutí NWD ordinálnou regresiou pre závisle premennú *NWD* s úrovňami: MU ($j = 1$), Remíza ($j = 2$), Liv ($j = 3$) vyplýva, že kumulatívne pravdepodobnosti $\tau_j, j = 1, 2, 3$, ktoré sú modelované premennými *PZ*, *DV* a *Rozdiel* sú

$$\ln \frac{\hat{\tau}_j}{1 - \hat{\tau}_j} = \hat{\theta}_j + 1,10x_1 + \dots + 0,66x_6, \quad j = 1, 2, 3,$$

kde $\hat{\theta}_1 = -0,05$ (víťazstvo MU), $\hat{\theta}_2 = 1,28$ (remíza). Premenná x_1 je indikátorová premenná pre domáci tím, x_2, x_3 pre výsledok posledného vzájomného zápasu, x_4 pre rozdiel vo výkonnosti a x_5, x_6 pre interakciu domáceho prostredia a výsledku posledného vzájomného stretnutia.

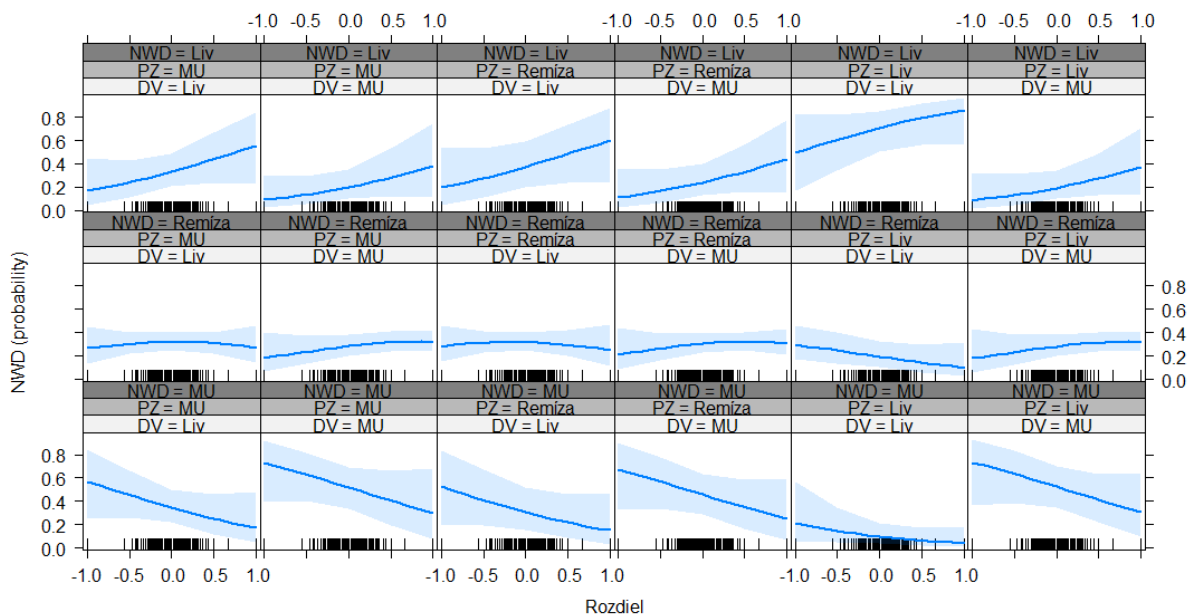
Výsledok NWD menší ako j , pre $j = 1, 2$, znamená buď prehru Liverpoolu ($j = 1$), alebo remízu, prehru LFC, $j \leq 2$.

Ukazuje sa, že výkonnostný rozdiel jednej "jednotky" premennej *rozdiel* má pre LFC za následok 2,28 násobné (o 128%) zvýšenie šance dosiahnuť výsledok j alebo lepší.

Keďže model obsahuje interakciu domáceho prostredia a výsledku posledného vzájomného stretnutia, tak efekt týchto premenných musíme vyhodnotiť súčasne. Referenčnou kategóriou pre domáce prostredie je *MU* a pre výsledok posledného vzájomného stretnutia je víťazstvo *MU* (najnižšia kategória z pohľadu Liverpoolu). Potom napríklad šanca, že LFC v domacom prostredí po víťazstve v predchádzajúcom vzájomnom súboji dosiahne výsledok j alebo lepší,

je $3,02 \times 0,79 \times 1,94 = 4,64$ krát väčšia v porovnaní s tým, ak predchádzajúci vzájomný zápas vyhrali hráči MU a nasledovný zápas by hrali v domácom prostredí.

Z praktického hľadiska je však názornejšie uviesť priamo pravdepodobnosti hodnôt modelovanej závisle premennej v závislosti od hodnôt prediktorov. Tieto uvádzame v grafickej podobe na obrázku 1. Môžeme si všimnúť, že pravdepodobnosť nerozhodného výsledku sa nezávisle od toho, ktorý z tímov hrá v domácom prostredí a akým výsledkom sa skončil posledný vzájomný zápas, pohybuje približne na úrovni 0,3 a výraznejší vplyv na ňu nemá ani rozdiel vo výkonnosti tímov. Pravdepodobnosť víťazstva LFC sa bez ohľadu na hodnoty zvyšných dvoch prediktorov so zvyšujúcim sa výkonnostným rozdielom medzi tímami zvyšuje (horná šesťica grafov na obrázku) a naopak pravdepodobnosť prehry sa znižuje (dolná šesťica grafov na obrázku). Neprekvapuje, že pravdepodobnosť výhry LFC podľa zostaveného modelu je najväčšia v prípade, že sa hrá na Anfield Roade a predchádzajúci zápas dopadol lepšie pre "The Reds".



Obr. 1: Modelom predikované pravdepodobnosti výsledku NWD v závislosti od hodnôt prediktorov.

Hosmer – Lemeshowov test ($\chi^2(17) = 10,45; p = 0,883$) indikuje, že medzi pozorovanými a modelom odhadovanými početnosťami nie je rozdiel, čiže model vykazuje s dátami dobrú zhodu. Nagelkerkeov koeficient pseudo- R^2 nadobúda hodnotu 0,18.

Porovnanie predikcií modelu a bookmakerov

Predikčnú schopnosť modelu sme skúmali na desiatich náhodne vybraných stretnutiach z obdobia rokov 2008-2018 ku ktorým sme vedeli dohľadať aj predikcie bookmakerov. V databázach kurzov pre anglickú Premier League na internetovej stránke [13] sa nachádzajú kurzy viacerých stávkových kancelárií: Bet365, BlueSquare, Bet&Win, Gamebookers, Interwetten, Ladbrokes, Pinnacle, SportingOdds, Sportingbet, Stan James, Stanleybet, VC Bet, William Hill. Nie je prekvapujúce, že odhady bookmakerov z rôznych stávkových kancelárií nie sú totožné, ale rozdiely nebývajú veľké. Z tohto dôvodu sme náhodne vybrali dve z týchto kancelárií (Bet365, Pinnacle) pre ktoré sme zo zverejnených kurzov po zohľadnení vig vypočítali nimi odhadované pravdepodobnosti výsledkov. Tieto sú spolu s odhadmi výsledkov získanými našim modelom uvedené v tabuľke 3.

Tab.3: Pravdepodobnosti výsledkov v desať náhodne vybraných stretnutiach odhadnutých nami vytvoreným modelom a stanovených bookmakermi (Bet365, Pinnacle). (1 - pravdepodobnosť víťazstva domáceho tímu, X – pravdepodobnosť nerozhodného výsledku, 2 – pravdepodobnosť víťazstva hosťujúceho tímu).

Dátum	Zápas	Skóre	Model			Bet365			Pinnacle		
			1	X	2	1	X	2	1	X	2
23.3.2008	MU-LIV	3–0	0,54	0,28	0,18	0,48	0,28	0,24	0,48	0,30	0,22
13.9.2008	LIV-MU	2–1	0,40	0,32	0,28	0,33	0,31	0,36	0,34	0,32	0,34
25.10.2009	LIV-MU	2–0	0,63	0,24	0,13	0,39	0,30	0,32	0,38	0,30	0,32
6.3.2011	LIV-MU	3–1	0,23	0,30	0,47	0,31	0,28	0,41	0,34	0,30	0,37
11.2.2012	MU-LIV	2–1	0,45	0,31	0,25	0,51	0,28	0,21	0,53	0,26	0,21
23.9.2012	LIV-MU	1–2	0,16	0,26	0,58	0,31	0,29	0,40	0,36	0,29	0,35
17.1.2016	LIV-MU	0–1	0,28	0,32	0,40	0,39	0,29	0,31	0,39	0,29	0,32
17.10.2016	LIV-MU	0–0	0,34	0,32	0,34	0,46	0,28	0,27	0,45	0,28	0,28
14.10.2017	LIV-MU	0–0	0,27	0,31	0,42	0,38	0,28	0,35	0,38	0,28	0,34
16.12.2018	LIV-MU	3–1	0,38	0,32	0,30	0,62	0,22	0,16	0,64	0,22	0,14

Vidíme, že napríklad pre stretnutie hrané 25.10.2009 model odhadol pravdepodobnosť víťazstva domáceho tímu ako pomerne vysokú (0,63) v porovnaní s bookmakermi, kým 23.9.2012 odhadol šance domáceho tímu výrazne nižšie ako bookmakeri. Podobnosť medzi modelom a bookmakermi je zrejmá pri odhade pravdepodobnosti nerozhodného výsledku, ktorá sa bez ohľadu na to, ktorý tím je domáci, pohybuje v rozpätí 0,24-0,32 pre náš model a 0,22-32 pre bookmakerov a vykazuje tak pomerne nízku variabilitu. Z hľadiska porovnania predikcií je však rozhodujúcim ukazovateľom Brierovo skóre, ktoré dosahuje hodnotu 0,26 pre odhady získané modelom a hodnotu 0,29 pre odhady oboch stávkových kancelárií. Model v porovnaní s dvojicou stávkových kancelárií dosahuje v desiatich náhodne vybraných stretnutiach mierne lepšiu predikčnú schopnosť.

Záver

V článku sme sa zaoberali modelovaním pravdepodobností výsledku „Bitky o Britániu“, ktorá sa už viac než jedno storočie odohráva na futbalových trávnikoch. Ide o jedno z najslávnejších futbalových derby na svete. Nami zvolený prístup k modelovaniu sa od štandardných prístupov líši v tom, že zostavený model využíva výlučne údaje pochádzajúce z duelov týchto tímov. Napriek tomu, že vytvorený model bol mierne presnejší ako odhady bookmakerov, tak je potrebné vziať do úvahy skutočnosť, že porovnávací vzorec bola veľmi malá. Model neberie do úvahy iné ukazovatele, ako napríklad hráčska maródka alebo vyťaženosť tímov v rámci sezóny, ktoré pri odhadoch využívajú bookmakeri. Tieto a iné aktuálne informácie nezahrnuté do modelu mohli byť dôvodom prečo sa naše odhady líšili od odhadov bookmakerov, čo však nechápeme ako nedostatok, ale dôsledok inakosti tvorby modelov. Autorom článku nie je z literatúry, ani iných zdrojov známe, že v článku prezentovaný postup by už realizovali iní autori.

Literatúra

1. Agresti, A. 2002. *Categorical data analysis 2nd edition*. New York: John Wiley and Sons.
2. Forrest, D., Goddard, J., Simmons, R. 2005. *Odds-setters as forecasters. The case of English football*. International Journal of Forecasting 21 (3): 551-564.

3. Goddard, J. 2005. *Regression models for forecasting goals and match results in association football*. International Journal of Forecasting 21 (2): 331-340.
4. Graham, I., Stott, H. 2008. *Predicting bookmaker odds and efficiency for uk football*. Applied Economics, 40:99–109.
5. Hvattum, L. M., Arntzen, H. 2010. *Using ELO ratings for match result prediction in association football*. International Journal of Forecasting 26 (3): 460-470.
6. de Jong, P., Heller, G. Z. 2008. *Generalized linear models for insurance data*. Cambridge University Press.
7. Lasek, J., Szlávík, Z., Bhulai, S. 2013. *The predictive power of ranking systems in association football*. International Journal of Applied Pattern Recognition, 1 (1), 27-46.
8. Wunderlich, F., Memmert, D. 2018. *The Betting Odds Rating System: Using soccer forecasts to forecast soccer*. PLoS ONE 13(6):e0198668. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0198668>
9. <https://www.eloratings.net/>
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Liverpool_F.C.%E2%80%93Manchester_United_F.C._rivalry
11. <https://www.enfa.co.uk/>
12. <https://www.dailymail.co.uk/sport/football/article-2049908/211-countries-tuned-watch-Liverpool-vs-Manchester-United.html>
13. <https://www.football-data.co.uk/englandm.php>

Tajomstvá skryté v Pascalovom trojuholníku Secrets in Pascal's Triangle Hidden

Miroslav Chválny^a

^{a1}*Stredná priemyselná škola stavebná, Cabajská 4, 950 50 Nitra, Slovakia*

Received October 30, 2019; received in revised form March 27, 2020; accepted April 4, 2020

Abstract

In this article we deal with some numerical sequences in Pascal's triangle and also in its modification called harmonic triangle. Both objects are interconnected by different properties and relationships, from which we focus on infinite number series on diagonals.

Keywords: Pascal's triangle, harmonic triangle, sequence, infinite number series

Classification: 97A20

Úvod

Pascalov trojuholník sa v matematike preslávil vďaka svojej symetrii a rôznymi vzťahmi medzi kombinačnými číslami. Množstvo prepojení Pascalovho trojuholníka s viacerými disciplínami matematiky z neho urobilo zaujímavý matematický objekt. Cieľom tohto článku je poukázať na niektoré vlastnosti, vzťahy a skryté „tajomstvá“.

Trochu z histórie

Samotný Blaise Pascal (1623-1662) v roku 1653 poznamenal, že by pravdepodobne nevedel opísať v jednej práci všetky jeho vlastnosti. [1] Poznamenávame, že Blaise Pascal tento trojuholník neobjavil. Uvedený trojuholník bol známy už čínskym učencom v 13. storočí n. l. Hoci tabuľku binomických koeficientov poznali už indickí matematici okolo 2. storočia pred n. l, v skutočnosti ho asi ako prvý zostavil čínsky matematik Jia Xian v 11. storočí a okolo roku 1100 aj perzský matematik a básnik Omar Chajjám. V Európe použil variáciu Pascalovho trojuholníka prvýkrát Petrus Apianus v roku 1527, učiteľ Karola IV., a binomickú vetu pravdepodobne ako prvý uviedol nemecký mních, reformátor a matematik Michael Stifel (1486-1597). [2]

Blaise Pascal dokončil odvodenie binomickej vety s použitím číselného trojuholníka až ako 30-ročný. Vtedy už mal na konte niekoľko objavov o vákuu a jednou z jeho najznámejších prác je *Traité du triangle arithmétique* (Pojednanie o aritmetickom trojuholníku), ktoré vyšlo v roku 1654. Obsahuje jednoduchý spôsob, ako vyčísliť kombinačné číslo $\binom{n}{m}$. Využitím vzťahu

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1},$$

¹Corresponding author; email: mchvalny@stonline.sk
DOI: 10.17846/AMN.2020.6.1.37-50

kde $n, m, n \geq m + 1$ sú prirodzené čísla, je možné kombinačné čísla usporiadať do trojuholníkovej schémy, ktorú dnes poznáme pod názvom *Pascalov trojuholník*.

				1												
			1	1												
		1	2	1												
	1	3	3	1												
	1	4	6	4	1											
	1	5	10	10	5	1										
	1	6	15	20	15	6	1									
	1	7	21	35	35	21	7	1								
	1	8	28	56	70	56	28	8	1							
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1

Obr. 1: Pascalov trojuholník. Zdroj: [3]

Zostavenie Pascalovho trojuholníka je veľmi jednoduché.

Jednotlivé polia trojuholníka sa vyplnia podľa pravidla, kde každé číslo je súčtom dvoch políčok nad daným číslom.

Začína sa tak, že do prvého riadka napíšeme číslo 1. Druhý riadok sa skladá z dvoch polí, v ktorých sú opäť len jednotky. Tretí riadok má tri políčka, pričom končí a začína jednotkou (tak končí a začína každý riadok) a prostredné políčko bude doplnené o číslo 2, ktoré je súčtom políčok nad ním.

Podobne postupujeme v ďalších riadkoch; začíname a končíme riadok číslami 1, ostatné políčka sú súčtom dvoch políčok nad ním, ako sme už spomenuli.

Niektoré vlastnosti Pascalovho trojuholníka

Pascalov trojuholník má celý rad zaujímavých vlastností. Niektoré z nich si uvedieme bez dôkazov.

1. Každý vodorovný riadok začína a končí číslom 1: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2. Začínajúc druhým vodorovným riadkom medzi dvoma číslami leží v nasledujúcom riadku ich súčet: $\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \binom{n}{m}$.
3. Pascalov trojuholník je súmerný podľa zvislej priamky p prechádzajúcej jeho „vrcholom“: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.
4. Súčet kombinačných čísel $(n+1)$ -vého vodorovného riadku sa rovná 2^n

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

5. Ak sčítame v Pascalovom trojuholníku všetky čísla, ktoré ležia v tom istom šikmom riadku až do n -tého vodorovného riadku vrátane, dostaneme ako súčet číslo, ktoré leží v $(n + 1)$ -vom vodorovnom riadku najbližšie napravo od posledného sčítanca.

Napríklad, ak zvolíme $(m + 1)$ -vý šikmý riadok, v ktorom sa nachádzajú čísla $\binom{m}{m}$, $\binom{m+1}{m}$, $\binom{m+2}{m}$, $\binom{m+3}{m}$, ..., $\binom{m+p}{m}$, ... potom pre ich súčet platí $\sum_{k=m}^{m+p} \binom{k}{m} = \binom{m+p+1}{m+1}$. Toto číslo leží šikmo vpravo najbližšie pod posledným sčítancom $\binom{m+p}{m}$.

6. Súčet druhých mocnín kombinačných čísel $(n + 1)$ -vého vodorovného riadku Pascalovho trojuholníka sa rovná kombinačnému číslu $\binom{2n}{n}$.

Pripomeňme si, že grécka matematika bola geometrická. Gréci si čísla, ktorým dnes hovoríme prirodzené, predstavovali obvykle prostredníctvom nejakých pomocných javov. Napríklad kôpku kamienkov zoskupovali do geometrických útvarov pripomínajúcich trojuholník, štvorec alebo päťuholník. Dnes sa táto interpretácia čísla nazýva figurálne číslo. [4]

V Pascalovom trojuholníku sa objavujú figurálne čísla asi takto:

- na prvej diagonále sú jednotky,
- na druhej diagonále sú zhora nadol usporiadané vzostupne prirodzené čísla,
- na tretej diagonále sú tzv. trojuholníkové čísla: 1, 3, 6, 10, ..., (ich geometrické usporiadanie do „kamienkových trojuholníkov“ je na obr. 2),
- na štvrtej diagonále nájdeme tetrahedrálne čísla: 1, 4, 10, 20, 35, ...,
- na piatej diagonále sú pentachorónne čísla: 1, 5, 15, 35, ..., atď.



Obr. 2: Figurálne čísla. Zdroj: [5]

Číselné postupnosti v Pascalovom trojuholníku

V ďalšej časti článku sa zameriame na hľadanie zaujímavých trojíc čísel, resp. konečných postupností v príslušných riadkoch Pascalovho trojuholníka.

Aritmetické triplety

Hľadáme v Pascalovom trojuholníku také trojice kombinačných čísel idúcich v jednom riadku za sebou, ktorých stredný člen je aritmetickým (resp. geometrickým, harmonickým) priemerom svojich susedných členov.

Budeme hovoriť o trojčlenných aritmetických (resp. geometrických, či harmonických) postupnostiach), skrátene o aritmetických tripletoch (resp. geometrických, či harmonických tripletoch).

Ak sa detailnejšie pozrieme na ôsmy riadok ($n = 7$)

$$1, \underline{7}, \underline{21}, \underline{35}, \underline{35}, \underline{21}, \underline{7}, 1,$$

zistíme, že je zaujímavý tým, že čísla 7, 21, 35 tvoria konečnú rastúcu trojčlennú aritmetickú postupnosť, pričom čísla 35, 21, 7 v druhej časti riadku predstavujú klesajúci aritmetický triplet.

Prirodzene sa vynára niekoľko otázok. Existujú ďalšie riadky obsahujúce trojčlenné aritmetické postupnosti? Ak áno, tak koľko ich existuje? Ako zistíme ich členy? Existujú viacčlenné aritmetické postupnosti? Pokúsme sa dať odpovede na tieto otázky.

Predpokladajme, že existujú také $n, k \in \mathbb{N}$, že trojica čísel

$$\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$$

tvorí aritmetický triplet. To znamená, že hľadáme také prirodzené čísla n, k (pre $1 \leq k \leq n-1$), že platí

$$2 \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k+1}.$$

Využitím známej definície kombinačného čísla dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} 2 \frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ 2 \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} &= \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)}{(k-1)!} + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Po vynásobení poslednej rovnice výrazom $\frac{(k+1)k(k-1)!(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}$ dostaneme po úprave kvadratickú rovnicu s neznámou k a parametrom n :

$$4k^2 - 4kn + n^2 - n - 2 = 0 \quad (1)$$

Substitúciou $t^2 = n + 2$, $t \in \mathbb{N}$ dostaneme

$$k_1 = \frac{t^2 - t - 2}{2} \quad k_2 = \frac{t^2 + t - 2}{2}$$

pre $t \in N$, $t \geq 3$. Odvodíme

$$k_{1,2} = \frac{4n \pm \sqrt{16n^2 - 16(n^2 - n - 2)}}{8} = \frac{n \pm \sqrt{n+2}}{2}.$$

Záver: Podľa [6] riešením danej rovnice je parametrický systém usporiadaných dvojíc $(n, k_1) = \left(t^2 - 2, \frac{t^2 - t - 2}{2}\right)$, $(n, k_2) = \left(t^2 - 2, \frac{t^2 + t - 2}{2}\right)$, kde $t \in N$, $t \geq 3$. (2)

Týmto je zrejme dokázané, že pre každé prirodzené číslo $t \geq 3$, každá dvojica čísel n, k spĺňajúca predchádzajúce vzťahy (2), je riešením rovnice (1).

Ďalej môžeme tvrdiť, že v Pascalovom trojuholníku existuje nekonečne veľa riadkov obsahujúcich trojčlenné aritmetické postupnosti z čísel idúcich po sebe.

Každý takýto riadok obsahuje dve aritmetické postupnosti, čo je bezprostredný dôsledok súmernosti Pascalovho trojuholníka.

Obidve aritmetické postupnosti obsahujú totiž tie isté čísla, prvá pre $k = k_1$ je rastúca, druhá pre $k = k_2$ je klesajúca.

Ľahko vypočítame, že

- ak $t = 3$, potom dostaneme $n = 7$ a $k_1 = 2$, $k_2 = 5$.
- Ak $t = 4$, potom dostaneme $n = 14$, $k_1 = 5$, $k_2 = 9$. Toto zodpovedá 15. riadku Pascalovho trojuholníka.

Kvôli lepšej názornosti, urýchleniu výpočtu a na overenie výsledkov použijeme softvér Mathematica. Použijeme príkaz

```
Column[Table[Binomial[n, k], {n, 14, 14}, {k, 0, n}], Center],
```

ktorý generuje výsledok

```
{1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1}
```

Nasledovný tabuľkový výpis (Tab. 1) obsahuje hodnoty

$$n, k_1, k_2 \text{ pre } 3 \leq t \leq 15, t \in N.$$

Získame ho jednoduchým príkazom:

```
TableForm[Table[{t, t^2 - 2, \frac{1}{2}(t^2 - t - 2), \frac{1}{2}(t^2 + t - 2)}, {t, 3, 15}],
```

```
TableAlignments -> Right, TableHeadings -> {None, {"t", "n", k_1, k_2}}]
```

t	n	k_1	k_2
3	7	2	5
4	14	5	9
5	23	9	14
6	34	14	20
7	47	20	27
8	62	27	35
9	79	35	44
10	98	44	54
11	119	54	65
12	142	65	77
13	167	77	90
14	194	90	104
15	223	104	119

Tab. 1: Výpis niekoľkých hodnôt t , n , k_1 , k_2 .

Z uvedenej tabuľky vyplýva:

- aritmetické postupnosti sa nevyskytujú v každom riadku Pascalovho trojuholníka,
- prvý výskyt aritmetického tripletu je v 8. riadku Pascalovom trojuholníku pre $n = 7$,
- v každom riadku s aritmetickou postupnosťou, vieme určiť prvé číslo rastúcej k_1 a prvé číslo klesajúcej k_2 aritmetickej postupnosti,
- pomocou vzorca $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, (resp. príkazom `Binomial[n, m]` v Mathematice) môžeme určiť príslušné členy aritmetickej postupnosti,
- softvér Mathematica nám umožňuje zobrazíť všetky členy riadka aj s pomerne vysokým indexom.

Napríklad pre 48 -my riadok členy rastúcej aritmetickej postupnosti: $k_1 = 20$

$$\text{Binomial}[47,19]= 6973199770790$$

$$\text{Binomial}[47,20]= 9762479679106$$

$$\text{Binomial}[47,21]= 12551759587422$$

členy klesajúcej aritmetickej postupnosti: $k_2 = 27$

$$\text{Binomial}[47,26]= 12551759587422$$

$$\text{Binomial}[47,27]= 9762479679106$$

$$\text{Binomial}[47,28]= 6973199770790$$

Čo nastane, keď hodnota $t < 3$, $t \in \mathbb{N}$?

- Ak $t=1$, potom $n=-1$, čo nevyhovuje podmienkam úlohy.
- Ak $t=2$, potom $n=2$, $k_1=0$, $k_2=2$. Toto zodpovedá tretiemu riadku v trojuholníku, v ktorom sú čísla: 1, 2, 1.

Aritmetické postupnosti vyšších rádov v Pascalovom trojuholníku

Na čísla v jednotlivých diagonálach Pascalovho trojuholníka sa môžeme pozeráť aj ako na aritmetické postupnosti vyšších rádov. [7]

Napríklad na druhej diagonále sa nachádza postupnosť $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$, ktorú považujeme za aritmetickú postupnosť prvého rádu, ktorá je známa zo stredoškolskej matematiky. Najskôr uvedieme definíciu aritmetickej postupnosti druhého rádu.

Definícia *Konečná alebo nekonečná postupnosť (b_n) sa nazýva aritmetická postupnosť druhého rádu, ak postupnosť $(a_{n+1}) = (b_{n+1} - b_n)$ je aritmetická.*

Skúmame Pascalov trojuholník po jednotlivých diagonálach.

- 2. diagonála: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., t. j. aritmetická postupnosť prvého rádu, teda $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots)$
- 3. diagonála : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ..., t. j. aritmetická postupnosť druhého rádu, teda $(b_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, \dots)$, pretože rozdiely každých dvoch jej susedných členov tvoria aritmetickú postupnosť prvého rádu
- 4. diagonála : 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ..., t. j. aritmetická postupnosť tretieho rádu, teda $(c_n) = (1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, \dots)$, pretože rozdiely každých dvoch jej susedných členov tvoria aritmetickú postupnosť druhého rádu.

Aritmetická postupnosť	Členy postupnosti	n-tý člen postupnosti	Súčet prvých n členov postupnosti
nultého rádu	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,	$\binom{n}{0}$	$\binom{1}{0} + \binom{2}{0} + \binom{3}{0} + \dots + \binom{n-1}{0} = \binom{n}{1}$
prvého rádu	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,	$\binom{n}{1}$	$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \dots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$
druhého rádu	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,	$\binom{n+1}{2}$	$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$
tretieho rádu	1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...	$\binom{n+2}{3}$	$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \dots + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$
štvrtého rádu	1, 5, 15, 35, 70, 126,	$\binom{n+3}{4}$	$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \dots + \binom{n+3}{4} = \binom{n+4}{5}$
piateho rádu	1, 6, 21, 56, 126, 252,	$\binom{n+4}{5}$	$\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \dots + \binom{n+4}{5} = \binom{n+5}{6}$
.....
k -tého rádu	1,	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}$

Tab. 2: Niektoré vlastnosti aritmetických postupností vyšších rádov

Tieto zistené vzťahy, nám umožňujú definovať aritmetickú postupnosť n -ho rádu.

Definícia Nech $(r)_n$ je konečná alebo nekonečná aritmetická postupnosť $(n - 1)$ - ho rádu. Konečná alebo nekonečná postupnosť (p_n) sa nazýva aritmetická postupnosť n -ho rádu, ak postupnosť $(r_{n+1}) = (p_{n+1} - p_n)$ je aritmetická.

V Pascalovom trojuholníku sú postupne v ďalších šikmých stĺpcoch tzv. aritmetické postupnosti štvrtého, piateho, šiesteho, atď. rádu, ktoré súhrnne nazývame aritmetické postupnosti vyšších rádov.

Aritmetická postupnosť	n - tý člen postupnosti	Súčet prvých n členov postupnosti
nultého rádu	$\binom{n}{0} = 1$ (t. j. polynóm premennej n nultého stupňa)	$\binom{n}{1} = n$ (t. j. polynóm premennej n prvého stupňa)
prvého rádu	$\binom{n}{1} = n$ (t. j. polynóm premennej n prvého stupňa)	$\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(1+n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (t. j. polynóm premennej n druhého stupňa)
druhého rádu	$\binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (t. j. polynóm premennej n druhého stupňa)	$\binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n(1+n)(2+n) = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$ (t. j. polynóm premennej n tretieho stupňa)
tretieho rádu	$\binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n(1+n)(2+n)$ $= \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$ (t. j. polynóm premennej n tretieho stupňa)	$\binom{n+3}{4} = \frac{1}{24}n(1+n)(2+n)(3+n)$ $= \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{4}n^3 + \frac{11}{24}n^2 + \frac{1}{4}n$ (t. j. polynóm premennej n štvrtého stupňa)
štvrtého rádu	$\binom{n+3}{4} = \frac{1}{24}n(1+n)(2+n)(3+n)$ $= \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{4}n^3 + \frac{11}{24}n^2 + \frac{1}{4}n$ (t. j. polynóm premennej n štvrtého stupňa)	$\binom{n+4}{5} = \frac{1}{120}n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)$ $= \frac{1}{120}n^5 + \frac{1}{12}n^4 + \frac{7}{24}n^3 + \frac{5}{12}n^2 + \frac{1}{5}n$ (t. j. polynóm premennej n piateho stupňa)
piateho rádu	$\binom{n+4}{5} = \frac{1}{120}n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)$ $= \frac{1}{120}n^5 + \frac{1}{12}n^4 + \frac{7}{24}n^3 + \frac{5}{12}n^2 + \frac{1}{5}n$ (t. j. polynóm premennej n piateho stupňa)	$\binom{n+5}{6} = \frac{1}{720}n(1+n)(2+n)(3+n)(4+n)(5+n)$ $= \frac{1}{720}n^6 + \frac{1}{48}n^5 + \frac{17}{144}n^4 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{137}{360}n^2 + \frac{1}{6}n$ (t. j. polynóm premennej n šiesteho stupňa)

Tab. 3. n -tý člen a súčet prvých n členov aritmetických postupností vyšších rádov

Matematickou indukciou môžeme uvedené výsledky zovšeobecniť do nasledovného tvrdenia:

Veta. N –tý člen aritmetickej postupnosti k –tého rádu je polynómom premennej n stupňa k ; t. j.

$$a_n = \alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \dots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k.$$

Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti k –tého rádu je polynómom premennej $(n+1)$ stupňa $(k+1)$ s nulovým absolútnym členom, t. j.

$$s_n = \beta_0 (n+1)^{k+1} + \beta_1 (n+1)^k + \dots + \beta_k (n+1),$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ sú vhodné koeficienty.[8]

Mnohým žiakom bol známy historický príbeh *K. F. Gaussa* (1777-1855), ktorý v r. 1786 na hodine matematiky brilantne vypočítal súčet $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$. Poznamenajme, že známy vzťah pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti (prvého rádu)

$$s_n = n \frac{a_1 + a_n}{2}$$

je možné odvodiť s využitím vyššie uvedenej skutočnosti, že súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti prvého rádu je polynóm premennej n stupňa druhého, t. j.:

$$s_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n$$

Koeficienty β_0, β_1 určíme z rovníc, ktoré dostaneme dosadením $n = 1, 2$;

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 &= s_1 = a_1 \\ 4\beta_0 + 2\beta_1 &= s_2 = 2a_1 + d. \end{aligned}$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostaneme $\beta_0 = \frac{d}{2}, \beta_1 = a_1 - \frac{d}{2}$, teda

$$s_n = \beta_0 n^2 + \beta_1 n = \frac{d}{2} n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right) n.$$

Geometrické triplety

Predpokladajme, že existujú také $n, k \in \mathbb{N}$, že trojica čísel $\binom{n}{k-1}, \binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}$ tvorí geometrickú postupnosť.

$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1},$$

čiže

$$\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)^2 = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

Po úprave dostaneme

$$k(n-k) = (k+1)(n-k+1),$$

odkiaľ dostaneme $0 = n+1$, čo je sporné, keďže $n \in \mathbb{N}$.

V Pascalovom trojuholníku teda neexistuje riadok, ktorý by obsahoval trojčlennú geometrickú postupnosť, teda geometrický triplet.

Harmonický trojuholník

Starí Gréci poznali okrem aritmetického a geometrického priemeru dvoch čísel aj priemer harmonický. Harmonický priemer $H(a, b)$ dvoch kladných čísel a, b je definovaný nasledovne:

$$H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Definícia. Harmonickou postupnosťou nazývame postupnosť, ktorej všetky členy, okrem prvého, sú harmonickým priemerom susedných členov.

Najznámejšia harmonická postupnosť je postupnosť $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

Vychádzajme z postupnosti čísel $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$, ktorú tvoria kmeňové zlomky. Všeobecný člen tejto postupnosti je $a_n = \frac{1}{n}$.

Ak od každého člena $\frac{1}{n}$ tejto postupnosti odčítame jeho nasledujúci člen $\frac{1}{n+1}$, dostaneme postupnosť

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

Usporiadajme získané hodnoty podľa schémy:

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{105}$		
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{140}$		
		---	---	---		

Teraz otočme túto schému (tabuľku čísel) o 60° v smere hodinových ručičiek, aby sme vytvorili trojuholníkové pole.

Dostaneme nový trojuholník, ktorý nazývame harmonickým trojuholníkom.

				$\frac{1}{1}$					
				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
			$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$				
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$				
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$			
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$			

$$\frac{1}{r \binom{r-1}{r-1}} \quad \frac{1}{r \binom{r-1}{r-2}} \quad \frac{1}{r \binom{r-1}{r-3}} \quad \dots \quad \frac{1}{r \binom{r-1}{2}} \quad \frac{1}{r \binom{r-1}{1}} \quad \frac{1}{r \binom{r-1}{0}}$$

Obr. 5: Harmonický trojuholník

Napišme si ešte ďalšie dva nasledujúce riadky:

$$\begin{array}{cccccccc} & & \frac{1}{(r+1) \binom{r}{r}} & & \frac{1}{(r+1) \binom{r}{r-1}} & - & - & - & \frac{1}{(r+1) \binom{r}{1}} & & \frac{1}{(r+1) \binom{r}{0}} \\ & \frac{1}{(r+2) \binom{r+1}{r+1}} & & \frac{1}{(r+2) \binom{r+1}{r}} & & - & - & \frac{1}{(r+2) \binom{r+1}{2}} & & \frac{1}{(r+2) \binom{r+1}{1}} & & \frac{1}{(r+2) \binom{r+1}{0}} \\ \hline & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Vyslovíme hypotézu, že platí

$$\frac{1}{(n+2) \binom{n+1}{k+1}} + \frac{1}{(n+2) \binom{n+1}{k}} = \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}}.$$

Dokážeme jej správnosť.

Postupným upravovaním dostaneme:

$$\frac{1}{(n+2) \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}} + \frac{1}{(n+2) \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}} = \frac{1}{(n+1) \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

$$k+1+n+1-k = n+2$$

$$n+2 = n+2$$

Tým sme overili platnosť uvedeného vzťahu v harmonickom trojuholníku.

Ak označíme $H_k(n) = \frac{1}{n \binom{n-1}{k-1}}$, potom môžeme vzťah

$$H_k(n) + H_{k+1}(n) = H_k(n-1)$$

upraviť nasledovne:

$$\frac{1}{n \binom{n-1}{k-1}} + \frac{1}{n \binom{n-1}{k}} = \frac{1}{(n-1) \binom{n-2}{k-1}}.$$

Dostali sme základné vzorce platné v harmonickom trojuholníku, ale aj vzorce platné medzi prvkami oboch trojuholníkov.

Doposiaľ získané vzťahy uvedieme v nasledovnom prehľade (Tab. 4):

	Pascalov trojuholník	Harmonický trojuholník
Označenie prvkov ($\forall n, k, \in \mathbb{N}; n \geq k$)	$C_k^n, \binom{n}{k}, C_k(n) \dots$	$H(n, k), H_k^n, H_k(n), \dots$
Generovanie prvkov	$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$	$H_k(n) + H_{k+1}(n) = H_k(n-1)$

Tab. 3: Prehľad vzorcov medzi Pascalovým a harmonickým trojuholníkom

Existujú nejaké vzťahy medzi číslami v diagonálach? Ako vypočítať ich súčet, ak existuje?

- Čísla na 1. diagonále harmonického trojuholníka tvoria harmonickú postupnosť

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

K nej príslušný rad sa nazýva harmonickým radom.

Ak by sme brali do úvahy len trojice čísel za sebou idúcich v harmonickom rade, tak dostávame harmonické triplety. Je zrejmé, že ich existuje nekonečne veľa.

Napr.:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}: \quad \bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$$

alebo iné nepárne skupiny za sebou idúcich čísel:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}: \quad \bar{x}_h = \frac{1}{7},$$

vypočítame pomocou softvéru *Mathematica* príkazom

$$\text{HarmonicMean}\left[\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}\right\}\right], \quad \frac{1}{7}.$$

- Čísla na 2. diagonále harmonického trojuholníka sú

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \dots$$

Určíme súčet ich prevrátených hodnôt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2 \cdot 1 = 2$$

Rozpíšeme posledný vzťah. Ak označíme $S_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, potom po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \\ S &= S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1. \end{aligned}$$

Teda platí, že čísla na 2. diagonále harmonického trojuholníka sú polovicou obrátených hodnôt trojuholníkových čísel a súčet týchto čísel je 1.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \dots = \\ & = \frac{1}{2} (1^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} + 10^{-1} + 15^{-1} + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{2}} = 1 \end{aligned}$$

- Čísla na 3. diagonále harmonického trojuholníka sú

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{105}, \dots$$

Z vyššie uvedených vzťahov môžeme predpokladať, že každé z uvedených čísel je jednou tretinou obrátených tetrahedrálnych čísel v Pascalovom trojuholníku, t. j.

$$1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, \dots = \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \binom{6}{3}, \binom{7}{3}, \dots, \binom{k}{3}, \dots$$

Utvorme ich súčet:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left\{ \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{n}{3} + \dots \right\} = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{3} \\ & \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ & = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)(n-2)} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stačí len upraviť súčet nekonečného číselného radu

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

ktorý je ekvivalentný s výrazom:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \\ & = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Čísla na 4. diagonále harmonického trojuholníka sú

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \frac{1}{280} + \frac{1}{504} + \frac{1}{840} + \dots = \\
&= \frac{1}{4} (1^{-1} + 5^{-1} + 15^{-1} + 35^{-1} + 70^{-1} + \dots) = \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\binom{4}{4}} + \frac{1}{\binom{5}{4}} + \frac{1}{\binom{6}{4}} + \frac{1}{\binom{7}{4}} + \frac{1}{\binom{8}{4}} + \dots + \frac{1}{\binom{k}{4}} + \dots \right) = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}} = \\
&= 6 \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = 6 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{3}, \quad n \geq 4, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Analogickým postupom by sme mohli pokračovať ďalej. Je zrejmé, že pri výpočtoch súčtov uvedených nekonečných číselných radov sa zvyšuje obťažnosť výpočtov.

Záver

V článku sme poukázali na niektoré súvislosti medzi prvkami Pascalovho trojuholníka, ako aj na jeho modifikáciu - harmonický trojuholník.

Ich základné vlastnosti a vzťahy, akými sú napríklad postupnosti (aritmetické, geometrické a harmonické), sú obsahom učiva v rámci stredoškolskej matematiky.

Aktívne skúmanie a objavovanie matematických vzťahov môže podporiť dosiahnutie kvalitnejších a trvalejších výsledkov matematického vzdelávania u žiakov, prípadne podnietiť záujem o ďalšie vzdelávanie v matematike.

Literatúra

- [1] https://sk.wikipedia.org/wiki/Pascalov_trojuholník (2020-03-23).
- [2] Janeček, F. (1983). *Vlastnosti Pascalova trojúhelníku. Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 61, 1982/83, DUBEN*. Praha: Nakl. JČSMF.
- [3] https://sk.wikipedia.org/wiki/Portál:Matematika/Obrázok_týždňa/8#/media/Súbor:Pascal's_Triangle_divisible_by_5.svg (2020-03-23).
- [4] Fulier J., Šedivý O., *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*. Nitra 2001.,(s. 112-113), ISBN 80-8050-445-8.
- [5] Jackson, T., et al. (2013). *Matematika. 100 objavov, ktoré zmenili históriu*. SLOVART, s. r. o., Bratislava 2013, (s. 49), ISBN 978-80-556-0834-1.
- [6] Аврамов, А., 1980. Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля. *Časopis Kvant*, 1980, N₀11, (s. 27-28).
- [7] Zhouf, J., PedF UK Praha: *Aritmetická posloupnost druhého řádu. Rozhledy matematicko-fyzikální, ročník 80, (2005), číslo 3, s. 3-11*.
- [8] Vyšín J., *O nekonečných řadách, Praha, 1948, Nakl. JČSMF, (s. 10-12)*.