Vol. 5, No. 1, 2019

Acta Mathematica Nitriensia

free electronic journal

AM Nitriensia

ISSN: 2453-6083

Názov / Title
Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup
Pokyny pre autorov
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php
Recenzné konanie
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.
Dostupnosť
www.amn.fpv.ukf.sk
Vydavateľ
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

General information
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access
Guidelines for authors
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php
Review process
The journal carries out a double -blind peer review evaluation of drafts of contributions.
Available from
www.amn.fpv.ukf.sk
Publisher
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia

Údaje k aktuálnemu číslu
Ročník: 5
Číslo: 1
Rok: 2019
Dátum vydania: 15. 4. 2019

Information to current issue
Volume: 5
No.: 1
Year: 2019
Publication date: April 15, 2019

Obsah

Content

AM Nitriensia

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 1, p. 1 – 7
ISSN 2453-6083

Vliv využití programu GeoGebra na rozvoj rovinné a prostorové představivosti žáků 5. tříd ZŠ

Effect of the Use of GeoGebra Software on the Development of Plane and Spatial Imaginations of Pupils of 5th Grades of Elementary School

Vlastimil Chytrý [a] – Anna Hlaváčková [a]

[a*] *Department of Preschool and Primary Education, Faculty of Education, Univerzity of Jan Evangelista Purkyně in Ústí nad Labem, Hoření 13, 400 96 CZ*

Received February 11, 2018; received in revised form February 26, 2019; accepted March 1, 2019

Abstract

The presented article deals with the development of plane and spatial imaginations in the teaching of geometry of the 5th year of primary schools supported by the GeoGebra software. The results of the IT tests on plane and spatial imagination were compared at the two primary schools in Teplice, of which only geometry teaching will take place within ICT hours - using GeoGebra. The design of the research was a classic experiment with pretest and posttest. Testing was carried out in two stages - at the beginning and at the end of the school year 2017/2018. The aim of the research is to evaluate the effectiveness of the GeoGebra software and to verify the hypothesis that this program is important for the development of flat and spatial imagination in primary school pupils. The results showed no difference between classes that worked with GeoGebra software and those who don't.

Keywords: GeoGebra, plane geometry, plane imaging, spatial geometry, spatial imagination.

Classification: D40, U50, N60, N80, U70

Úvod

Všeobecná encyklopedie definuje představivost jako „schopnost jedince vytvářet představy a operovat s nimi.“ (Benešová, 1999, s. 284). Je však také možné ji vnímat jako hlavní předpoklad tvořivých činností a řešení problémových situací. V rámci předloženého příspěvku je nutné odlišovat mezi představivostí / představami jako obecným pojmem a její restrikcí ve smyslu rovinné a prostorové představivosti.

Zatímco z obecného hlediska se dané problematice (představ) věnovalo značné množství autorů, mezi které je možné zařadit například Kujala (1967), Čápa (1980) nebo Singuleho (1990), v případě rovinné a prostorové představivosti není zastoupení autorů tak široké. Perenčaj a Repáš (1985) o prostorové představivosti hovoří následovně:

*Corresponding author; email: vlchytry@gmail.com
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.1.1-7

„Mohli bychom říci, že je to jakési vidění prostoru. Ale ten přeci musí vidět každý, kdo vidí. Problém je v tom, že nestačí prostor vidět, ale je nutné si ho i uvědomovat.“

Perný (2004), upozorňuje, že se často v literatuře, ale někdy i mezi matematickou veřejností, chápe představivost více méně geometricky, což je pojetí příliš úzké. Sám ji pak dělí na třídy: **i)** matematickou, **ii)** geometrickou, **iii)** prostorovou.

Oproti němu například Košč (1972) dělí matematickou představivost na reprodukční a tvůrčí. Za nutné považujeme zmínit, že se jedná se o konstrukt (prostorová představivost a představivost obecně), který je možné určitými činnostmi rozvíjet. Částečně se tak dotýkáme problematiky existujících mýtů u laické veřejnosti o stabilním „vrozeném“ původu některých konstruktů (viz podobně např. metakognice – Říčan, 2016).

Z nejobecnějšího pohledu je možné tvrdit, že od narození se člověk pohybuje v prostoru. Všechno, co vidí, čeho se dotýká, co vnímá, je trojrozměrné. K rozvoji prostorové představivost tak dochází na základě přirozeného vývoje jedince.

Molnár (2004) uvádí, že prostorovou představivost pomáhají rozvíjet již v předškolním věku všechny aktivity, při kterých dítě přichází do styku s geometrickými objekty, a to především prostřednictvím didaktické hry.

Metodologie

V rámci výzkumného šetření bylo řešeno hned několik výzkumných problémů (VP) týkajících se GeoGebry (dále jen GG) a rovinné/prostorové představivosti, které byly nadále precizovány na základě hypotéz:

***VP1**: Jaký vliv má používání programu GG na rozvoj rovinné a prostorové představivosti žáků 5. tříd ZŠ?*

***VP2**: Jaký je vztah mezi pohlavím žáků a jejich úspěšností v testech?*

***VP3**: Jaký je vztah mezi rovinnou a prostorovou představivostí žáků 4. či 5. tříd ZŠ a jejich prospěchem v předmětu Matematika?*

***VP4**: Jaký je vztah mezi lateralitou žáků 5. tříd ZŠ a jejich rovinnou a prostorovou představivostí?*

Těmto výzkumným problémům byly vždy formulovány příslušné hypotézy včetně nulových hypotéz.

- ***H1**: U žáků, kteří pracovali s programem GG, dojde k rozvoji rovinné a prostorové představivosti.*

  ***H10**: Práce s programem GeoGebra nemá na rovinnou a prostorovou představivost vliv.*

- ***H2**: Existuje významný rozdíl mezi výsledky chlapců a dívek v úrovni rovinné a prostorové představivosti.*

  ***H20**: Rovinná a prostorová představivost je stejná pro chlapce i dívky.*

- ***H3**: Žáci s lepším prospěchem mají lepší rovinnou a prostorovou představivost.*

  ***H30**: Úroveň rovinné a prostorové představivosti žáka není závislá na jeho školním hodnocení z matematiky.*

- ***H4**: Mezi výsledky testů levorukých a pravorukých žáků nejsou rozdíly v úrovni rovinné a prostorové představivosti.*

  ***H40**: Úroveň rovinné a prostorové představivosti není závislá na lateralitě.*

Popis testovaného souboru

Respondenty byli žáci 5. ročníků dvou základních škol v Teplicích v Ústí nad Labem (Česká republika), jež dosahují při různých šetřeních a soutěžích obdobné výsledky (není mezi nimi statisticky významný rozdíl). Komparace těchto dvou skupin je tak z metodologického hlediska možná.

Experimentální skupina je tvořena žáky ZŠ U Nových lázní, s 504 žáky, ve které byla realizovaná kromě standardní výuky geometrie i výuka s podporou GG. Roli kontrolní skupiny, u níž probíhala výuka geometrie bez GG, zastávala ZŠ Buzulucká (ZŠ s rozšířeným vyučováním matematiky a přírodovědných předmětů), o počtu 749 žáků. Do šetření se zapojilo celkem N=114 žáků (tab. 1). V případě ZŠ U Nových lázní je poměr zastoupení 40 % dívek a 60 % chlapců. U ZŠ Buzulucká je to 44 % dívek a 56 % chlapců. Z hlediska pohlaví se tak jedná o srovnatelné soubory.

Tabulka 1 - Počet respondentů

	Experimentální skupina	Kontrolní skupina	Celkem žáků
Celkem žáků	59	55	114
Z toho dívek	24	24	48
Z toho chlapců	35	31	66

Použitý nástroj ke sběru dat

Sběr dat byl proveden za pomocí dvou nestandardizovaných nástrojů a to z toho důvodu že na „změření“ úrovně rovinné a prostorové představivosti není v ČR dosud žádný nástroj validizován. U těchto testů nebyly realizovány všechny kroky obvyklé při přípravě a ověřování testů standardizovaných (Chráska, 2007).

Z tohoto důvodu byl pro účely testování rovinné a prostorové představivosti sestrojen nový nástroj, který byl diskutován s experty na poli didaktiky matematiky věnujícími se geometrii.

Při sestavování testových otázek pro rovinnou a prostorovou představivost byla kladena maximální dikce na to, aby byly zapojeny veškeré možné manipulace s obrazci v rovině i prostoru, do nichž můžeme zahrnout úlohy:

i) překlápění plošných obrazců,
ii) rotaci plošných obrazců,
iii) doplňování částí plošných obrazců,
iv) určování počtu geometrických tvarů,
v) skládání sítě těles,
vi) rozkládání sítě těles,
vii) rotaci těles.

Z důvodu časové náročnosti byla nutná redukce počtu oblastí. Na základě rozhovoru s experty byly nakonec zapojeny kategorie: **i)** skládání sítě těles, **ii)** rozkládání sítě těles, **iii)** rotace krychlových těles, **iv)** skládání sítě krychlových těles s doplněním počtu teček, tzv. „pomalované kostky“. Celý nástroj je prezentovaný v práci Hlaváčkové (2019).

Takto sestavený nástroj byl použit dvakrát. Jednou jako pretest a v drobné úpravě pak také jako posttest. Časová dotace pro vyřešení všech položek byla 20 minut. Celkem byly do testu zahrnuty čtyři položky, kde každá odpovídala výše zmíněné kategorii. Vzhledem k věku respondentů byly využity primárně úlohy na přiřazení správné odpovědi. Jednotlivé položky byly hodnoceny dichotomicky 1 – správná odpověď, 0 – špatná odpověď. Celkem tak žák mohl získat 0 – 4 body a pro testování hypotéz bylo využito neparametrických statistických metod (vzhledem k ordinalitě dat).

Deskriptivní analýza

Vlastní deskripce byla provedena na základě úspěšnosti v jednotlivých položkách (tab. 2) a také na základě celkového skóre, kterého mohl žák dosáhnout (tab. 3).

Tab. 2: Úspěšnost v jednotlivých položkách.

Škola	Pohlaví	Správné odpovědi 1. úlohy [%]	Správné odpovědi 2. úlohy [%]	Správné odpovědi 3. úlohy [%]	Správné odpovědi 4. úlohy [%]
ZŠ U Nových lázní	**Dívky**	50	63	54	63
	Chlapci	51	32	36	24
ZŠ Buzulucká	**Dívky**	79	58	54	25
	Chlapci	42	33	35	20

Vzhledem ke zjištěným hodnotám je nutné se zaměřit zvlášť na chlapce a zvlášť na dívky. Zatímco u chlapců se jako nejvíce problematická jevila úloha číslo 4 se zaměřením na skládání sítě krychlových těles s doplněním počtu teček, tzv. „pomalované kostky“, děvčata měla problémy s úlohou číslo zaměřenou na rotace krychlových těles. Z tohoto důvodu byla také následná deskriptivní analýza provedena zvlášť pro obě pohlaví.

Tab. 3: základní deskriptiva ve vztahu k pohlaví

Experimentální skupina	Pretest		Posttest	
	Chlapci	**Dívky**	**Chlapci**	**Dívky**
medián	2,00	2,00	3,00	2,00
modus	2,00	2,00	3,00	3,00
Kontrolní	**Pretest**		**Posttest**	
	Chlapci	**Dívky**	**Chlapci**	**Dívky**
medián	3,00	2,00	2,00	2,00
modus	3,00	2,00	2,00	3,00

Z tabulky 3 je patrné, že není možné očekávat rozdíl mezi pohlavím a to jak v případě pretestu, tak také u posttestu. Ke stejnému závěru bychom dospěli i v případě porovnání experimentální a kontrolní skupiny. Jediný rozdíl je možné sledovat u posttestu. Této nuanci se budeme nadále věnovat v rámci induktivní analýzy.

Induktivní analýza

Pro účely testování hypotézy $\mathbf{H_1}$ byl použit Wilcoxonův párový U test, kdy testujeme proti nulové hypotéze říkající, že mediány pro první a druhé měření jsou si rovny a to zvlášť pro experimentální a kontrolní skupinu.

Zjištěné hodnoty *p*-level jsou p = 0,52 pro experimentální skupinu a p = 0,35 pro kontrolní skupinu. Není tak možné zamítnou $\mathbf{H_{01}}$ a docházíme k závěru, že využití programu Geogebra nevede k rozvoji rovinné a prostorové představivosti.

Tato skutečnot byla ověřena také u kontrolní skupiny z toho důvodu, abychom vyloučili možnost, že například dojde ke statisticky významnému zhoršení nebo bude případné zlepšení zapříčiněno dalšími faktory. Ukázalo se také, že využití programu nevedlo ani ke zvýšení oblíbenosti výuky matematiky (Hlaváčková, 2019).

Druhá hypotéza ($\mathbf{H_2}$) byla testována na základě Mann – Whitney U testu a to zvlášť pro pretest a posttest.

Zjištěné hodnoty byly p = 0,36 pro pretest a p = 0,007 pro posttest. V rámci posttestu se tak ukázal statisticky významný rozdíl mezi chlapci a děvčaty ve prospěch chlapců, jak je patrné z tabulky 4.

Tabulka 4 - Porovnání úspěšnosti prvního a druhého testu z hlediska pohlaví

		1. otázka		2. otázka		3. otázka		4. otázka	
		1. test	2. test	1. test	2. test	1. test	2. test	1. test	2. test
ZŠ U Nových lázní	dívky	50 %	67 %	63 %	79 %	54 %	71 %	63 %	42 %
	chlapci	88 %	82 %	56 %	82 %	62 %	71 %	41 %	59 %
ZŠ Buzulucká	dívky	79 %	58 %	58 %	46 %	54 %	83 %	25 %	25 %
	chlapci	74 %	45 %	58 %	61 %	61 %	65 %	35 %	19 %

Na základě jednoduché korelační analýzy byla testována závislost úrovně rovinné a prostorové představivosti na školním hodnocení z matematiky $\mathbf{H_3}$. Toto šetření proběhlo před aplikací GeoGebry. Bylo využito Spearmanova korelačního koeficientu (Spearman, 1904), kdy testujeme oproti nulové hypotézy hovořící o nulovém korelačním koeficientu. Čistě z důvodu precizace bylo toto šetření rozděleno zvlášť pro čtvrtý a pátý ročník, kdy pro čtvrtý ročník byla zjištěna hodnota $\boldsymbol{r}$ = -0,445 (p=0,000) a pro pátý ročník pak $\boldsymbol{r}$ = 0,18 (p=0,21).

V případě čtvrtého ročníku je možné hovořit o středně silné závislosti a zamítnutí nulové hypotézy. V případě pátého ročníku o nízkém korelačním koeficientu, kdy nebylo možné nulovou hypotézu o nulovém korelačním koeficientu zamítnout. (Hendl, 2012; Chrástka, 2016).

Jelikož pro školní hodnocení platí, že čím vyšší je jeho hodnota, tím horší jsou žákovo schopnosti a u didaktického testu je toto hodnocení opačné, značí záporná hodnota korelačního koeficientu skutečnost, že čím horší je školní hodnocení žáka, tím nižších hodnot dosahuje v didaktickém testu.

Poslední testovaná hypotéza byla šetřena opět na základě Mann – Whitney U testu a to zvlášť v rámci pretestu a posttestu. Zjištěné hodnoty *p*-level byly p = 0,88 pro pretest a p = 0,65 pro posttest. Ani v jednom případě tak není možné zamítnut nulovou hypotézu $\mathbf{H_{04}}$ a je tak možné tvrdit, že leváci i praváci mají obdobnou úroveň rovinné a prostorové představivosti.

Diskuze a závěr

Již Gardner (1999) upozorňuje na malé množství výzkumů, které by se zbývaly problematikou prostorové představivostí u dětí v porovnání s testováním jazykových či logických schopností. Jedná se tak o opomíjenou oblast a to již například z hlediska skutečnosti, že během lidské ontogeneze je možné typy představivosti rozvíjet a dotvářet. V rámci diskuze a závěru se budeme odvolávat na závěry, ke kterým dospěla Charvátová (2017, s. 94) a tedy, že

> *„cílené působení na žáky má vliv na úroveň jejich prostorové představivosti, projevuje se však odlišně u různých typů úloh*".

Považujeme za nutné zmínit, že škola by neměla opomíjet na rozvoj představivosti u svých žáků (Hejný 1990; Zilcher, 2013). Uvážíme-li, že představy v sobě obsahují samotný cíl činnosti (Švingalová, 1995), pak platí, že cokoliv chceme udělat, musíme si umět představit. Tyto představy následně souvisí s cílem a způsobem, jakým toho dosáhnout. Je tedy zřejmé, že představy ovlivňují celý náš budoucí postup tvorby.

V rámci předloženého článku bylo nastíněno, že rozvoj rovinné a prostorové představivosti nemusí probíhat pouze na základě běžných činností případně manipulace s předměty, ale je možné jej docílit také na základě činností v programu GeoGebra. V pretestu a posttestu však nebyl sledován statisticky významný rozdíl. Je tak možné tvrdit, že využití programu GeoGebry nevedlo sice ke zlepšení rovinné/prostorové představivosti, nedošlo však ani k jejímu zhoršení.

Na to, aby bylo možné tyto závěry s jistotou potvrdit, bylo by nutné pracovat s větším souborem respondentů. Může totiž dojít ke skutečnosti, že práce s programem GeoGebra vede k rozvoji rovinné/prostorové představivosti, avšak v průběhu experimentu nebyly použity vhodné aktivity.

Případně je také možné pracovat pouze s některými třídami představivosti tak, jak jsou zmíněny v úvodu a ty se snažit rozvíjet tak, jak například popisuje Nováková (2018) pro vědecké myšlení.

Pro zajímavost také uvádíme příklad využití virtuální reality, jakožto prostředku rozvoje kognitivních funkcí s ohledem na orientaci a prostorovou představivost u klientů s poruchou intelektu. Na toto využití poukazuje Vostrý (2018), který u experimentální skupiny probandů s poruchou intelektu využil volně dostupné komerční produkty (hry na herní konzole) a v případě komparace pretestu a posttestu zaznamenal zlepšení v testovaných oblastech.

Poděkování

Článek byl sepsán za podpory grantu SGS University Jana Evangelistu Purkyně v Ústí nad Labem s názvem *Závislost metakognitivních znalosti, kritického myšlení a dalších dovedností na typu vzdělávacího programu*.

Literatura

Čáp, J. (1980) *Psychologie pro učitele*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Benešová, J. (1999). *Velký slovník naučný*. Praha: Diderot.

Gardner, H. (1999). *Dimenze myšlení: teorie rozmanitých inteligencí*. Praha: Portál.

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2* (2. vyd.). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Hendl, J. (2012). *Přehled statistických metod*. Praha: Portál.

Hlaváčková, A. (2019) *Vliv využití programu GeoGebra na rozvoj rovinné a prostorové představivosti žáků 5. tříd ZŠ*. (Diplomová práce). Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem.

Charvátová, L. (2019). *Rozvoj geometrické představivosti prostřednictvím her*. (Rigorózní práce). Technická univerzita v Liberci.

Chrástka, M. (2016). *Metody pedagogického výzkumu*. Praha: Grada.

Košč, L. (1972). *Psychológia matematických schopností. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.*

Kujal, B. (1967). *Pedagogický slovník - 2. díl (P/Ž).* Praha: Statní pedagogické nakladatelství.

Molnár, J. (2005) *Matematické nadání a prostorová představivost*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Nováková, A. (2018). Poznatky o vědeckém myšlení žáků a možnostech jeho rozvoje. Odumírání lidskosti? In. *Výchovné výzvy v současné škole*,197- 204.

Pernčaj, J. & Repáš V. (1985). Diagnostika rozvoja stereometrických predstáv študentov vysokých škol technických. *MFvŠ* 16.

Perný, J. (2004). *Tvořivostí k rozvoji prostorové představivosti*. Liberec: Technická univerzita.

Říčan, J. (2016). *Metakognice a metakognitivní strategie jako teoretické a výzkumné konstrukty a jejich uplatnění v moderní pedagogické praxi*. Most: Hněvín.

Singule, F. (1990). *Americká pragmatická pedagogika*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Spearman, C. (1904). The Proof and Measurement of Association between Two Things. *The American Journal of Psychology*, 15(1): 72-101. doi: 10.2307/1412159.

Švingalová, D., (1995*). Základy psychologie (Kognitivní složka osobnosti). II. díl: Základy obecné psychologie (1. vyd.).* Liberec: Technická univerzita v Liberci.

Vostrý, M. (2018). Selected opportunities for access to geriatric clients from the perspective of assisting professions. *Journal of Education Culture and Society*, 8(1), 89-95. doi: https://doi.org/10.15503/jecs20181.89.95

Zilcher, L. (2013). *Analýza používaných inkluzivně didaktických strategií v ČR a USA*. Ústí nad Labem: UJEP.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 1, p. 8 – 13
ISSN 2453-6083

Vzájomné vzťahy kvantifikovaných výrokov s viacnásobným použitím kvantifikátorov

The Mutual Relations of Quantified Statements with the Multiple Applications of Quantifiers

Peter Vrábel*

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received February 26, 2019; received in revised form March 4, 2019; accepted March 4, 2019

Abstract

The accurate understanding of quantified statements with the multiple applications of quantifiers is for students very important. Failings along this line lead up to difficulties with factual apprehension and acquirement fundamental notions of some mathematical theory. The didactic aspects of application quantified statements and their mutual relations are studied in the paper.

Keywords: quantifier, quantified statement, propositional function

Classification: 00A35, 97C50, 97D50

Úvod

Pri formulácii matematických viet i ich dôkazoch často vystupujú kvantifikované výroky s viacnásobným použitím kvantifikátorov. V tomto smere žiadna matematická disciplína nie je výnimkou. Správne chápanie kvantifikovaných výrokov so zmiešaným použitím kvantifikátorov je skutočne veľmi dôležité. Nedostatky v tomto prípade vedú k tomu, že študenti majú problémy už so skutočným pochopením a osvojením si základných pojmov nejakej matematickej teórie (Vrábel, [3], 2018). Markantne sa to prejavuje aj v dôkazoch a kontrapríkladoch, napríklad v matematickej analýze pri argumentácii, že daná postupnosť nemá limitu alebo, že daná funkcia nie je rovnomerne spojitá na nejakom intervale. V predloženom príspevku sa budeme zaoberať samozrejme len „logickou“ stránkou veci, teda správnym pochopením kvantifikovaných výrokov, ich negáciou a predovšetkým ich vzájomnými vzťahmi. Pri bezproblémovej práci s kvantifikovanými výrokmi však zohrávajú dôležitú úlohu aj poznatky o výrokových funkciách.

Didaktické aspekty používania kvantifikovaných výrokov

Kvantifikované výroky budeme označovať nasledovne: $\forall x \in A\, V(x)$, $\exists x \in A\, V(x)$, $\forall x \in A\, \exists y \in B\, V(x,y)$, $\cdots$, kde $V(x)$ ($V(x,y)$) je výroková funkcia jednej (dvoch) premenných, ktorá je definovaná na množine A ($A \times B$). Vychádzame pritom z matematickej terminológie (Medek, [1], 1975). Treba poznamenať, že vo viacerých publikáciách autori píšu pred

*Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.1.8-13

výrokovú funkciu dvojbodku. V školskej matematike výrokové funkcie (najčastejšie ide o rovnice a nerovnice) sa nazývajú aj výrokové formy. Základom vzťahov akýchkoľvek kvantifikovaných výrokov sú nasledujúce implikácie, ktoré platia pre neprázdne množiny A, B:

$$\forall x \in A\ V(x) \Rightarrow \exists x \in A\ V(x), \tag{1}$$

$$\exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y) \Rightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y). \tag{2}$$

Poznamenajme, že predpoklad neprázdnosti množín A, B nemožno vynechať, pretože formálny výrok $\forall x \in \emptyset\ V(x)$ je pravdivý a formálny výrok $\exists x \in \emptyset\ V(x)$ je nepravdivý. Priblížme si oba výroky vystupujúce v implikácii (2). Vo výroku

$$\exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y)$$

sa tvrdí, že existuje taký pevný prvok $x_0 \in A$ spoločný (rovnaký) pre všetky prvky množiny B, že platí $\forall y \in B\ V(x_0, y)$. Napríklad výroky

$$\exists x \in \{1,2,3\}\ \forall y \in \{2,3,4\}\ x < y, \quad \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \{2,3,4\}\ y < x$$

sú pravdivé. V prvom výroku existuje jediné x_0 s požadovanou vlastnosťou a to je číslo 1, v druhom výroku za x_0 stačí vziať ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako číslo 4. Na druhej strane napríklad výrok $\exists x \in \{\,2,3\}\ \forall y \in \{2,3,4\}\ x < y$ je nepravdivý.
Vo výroku

$$\forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y)$$

sa tvrdí, že ku každému prvku $y \in B$ existuje taký prvok $x \in A$ v závislosti od y (teda s každým y príslušný prvok x môže byť iný), že platí $V(x,y)$. Napríklad výrok $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\ y < x$ je pravdivý, pretože pre ľubovoľné prirodzené číslo y stačí zvoliť za x napríklad číslo $y+1$. V uvedenom výroku sa teda vlastne tvrdí, že ku každému prirodzenému číslu existuje prirodzené číslo od neho väčšie. Na druhej strane vo výroku $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y < x$ sa tvrdí, že existuje prirodzené číslo, ktoré je väčšie ako všetky prirodzené čísla, čo je zrejme nepravdivý výrok. Zdôvodnime teraz implikáciu (2). Ak teda výrok $\exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y)$ je pravdivý, tak výrok $\forall y \in B\ V(x_0, y)$ platí pre nejaký pevný prvok $x_0 \in A$, to ale znamená, že je pravdivý aj výrok $\forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y)$ (pre každé $y \in B$ stačí zvoliť to isté $x \in A$ a síce $x = x_0$).
Negáciu výroku p budeme označovať symbolom $\neg p$. Pristúpme teraz k negácii kvantifikovaných výrokov. Ak $V(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine A, tak symbolom $(\neg V)$(x) označme výrokovú funkciu, ktorá je definovaná takto: $(\neg V)(\,x_0)$ označuje výrok $\neg V(x_0)$ pre ľubovoľne zvolený pevný prvok $x_0 \in A$. Pre negáciu všeobecného a existenčného výroku potom platia tieto základné pravidlá (de Morganove):

$$\neg\left(\forall x \in A\ V(x)\right) \Leftrightarrow \exists x \in A\ (\neg V)(x), \tag{3}$$

$$\neg\left(\exists x \in A\ V(x)\right) \Leftrightarrow \forall x \in A\ (\neg V)(x). \tag{4}$$

Pri negácii výrokov s viacnásobným použitím kvantifikátorov používame opakovane de Morganove pravidlá pre negáciu všeobecného a existenčného výroku. Tak napríklad platí:

$$\neg\left(\forall x \in A\ \exists y \in B\ V(x,y)\right) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in A\ (\exists y \in B\ V(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A\ \neg\left(\exists y \in B\ V(x,y)\right) \Leftrightarrow \exists x \in A\ \forall y \in B\ (\neg V)(x,y).$$

Treba si uvedomiť, že $\exists y \in B\ V(x,y)$ je výroková funkcia voľnej premennej x (premenná y je viazaná kvantifikátorom) definovaná na množine A a pre ľubovoľné ale pevné $x \in A$ je to existenčný výrok. Pri negácii kvantifikovaného výroku s trojnásobným použitím kvantifikátorov využijeme poznatky s negovaním kvantifikovaných výrokov, v ktorých vystupuje výroková funkcia s dvomi premennými. Tak napríklad platí:

$$\neg\left(\forall x \in A\ \exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)\right) \Leftrightarrow \neg(\forall x \in A\left(\exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)\right))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in A\ \neg\left(\exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)\right) \Leftrightarrow \exists x \in A\ \forall y \in B\ \exists z \in C\ (\neg V)(x,y,z).$$

Treba si zasa uvedomiť, že $\exists y \in B\ \forall z \in C\ V(x,y,z)$ je výroková funkcia voľnej premennej x (premenné y, z sú viazané kvantifikátormi) definovaná na množine A a pre ľubovoľné ale pevné $x \in A$ je to kvantifikovaný výrok s dvojnásobným použitím kvantifikátorov., ktorého negáciu už vieme vyjadriť. Uveďme na uvedenú negáciu kvantifikovaného výroku príklad zo základov matematickej analýzy, konkrétne definície vlastnej limity postupnosti reálnych čísel$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, a je reálne číslo) :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Symbolom $\mathbb{R}^+$ označujeme množinu všetkých kladných reálnych čísel.
Potom reálne číslo a nie je limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, keď

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \forall m \in \mathbb{N}\ \exists n > m\ |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Ľahko nahliadneme, že reálne číslo a nie je limitou danej postupnosti práve vtedy, keď existuje také okolie $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ bodu a, do ktorého nepatrí nekonečne veľa členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka. V definícii vlastnej limity postupnosti sme použili jednoduchšiu variantu kvantifikovaného výroku. Ekvivalentná definícia je vyjadrená aj zápisom

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ m < n \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon,$$

ktorý je v súhlase s vyššie uvedenými všeobecnými zápismi kvantifikovaných výrokov.

Zovšeobecnením predchádzajúcich úvah možno teda uzavrieť, že negáciu kvantifikovaného výroku dostaneme tak, že všetky kvantifikátory v ňom vystupujúce sa zmenia v opačné (teda všeobecné v existenčné a existenčné vo všeobecné) a výroková funkcia $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definovaná napríklad na množine $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ sa zamení výrokovou formou $(\neg\, V)(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $(\neg\, V)(a_1, a_2, \dots, a_n)$ označuje výrok $\neg V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pre každý prvok $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.

Vzájomné vzťahy kvantifikovaných výrokov

Teraz vyšetríme vzájomné vzťahy kvantifikovaných výrokov, v ktorých vystupujú výrokové funkcie s dvomi alebo tromi premennými. Ukážeme, že všetky vzťahy týchto kvantifikovaných výrokov vyplývajú z implikácií (1) a (2). Najskôr vyriešme vzťahy kvantifikovaných výrokov s dvojnásobným použitím kvantifikátorov. Takýchto výrokov je osem:

$$P_1\colon \forall x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y), \quad P_5\colon \forall y \in B\ \forall x \in A\ V(x,y),$$

$$P_2\colon \forall x \in A\ \exists y \in B\ V(x,y), \quad P_6\colon \exists y \in B\ \forall x \in A\ V(x,y),$$

$$P_3\colon \exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y), \quad P_7\colon \forall y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y),$$

$$P_4\colon \exists x \in A\ \exists y \in B\ V(x,y), \quad P_8\colon \exists y \in B\ \exists x \in A\ V(x,y).$$

Pre výroky P_1 až P_8 platí nasledujúci vzťahový diagram (Šalát, [2], 1986):

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & \Rightarrow & P_3 & \Rightarrow & P_7 & \Rightarrow & P_8 \\ \Updownarrow & & & & & & \Updownarrow \\ P_5 & \Rightarrow & P_6 & \Rightarrow & P_2 & \Rightarrow & P_4. \end{array} \tag{5}$$

Z tautológie $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ dostávame, že z výroku $P_1(P_5)$ vyplýva nielen výrok P_3, ale aj výroky P_7, P_8 a P_4. Podobne z výroku P_3 vyplýva nielen výrok P_7, ale aj výroky P_8 a P_4 atď. Implikácie $P_1 \Rightarrow P_3$, $P_7 \Rightarrow P_8$ vyplývajú z implikácie (1), pretože formálny výraz $\forall y \in B\ V(x,y)$ $(\exists x \in A\ V(x,y))$ je výroková funkcia premennej x (y) definovaná na množine $A(B)$. Implikácia $P_3 \Rightarrow P_7$ je priamo už zdôvodnená implikácia (2). Podobne možno zdôvodniť „spodnú“ cestu diagramu. Treba poznamenať, že žiadnu implikáciu uvedenú vo vzťahovom diagrame nemožno obrátiť (a teda nahradiť ekvivalenciou). Taktiež zo žiadneho výroku z výrokov P_3 a P_7 nevyplýva vo všeobecnosti ani jeden z výrokov P_6, P_2 a taktiež zo žiadneho z výrokov P_6, P_2 nevyplýva vo všeobecnosti ani jeden z výrokov P_3 a P_7. Uveďme napríklad, že z výroku P_3 nevyplýva vo všeobecnosti výrok P_6 ani P_2 a taktiež ani naopak.. Zvoľme za P_3 výrok $\exists x \in \{2,3,5\}\ \forall y \in \{3,4\}\ x < y$, ktorý je pravdivý. Výroky P_6 a P_2, teda výroky

$$\exists y \in \{3,4\}\ \forall x \in \{2,3,5\}\ x < y,$$

$$\forall x \in \{2,3,5\}\ \exists y \in \{3,4\}\ x < y,$$

sú nepravdivé.
Na druhej strane výroky

$$\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ y \mid x,$$

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ y \mid x$$

(označenie $y \mid x$ znamená, že prirodzené číslo y delí prirodzené číslo x) sú pravdivé, prvý je typu P_6 a druhý typu P_2. Príslušný výrok P_3 teda výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ y \mid x$, je však nepravdivý.

Pristúpme teraz ku kvantifikovaniu výrokových funkcií $V(x,y,z)$ s tromi premennými a ku analýze ich vzájomných vzťahov. Všetkých takýchto typov výrokov je 48. Každý typ je určený vlastne poradím premenných x, y, z a druhom kvantifikátora viažuceho premennú. Všetkých poradí premenných x, y, z je šesť a pri každej premennej sú dve možnosti vyskytujúceho sa kvantifikátora. Takto jednému poradiu premenných x, y, z odpovedá osem typov kvantifikovaných výrokov. Pri vzájomných vzťahoch týchto 48 výrokov môžeme množiny a výrokovú funkciu $V(x,y,z)$ kvôli stručnejšiemu zápisu vynechávať a teda napríklad výrok $\forall z \in C\ \exists x \in A\ \forall y \in B\ V(x,y,z)$ označíme ako $\forall z\ \exists x\ \forall y$. Priblížme si postupne jednotlivé typy z týchto výrokov. Zrejme pri trojnásobnom použití toho istého kvantifikátora dostaneme 6 ekvivalentných výrokov. Taktiež je zrejmé, že z výroku $\forall x\ \forall y\ \forall z$ (a z ďalších piatich s ním ekvivalentných) vyplývajú všetky ostatné. Stačí vysvetliť výroky týchto typov:

$$\forall x\, \forall y\, \exists z;\ \forall x\, \exists y\, \forall z;\ \exists x\, \forall y\, \forall z;\ \forall x\, \exists y\, \exists z;\ \exists x\, \forall y\, \exists z;\ \exists x\, \exists y\, \forall z.$$

Všetky ostatné sú z hľadiska objasnenia analogické a dostaneme ich iba zámenou premenných. Napríklad k prvému výroku $\forall x\, \forall y\, \exists z$ môžeme ešte priradiť z hľadiska objasnenia tieto analogické výroky:

$$\forall y\, \forall x\, \exists z;\ \forall x\, \forall z\, \exists y;\ \forall z\, \forall x\, \exists y;\ \forall y\, \forall z\, \exists x;\ \forall z\, \forall y\, \exists x.$$

S výrokom $\forall x\, \forall y\, \exists z$ je to podobne ako s výrokom P_2, ibaže z volíme v závislosti od x aj y. Vo výroku $\forall x\, \exists y\, \forall z$ volíme y v závislosti od x ale tak, že je pevné pre všetky z. Teda napríklad výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ 10x - y < z$ je pravdivý (stačí zvoliť y tak, aby $y \geq 10x$) a výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x + y < z$ je nepravdivý ($1 < x + 1 \leq x + y$ pre ľubovoľné $x \in \mathbb{N}$ aj $y \in \mathbb{N}$).
S výrokom $\exists x\, \forall y\, \forall z$ je to podobne ako s výrokom P_3, ibaže musí existovať pevné x_0 spoločné pre všetky y aj z. Teda napríklad výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x - 1 < y + z$ je pravdivý (stačí zvoliť za x_0 číslo 1 alebo 2) a výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x + 2 < y + z$ je nepravdivý (pre $y = z = 1$ platí $x + 2 > y + z = 2$ pre každé prirodzené číslo x).
S výrokom $\forall x\, \exists y\, \exists z$ je to podobne ako s výrokom P_2, ibaže nielen y ale aj z volíme v závislosti od x. Teda napríklad výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ x < \frac{y}{z}$ je pravdivý (stačí zvoliť y, z v závislosti od x napríklad takto: $y = x + 1$, $z = 1$ alebo $y = 2x^2$ a $z = x$) a výrok $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ y + z < x$ je nepravdivý (k číslu $x = 1$ neexistujú také prirodzené čísla y, z, aby platilo $y + z < 1$).
Výrok $\exists x\, \forall y\, \exists z\, V(x, y, z)$ je pravdivý, ak existuje taký prvok x_0 pevný pre všetky y , že výrok $\forall y\, V(x_0, y, z_0)$ je pravdivý pre nejaké z_0. Teda napríklad výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ x + z < 3y$ je pravdivý (výrok $\forall y \in \mathbb{N}\ x_0 + z_0 < 3y$ je pravdivý pre $x_0 = 1 = z_0$) a výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ x + z < y$ je nepravdivý (výrok $\forall y \in \mathbb{N}\ x_0 + z_0 < y$ je nepravdivý pre akékoľvek prirodzené čísla x_0, z_0).
S výrokom $\exists x\, \exists y\, \forall z$ je to podobne ako s výrokom P_3, ibaže musí existovať pevné x_0 aj y_0 spoločné pre všetky z. Teda napríklad výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ \frac{x}{y} < z$ je pravdivý (stačí položiť napríklad $x_0 = 1$ a $y_0 = 2$) a výrok $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ x + y < z$ je nepravdivý ($2 \leq x_0 + y_0$ a potom neplatí výrok $\forall z \in \mathbb{N}\ x_0 + y_0 < z$ pre žiadne prirodzené čísla x_0, y_0).

Pristúpme teraz ku vzťahom kvantifikovaných výrokov výrokových funkcií s tromi premennými. Všetky tieto vzťahy vyplývajú so vzťahového diagramu kvantifikovaných výrokov výrokových funkcií s dvomi premennými. K výrokom typu $\Omega x \in A\ \varsigma y \in B\ V(x, y)$, kde Ω, ς je ľubovoľný kvantifikátor, priradíme v diagrame výrok $\Omega x \in A\ \ \varsigma y \in B\ \delta z \in C\ V(x, y, z)$. Teda napríklad k výroku $\forall x \in A\ \forall y \in B\ V(x, y)$ priradíme výrok $\forall x \in A\ \forall y \in B\ \forall z \in C\ V(x, y, z)$ alebo $\forall x \in A\ \forall y \in B\ \exists z \in C\ V(x, y, z)$. Takto platia tieto základné vzťahy pre kvantifikované výroky výrokových funkcií s tromi premennými pre poradie premenných x, y, z:

$$\begin{array}{ccccccccc} \forall x\, \forall y\, \forall z & \Rightarrow & \exists x\, \forall y\, \forall z & \Rightarrow & \forall y\, \exists x\, \forall z & \Rightarrow & \exists y\, \exists x\, \forall z & \Rightarrow & \exists y\, \exists x\, \exists z \\ \Updownarrow & & & & & & & & \Updownarrow \\ \forall y\, \forall x\, \forall z & \Rightarrow & \exists y\, \forall x\, \forall z & \Rightarrow & \forall x\, \exists y\, \forall z & \Rightarrow & \exists y\, \exists x\, \forall z & \Rightarrow & \exists y\, \exists x\, \exists z \end{array} \tag{6}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \forall x\, \forall y\, \exists z & \Rightarrow & \exists x\, \forall y\, \exists z & \Rightarrow & \forall y\, \exists x\, \exists z & \Rightarrow & \exists y\, \exists x\, \exists z \\ \Updownarrow & & & & & & \Updownarrow \\ \forall y\, \forall x\, \exists z & \Rightarrow & \exists y\, \forall x\, \exists z & \Rightarrow & \forall x\, \exists y\, \exists z & \Rightarrow & \exists y\, \exists x\, \exists z \end{array} \tag{7}$$

Zdôvodnime napríklad implikácie $\forall x\, \forall y\, \forall z \Rightarrow \exists x\, \forall y\, \forall z$, $\exists x\, \forall y\, \forall z \Rightarrow \forall y\, \exists x\, \forall z$. Prvá implikácia vyplýva z implikácie (1). Totiž

$$\forall x \in A\, \forall y \in B\, \forall z \in C\, V(x,y,z) \Leftrightarrow \forall x \in A\, (\forall y \in B\, \forall z \in C\, V(x,y,z)),$$

kde $\forall y \in B\, \forall z \in C\, V(x,y,z)$ je výroková funkcia jednej premennej x (označme ju φ), ktorá je definovaná na množine A. Platí teda $\forall x \in A\, \varphi(x) \Rightarrow \exists x \in A\, \varphi(x)$. V druhej implikácii platí:

$$\exists x \in A\, \forall y \in B\, \forall z \in C\, V(x,y,z) \Leftrightarrow \exists x \in A\, \forall y \in B\, (\forall z \in C\, V(x,y,z)),$$

kde $\forall z \in C\, V(x,y,z)$ je výroková funkcia definovaná na množine $A \times B$, označme ju $\omega(x,y)$. Potom z implikácie $P_3 \Rightarrow P_7$ zo vzťahového diagramu (5) vyplýva:

$$\exists x \in A\, \forall y \in B\, \big(\forall z \in C\, V(x,y,z)\big) \Leftrightarrow \exists x \in A\, \forall y \in B\, \omega(x,y) \Leftrightarrow \forall y \in B\, \exists x \in A\, \omega(x,y)$$
$$\Leftrightarrow \forall y \in B\, \exists x \in A\, (\forall z \in C\, V(x,y,z)) \Leftrightarrow \forall y \in B\, \exists x \in A\, \forall z \in C\, V(x,y,z).$$

Ďalšie vzťahy analogické vzťahom (6), (7) dostaneme tak, že budeme vychádzať z ostatných piatich poradí premenných x, y, z: $\forall y\, \forall x\, \forall z$, $\forall y\, \forall x\, \exists z$; $\forall x\, \forall z\, \forall y$, $\forall x\, \forall z\, \exists y$; $\forall y\, \forall z\, \forall x$, $\forall y\, \forall z\, \exists x$; $\forall z\, \forall x\, \forall y$, $\forall z\, \forall x\, \exists y$; $\forall z\, \forall y\, \forall x$, $\forall z\, \forall y\, \exists x$. Ide teda o ďalších 10 analogických diagramov.

Záver

Význam kvantifikovaných výrokov v logickej výstavbe každej matematickej disciplíny je dôležitý. Veľký aj malý kvantifikátor sú základné kamene vedeckého myslenia. Viacerí vysokoškolskí učitelia matematiky si myslia o študentoch matematiky, ktorí dokonale chápu zmysel a vzťahové relácie kvantifikovaných výrokov výrokových funkcií s tromi premennými, že majú už matematické myslenie. Takéto myslenie je rozhodujúce v hĺbke poznania čohokoľvek v matematike.

Literatúra

[1] Medek, V. a kol. 1975. *Matematická terminológia.* Bratislava: SPN, 1975.

[2] Šalát, T. - Smítal, J. 1986. *Teória množín.* Bratislava: Alfa, 1986.

[3] Vrábel, P. 2018. *Teória množín a teoretická aritmetika* (CD). Nitra: UKF 2018, ISBN 978-80-558-1332-5.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 1, p. 14 – 22
ISSN 2453-6083

Fibonacci Numbers and Selected Practical Applications in the Matlab Computing Environment

Viliam Ďuriš [a*] – Lucia Rumanová [b] – Dusan Vallo [c] – Júlia Záhorská [d]

[a,bc,d,*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, 949 74 Nitra, Slovakia*

Received March 14, 2019; received in revised form March 25, 2019; accepted April 4, 2019

Abstract

Fibonacci numbers play an important role in mathematics and appear in many places to solve practical problems even. In fact, many complex publications have been published on this issue. Surprisingly, Fibonacci numbers are used so extensively that an association dealing with issues related to them was established. Since 1963, it has issued a specialized scientific journal called Fibonacci Quarterly. The most well-known applications that take advantage of Fibonacci numbers are in geometry, but when exploring their contexts and methods, the use of Fibonacci numbers in computer science and in school mathematics has also been addressed.

Keywords: Fibonacci, Matlab, golden ratio, encryption, unit transfers

Classification: I20, C60

Introduction

The Italian mathematician Leonardo da Pisa (also known as Fibonacci), who lived in the early 13th century, became famous in the history of mathematics for unriddling the following task: "*Someone has placed a couple of rabbits in sort of an enclosure to find out how many couples are born within a year when the couple of rabbits brings another couple into the world on a monthly basis, considering the rabbits begin to give birth when they are two months old*" (Knott, Quinney, 1997). Fibonacci solved this problem as follows. In the first and second month, there is only one pair of rabbits. In the third month, it is two couples, because the original couple brings a new couple (a baby boy rabbit and a baby girl rabbit) after two months. In the fourth month, there are three couples because it is only the original couple that still bears offspring. In the fifth month, we have five couples, because two more couples are added to those that lived in the fourth month, because in the fifth month the couples that lived in the third month will give birth. In the sixth month, except for the couples that already existed in the fifth month, three more couples will come in, because the fourth-month couples will give birth. And that is how it goes (Figure 1) (Fulier, Šedivý, 2001).

Fibonacci realized that the number of couples in a given month was the sum of the number of couples that lived in the previous month and the number of couples that already lived two months earlier. He marked the number of couples in the n-th month as a_n. Then the rule he found could be written as $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, with only $n > 2$ allowed under this rule.

[*]Corresponding author; email: vduris@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.1.14-22

Fibonacci then easily calculated $a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = 13$, $a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = 21$, $a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34$, $a_{10} = a_9 + a_8 = 34 + 21 = 55$, $a_{11} = a_{10} + a_9 = 55 + 34 = 89$ and eventually a element $a_{12} = 144$, and thus the answer that there would be 144 rabbits after a year.

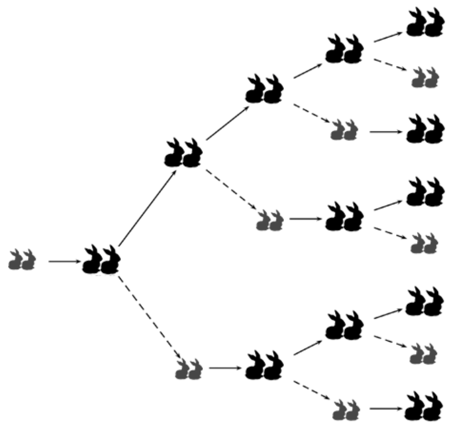


***Fig. 1**: Fibonacci's rabbit task*

2 Fibonacci numbers and the golden ratio in geometry

Let us look at the sequence

$$1, 1, 2, 3, 5, 8...$$

where for every element it is possible to state:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2, a_1 = a_2 = 1$$

The Fibonacci sequence could easily be generated, for instance, in the Matlab computing environment with the following algorithm (Dikovic, 2017):

```
function f = fibonacci(n)
  f = zeros(n, 1);
  f(1) = 1;
  f(2) = 1;
  for k = 3:n
    f(k) = f(k - 1) + f(k - 2);
  end
end
```

The Fibonacci function in Matlab can also be called recursively. However, a recursive call prolongs the calculation and often blocks a large memory area by reserving a memory location to create temporary local variables.

```
function f = fibonacci2(n)
if n == 1 | n == 2
  f = 1;
  return
end
f = fibonacci2(n - 1) + fibonacci2(n - 2);
```

Between the Fibonacci sequence and the geometric sequence

$$b, bq, bq^2, bq^3, \dots$$

there exists an analogy (Znám, 1975), because for the first three elements of the geometric sequence there can be applied that

$$b + bq = bq^2, \text{ hence } 1 + q = q^2, b \neq 0$$

Then each element of the sequence $bq^2, bq^3, \dots$ is from the sum of the previous two and there applies

$$bq^{n-2} + bq^{n-1} = bq^n, n \geq 2$$

Our task is to properly choose a number *q* to get elements of the Fibonacci sequence.

Let us say that the sequence $\{Z_u\}_1^\infty$ has a property *I* if $u \geq 3$, it holds true that

$$Z_u = Z_{u-1} + Z_{u-2}.$$

If then the following sequences

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$
$$y_1, y_2, y_3, \dots$$

have the property *I*, so does the sequence

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots$$

have the property *I.* Then, the sequence $\{cq_1^n + dq_2^n\}$ also has the property *I*. Therefore, the numbers *c* and *d* have to be chosen the way that the first two elements of this sequence equal the numbers a_1 and a_2 , hence the following equalities are valid

$$cq_1 + dq_2 = a_1 = 1$$
$$cq_1^2 + dq_2^2 = a_2 = 1$$

From $b + bq = bq^2$ it is valid:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

After rearrangement we get:

$$c(1+\sqrt{5}) + d(1-\sqrt{5}) = 2$$
$$c(6+2\sqrt{5}) + d(6-2\sqrt{5}) = 4$$

By solving this system of equations we get:

$$c = \frac{1}{\sqrt{5}}, d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

We got a straightforward number a_n:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

Then for each natural number *n* it is valid

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$$

If we denote $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, using the relation for the expression a_n and the fact that $\frac{1}{A} = -B, A = 1 - B$ we get

$$a_1 + \dots + a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(A + A^2 + \dots + A^n) - \frac{1}{\sqrt{5}}(B + B^2 + \dots + B^n) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{A^{n+1}-1}{A-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{B^{n+1}-1}{B-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{A^{n+1}}{-B} - \frac{B^{n+1}}{-A} + \frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right\} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\{A^{n+2} - B^{n+2}\} - 1 = a_{n+2} - 1$$

An important finding of the Fibonacci numbers is that two neighbouring Fibonacci numbers are always relatively prime. We are able to prove it using mathematical induction. For the first two Fibonacci numbers, it is valid that they are relatively prime. Let us suppose now that a_{n-1} and a_n are relatively prime. Then, from the equality $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ there follows that every common divisor of the numbers a_n and a_{n+1} would also have to be a divisor for the number a_{n-1}, and therefore also a common divisor of the numbers a_n and a_{n-1}. Hence, $(a_n, a_{n+1}) = 1$.

Additionally, it is valid that the number a_n is a divisor of the number a_m only and when *n* is a divisor of the number m. We can first prove that if $n|m$, then $a_n|a_m$. Let us consider $n|m$ and $m = nm_1$. Let us proceed by induction with respect to m_1. If $m_1 = 1$, then $m = n$ and the theorem is valid. Let us suppose that our theorem is valid for $m_1 = k$. We can prove that it also applies to $m_1 = k + 1$. If *u* and *v* are natural numbers, then $a_{u+v} = a_{u-1}a_v + a_u a_{v+1}$. By using this relation and by substituting $u = mk, v = m$ we get:

$$a_{m(k+1)} = a_{mk+m} = a_{mk-1}a_m + a_{mk}a_{m+1}$$

On the right hand side, both of the addends are divisible by the number a_m based on the inductive assumption $a_m \big| a_{m(k+1)}$. Now, we can prove that if $a_n|a_m$, then $n|m$. Let then $a_n|a_m$ and let $m = n \cdot s + t, 0 < t < n$. By substituting $u = ns, v = t$ we get:

$$a_m = a_{ns-1}a_t + a_{ns}a_{t+1}$$

From this equality, it follows that $a_n|a_{ns-1}a_t$. According to the proven part of the theorem, it is valid that $a_n|a_{ns}$ and according to the assumption of the theorem $a_n|a_m$. Furthermore, we know that $(a_{ns}, a_{ns-1}) = 1$ is valid, therefore $a_n \nmid a_{ns-1}$ (because it is a divisor of the number a_{ns}). Then $a_n|a_t$. However, this is not possible because the Fibonacci numbers form a growing sequence (from $n = 2$), and therefore $a_n > a_t$, because $n > t$.

The findings about Fibonacci numbers allow us to solve problems related to the golden ratio in geometry. We say that the sides of the rectangle *a*, *b* form the golden ratio if

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

is applied. After adjusting the last equality, we get $a^2 = ab + b^2$ or

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Let us denote $\frac{a}{b} = C$, then

$$C^2 - C - 1 = 0$$

hence

$$C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = A, C_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Since we only consider a positive number, the golden ratio converges to 1.61803398874989... (Sen, Agarwal, 2008). The golden ratio can be simulated in the Matlab environment (Figure 2) with the following code (Mathworks, 2018):

```
>> n = 2:10;
>> ratio = fibonacci(n)./fibonacci(n - 1);
>> plot(n,ratio, '--o');
>> hold on
>> line(xlim, [1.618 1.618]);
>> hold off
```

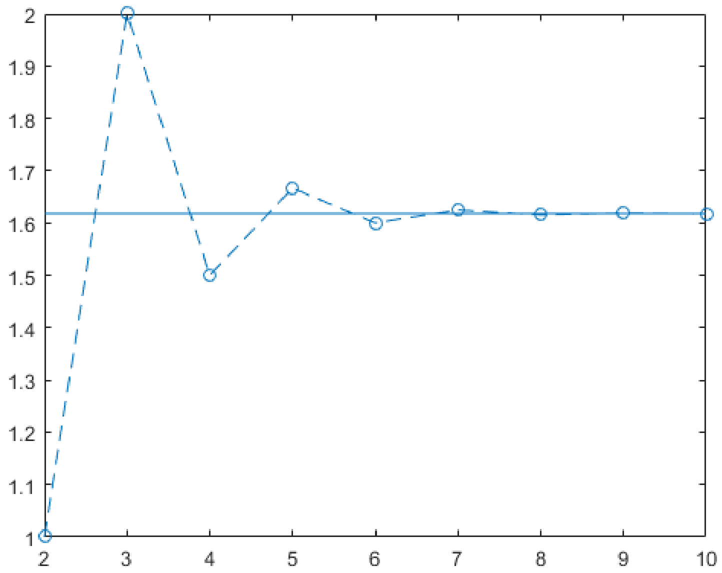


***Fig. 2**: Convergence to the golden ratio*

Various specific geometric visualizations of the Fibonacci numbers and the golden ratio can be viewed, for example, in the paper (Weiss, Mick, 2014).

3 Fibonacci numbers and cryptography

Fibonacci numbers also have their justification in computer science and cryptography. (Sinha, 2017), (Elfard, 2013) when encoding and decoding messages. Let us consider a message "`word`" and a password "`abc`".

```
>> s = 'word';
>> pwd = 'abc';
```

We will encrypt this message using the Fibonacci sequence as follows:

1. Let us first rearrange the letters in the message inversely.
   ```
   >> s = s(end:-1:1);
   ```
   By which we get the word „`drow`"
2. Now, we will combine the password „`abc`" with the word we got to obtain the word „`drowabc`".
   ```
   >> s = [s pwd]
   ```
3. Since our password has a length of 3, we will generate the first three numbers in the Fibonacci sequence: 1, 1, 2.
   ```
   >> cnt = length(pwd);
   >> f = fibonacci(cnt);
   ```
4. Now, the coding itself will consist in passing the entire length of the word „`drowabc`" in the number of iterations how long the password (or the generated Fibonacci sequence) is and that each letter in the word is shifted ordinarily within the ASCII table:
   a) for odd positions to the right by as many characters as determined by the element of the Fibonacci sequence in the current iteration
   b) for even positions to the left by as many characters as determined by the element of the Fibonacci sequence in the current iteration

If we moved behind the letter „z“, while moving in the cycle to the right, we move up again starting from the letter „a“. On the contrary, if we moved before the letter „a“, while moving in the cycle to the left, we move down again to the letter „z“ (the alphabet of characters “a”…”z” is considered as if it were on a circle).

In our specific example, the word „drowabc“ would pass through three times. As a result, we got this coding sequence:

“eqpvbad”, “fpqucze”, “hnssexg”

with the word “**hnssexg**” being the encoding result; we have thus succeeded in encrypting the message “word” using the Fibonacci sequence for the password “abc”.

We implemented this algorithm into the Matlab computing environment as a batch file (script) and the entire source text looked as follows:

```
s = 'word';
pwd = 'abc';
s = s(end:-1:1);
s = [s pwd];
cnt = length(pwd);
f = fibonacci(cnt);
letters = ['a' 'b' 'c' 'd' 'e' 'f' 'g' 'h' 'i' 'j' 'k' 'l' 'm'
'n' 'o' 'p' 'q' 'r' 's' 't' 'u' 'v' 'w' 'x' 'y' 'z'];

for it = 1:cnt
  for jt = 1:length(s)
    index = find(letters == s(jt));
    if rem(jt, 2) == 1
       if index + f(it) > length(letters)
         fv = index + f(it) - length(letters);
       else
         fv = index + f(it);
       end
       s(jt) = letters(fv);
    else
       if index - f(it) < 1
         fv = length(letters) + (index - f(it));
       else
         fv = index - f(it);
       end
       s(jt) = letters(fv);
    end
  end
end
disp(s);
```

Decoding works on a precisely inverse principle, so we proceed in the cycle according to the generated Fibonacci sequence by the number of elements of the password length. For odd positions, we shift characters to the left, and for the even ones we do so to the right. If the number of password characters is different, the algorithm will not reach the original inverse word combined with the password. Now, let us apply this algorithm to the given coded string "hnssexg" when we know the password "xyz".

```
s = 'hnssexg';
pwd = 'abc';
cnt = length(pwd);
f = fibonacci(cnt);

letters = ['a' 'b' 'c' 'd' 'e' 'f' 'g' 'h' 'i' 'j' 'k' 'l' 'm'
'n' 'o' 'p' 'q' 'r' 's' 't' 'u' 'v' 'w' 'x' 'y' 'z'];
for it = 1:cnt
  for jt = 1:length(s)
    index = find(letters == s(jt));
    if rem(jt, 2) == 0
       if index + f(it) > length(letters)
         fv = index + f(it) - length(letters);
       else
         fv = index + f(it);
       end
       s(jt) = letters(fv);
    else
       if index - f(it) < 1
         fv = length(letters) + (index - f(it));
       else
         fv = index - f(it);
       end
       s(jt) = letters(fv);
    end
  end
end
disp(s);
```

If we had the correct password, the resulting string after having been decoded has been combined to the right, and we can select the decoded word to be inversely displayed:

```
    if any(strfind(s, pwd)) == 1
      s = strrep(s, pwd, '');
      s = s(end:-1:1);
    end
    disp(s);
```

From the encoded string we got the original "word".

4 Fibonacci numbers and school mathematics

Fibonacci numbers can also be included in teaching at primary school or within optional subjects, and they can be applied, for example, to teach the conversion of miles to kilometers and vice versa. This is an appropriate supplement and a matter of interest in teaching mathematics or physics using the Fibonacci sequence.

Let us consider a sequence of Fibonacci numbers (starting with the second element) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... From physics, we know that 1 mile = 1,609344 kilometers. Let us now take any two consecutive numbers, e.g. 55 and 89, and we can assert that the first number in the sequence represents miles and the second one stands for kilometers (or vice versa).

```
>> mile = 55;
>> km = mile*1.609344
km = 88.5139
>> km = round(km)
km = 89
```

If we need to convert kilometers (or miles) that are not directly elements of the Fibonacci sequence, we first make a breakdown of that number into elements already present in the sequence (such a breakdown can always be made). Let us consider, for example, 15 miles that we need to convert to kilometers. The number 15 itself is not a element of the Fibonacci sequence, so we can first find the largest number within the sequence that does not exceed 15. It is 13, and we can make the decomposition in the way that 15 = 13 + 2, with both elements being elements of the sequence. Based on the previous relationship, 13 miles = 21 km and 2 miles = 3 km. Then 15 miles = 21 + 3 = 24 km. In fact,

```
>> km = round(15*1.609344)
km = 24
```

In the case of larger numbers containing series of ten, it is possible to proceed by taking out the series of ten first, converting a smaller number without a series of ten and then returning by multiplying by the original number. For example, if we needed to convert 1500 miles, it may be difficult to look for the appropriate elements of the Fibonacci sequence (unless we use the Matlab computing environment and the `fibonacci` function, for example).
However, as the number 1500 miles contains series of ten, namely 10^2, we can first break down $1500 = 15 \cdot 10^2$. From the above, we know that 15 miles = 24 km.
Then $1500 = 15 \cdot 10^2 \text{ miles} = 24 \cdot 10^2 \text{ km} = 2400 \text{ km}$.
It should be noted, however, that the approximate value of the golden ratio is 1,618034, so for any two elements of the Fibonacci sequence, $a_n = 1{,}618034 \cdot a_{n-1}$ applies. While converting miles to kilometres, there is a constant factor defined as 1,609344. So, if we used the Fibonacci sequence to convert large numbers that have to be divided into multiple elements of the sequence where precision is lost when providing the conversion, then the distances would just be approximate.

Indeed, if we had a direct conversion of 1500 miles, we would get the exact distance of 2414 km and not 2400 km, which would be advisable to point out in teaching this principle. However, incorporating the Fibonacci principle into elementary school teaching or optional schooling may be of great interest and a way to get to know the possibilities of this issue.

Conclusion

Fibonacci numbers are an interesting issue, but despite their long history, they have not yet been scrutinized. We find Fibonacci numbers where we would not normally expect them to appear. Fibonacci numbers are found in evolution in different biological systems or in different

phenomena in nature, and for many mathematicians they represent beauty and perfection. They can be greatly used even today, such as being an indicator for trading with cryptocurrencies (Fischer, 2009).
Our aim in this paper was mainly to point out selected practical applications of Fibonacci numbers, such as their inclusion and use in cryptography and, on the other hand, their inclusion in the school environment where they can be used to teach conversions already at the lowest level of schools. The issue of Fibonacci numbers is appropriate to model and present, for example, by way of the Matlab computing environment, which proves to be a suitable tool for understanding different mathematical relationships and as a suitable environment for implementing various mathematical algorithms.

References

Knott, R. - Quinney, D. A.: The life and numbers of Fibonacci. 1997, Available at: http://pass.maths.org.uk/issue3/fibonacci/index.html, N.d. Web. 2 February 2019.

Fulier, J. – Šedivý, O.: Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky. Nitra, UKF 2001, ISBN: 80-8050-445-8

Weiss, G. – Mick, S.: Non-standard Visualizations of Fibonacci Numbers and the Golden Mean. KoG, Vol. 18. No. 18., Croatia 2014

Znám, Š.: Teória čísel, Bratislava, SPN, 1975

Dikovic, L.: Exploring Fibonacci Numbers using MATLAB. 10th International Scientific Conference, "Science and Higher Education in Function of Sustainable Development", 06 – 07 October 2017, Mećavnik – Drvengrad, Užice, Serbia

Sen, S.K. - Agarwal, R. P.: Golden ratio in science, as random sequence source, its computation and beyond. Computers and Mathematics with Applications, Elsevier 2008

Mathworks: online documentation, Available at: https://www.mathworks.com/help/symbolic/fibonacci.html, N.d. Web. 12 December 2018.

Sinha, S.: The Fibonacci Numbers and Its Amazing Applications. International Journal of Engineering Science Invention, Volume 6 Issue 9, 2017, ISSN (Online): 2319 – 6734, ISSN (Print): 2319 – 6726

Elfard, S. S.: Cryptography Based on the Linear Fibonacci Forms. In: Bulletin of University of Zawia, Vol . 2, No. 5, 2013

Fischer, R.: Fibonacci Applications and Strategies for Traders. Wiley 2009, ISBN: 978-0471585206

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 5, No. 1, p. 23-28
ISSN 2453-6083

Inquiry-based Mathematics Education: Examples of Solved Tasks of Primary School

Lucia Rumanová[a*] – Júlia Záhorská[a] – Viliam Ďuriš[a] – Dušan Vallo[a]

[a]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received March 15, 2019; received in revised form April 10, 2019; accepted April 12, 2019

Abstract

In this paper we analyze and discuss about implementation of inquiry-based teaching (IBT) into mathematics education. Pupils naturally explore and learn through inquiry, different interesting problems or controlled activities for this inquiry have priority. Also computer technologies (in any form) offer an accessible environment for such a pupils´ work. We describe this education from the perspective of the pupil and the teacher; also mention its goals and what pupils can learn in this way. Various tasks based on inquiry-based teaching are presented in the paper, too. These tasks are related to teaching according to educational domains at lower secondary school in Slovakia.

Keywords: inquiry-based teaching, inquiry, activities, pupils, educational domain.

Classification: D30, D50

Introduction

Generally, in different types of schools, the relationship of pupils to mathematics and other science subjects is not very positive. That is why we think it can help pupils understand when we bring the educational process closer to real life. It is also appropriate to motivate pupils to develop their inquiry skills.

In this way, the pupil can seek answers by experimenting, creating theory, models, looking for appropriate arguments to explain, formulating conclusions from his findings, etc.

In this paper, we focused on IBT in mathematics; we will also give a look at this education from the perspective of the pupil as well as the teacher. We present principles of inquiry-based teaching on specific examples. These examples are related to selected educational domains according to State Educational Program – Mathematics for the lower secondary education – ISCED 2 (2014) of Slovak Republic.

Inquiry-based teaching in mathematics education

In pedagogical understanding, the word inquiry occurred with the author Dewey (1997) while its definition of inquiry is a method of tested discovery that cultivates „deep-seated and effective habits of discriminating tested beliefs from mere assertions, guesses and opinions; to develop a lively, sincere, and open-minded preference for conclusions that are properly grounded".

*Corresponding author; email: lrumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.1.23-28

In an inquiry classroom, concepts are introduced in order to illuminate a mathematical process that all participants have the chance to direct. Yet it is the responsibility of the teacher as „a more experienced knower" to select students' ideas that provide a link to mathematical concepts. (Goos, 2004)

A model of learning science thorough inquiry can see in the schema reproduced in Fig. 1.

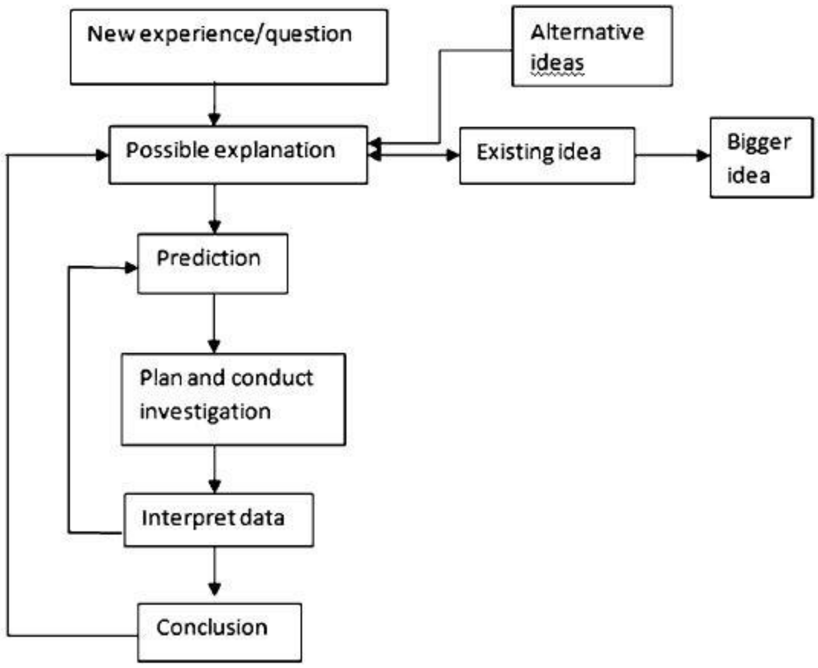


Fig. 1: A model of learningscience through inguiry (Artigue – Baptist, 2012)

So as author Blair (2014) state what with this model of teaching pupils can learn to: ask questions, make conjectures, plan and monitor their activity, explore ideas in collaboration, explain their reasoning, identify when they need new knowledge, ask the teacher for an explanation or prove their results. On the contrary, teachers' goals are harness students´ curiosity, connect concepts and procedures, support student regulation, co-construct open inquiries, combine different forms of reasoning or develop students´ initiative, independence and leadership.

Educational domain: Numbers, variables and counting with numbers taught by IBT

Now we present an activity for understanding the concepts of prime number and compound number. We can also develop abilities to find all the divisors given figures. The dominant method is controlled inquiry for pupils working in groups. This activity is suitable for 6th class (12 – 13 years old pupils).

Author Semanišinová (2018) states how pupils can play the following game: Each player is assigned his own color (such as player A blue and player B red). Player A marks any unmarked number on the game board in blue. Player B then tries in red to mark as many unmarked divisors as the player has selected A. After player B has marked the unselected number divisors, he selects the next number for player A and marks it with his color. Player A then marks his divisor with his color. In the event that a player on the move has selected a number that has no unmarked divider on the board, the player loses the move. The number is marked in black (or crossed out) and the next number is selected by the opponent. The game ends when only numbers that do not have unmarked divisors are unmarked on the game board. Each player counts his or her marked numbers on the game board. The player with the greater total of points wins. Example of one game is shown in Fig. 2.

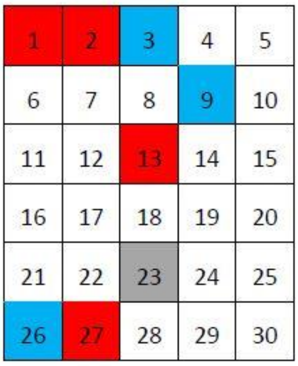


Fig. 2: Possible course of the game (Semanišinová, 2018)

Each pair of pupils plays games twice (each game starts with a different pupil from the pair). Intermediate results of pupils are recorded in a table such as we can see Table 1.

***Table 1**: Selected numbers by pupils (Semanišinová, 2018)*

I have a number	**Divisors of numbers**	**Unselected number divisors**	**Selected number**
			29
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	2, 4, 7, 14	27
22	1, 2, 11, 22	11	25
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6	30
16	1, 2, 4, 8, 16	8	26
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	12	
	Counted out	64	137
		Counted out	201

Pupils play two games and then together pairs are answering such questions of teacher: „Is it preferable to choose 27 or 17 in step 1? Justify what you chose"; „Which number is preferred to choose in the first step?"; „Which number is not a good choice in the first step?"; „Which number has the most divisors?"; „Which number has an odd number of divisors?" or „Describe how you played the game. What moves do you think are beneficial?". In the end, pupils do self-evaluation how to play the game to be successful in it.

Pair pupils present their answers to questions. They together discuss with teacher about possible answers, also formulate arguments. After this discussion, we define the concepts of prime number and composite number to the pupils.

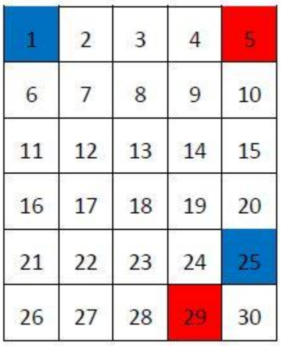
Then pupils solve four tasks in worksheets individually (see Table 2):

***Table 2**: Tasks in worksheet*

Task 1: Fill in the following table:

Number	**Divisors of number**	**Prime number/ composite number?**
1		
2	1, 2	Prime number
…	…	…
30	….	…

Task 2: See the picture below. The number is chosen by the red player.



a) What happens if you this player choose a prime number?

b) What composite number should I choose? Explain why.

Task 3: Decide whether the numbers 19, 31, 45, 51, 63, 67, 91 and 99 are prime numbers or composite numbers.

Task 4: Is there a number that has an odd number of divisors?

Educational domain: Geometry and measurement taught by IBT

Following activity is devoted to geometry for 5th class (10 – 11 years old pupils). Knowledge and skills acquired by pupils are concepts as cube structure (also its plan) and cube body (and also its plan). The dominant method is controlled inquiry for pupils working in groups (possibly pupils can work separately) and working with a computer is also recommended.

The 5E Inquiry-Based Model is used during the lesson of mathematics. In phase Engage pupils work with the first worksheet called „What do you remember about cubes structure from the 4th grade?". Following the Engage is the Explore and teacher formulates the problem about cubes structure or cube body, pupils in controlled inquiry proposes a procedure for drawing a plan of these buildings. During the Explain phase, there is an explanation of all the examined terms in cooperation of the pupil-teacher. The Elaborate phase of the 5E Model is meant a solution to another worksheet with problem tasks. The final phase of this model is the Evaluate, where the teacher formally evaluates pupils' work.

Now we are presenting specific examples of worksheets used during the pupils´ inquiry. Pupils work with that first worksheet and they use given cubes structure (see Fig. 3).

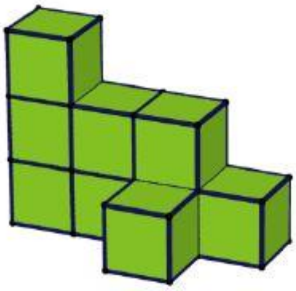


Fig. 3: Cubes structure for pupils´ inquiry

During the pupils' work, the teacher asks the following questions: „Describe the cube and cube structure"; „What do you mean by coding of cube structure?"; „What the plan numbers mean?"; „What do you mean by column, row, floor? (Point at the cubes structure in front of you)"; „Which means top, bottom, front, rear, right, left?". (Záhorská, 2017)

After the work of pupils with the second worksheet pupils know the difference between concepts cube structure and cube body. Also, pupils can draw their plan to them (Fig. 4).

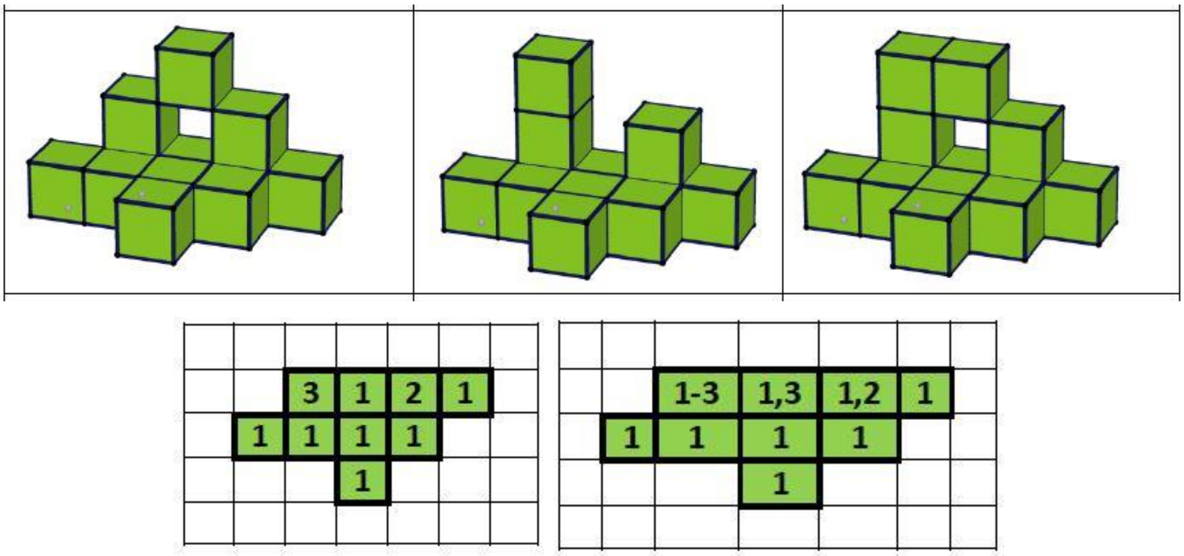


Fig. 4: Examples from the worksheet 2

Work with the pupils is evaluated during the math lesson. Teacher evaluates the work of the pupils formatively. The conclusions that pupils have reached must also be highlighted. In addition to the above formative assessment, the teacher may also use symbols, for example  and .

Conclusion

In this paper we have shared our experiences with IBT. We are looking to increase the interest of math education and include a more engaging way of teaching by including IBT or information and communications technology. By working in groups, pupils help each other and, by presenting the results for a group, inspire individuals who have difficulty presenting their own results. We share the view that this method is suitable for teaching mathematics although it is more time-consuming to prepare a teacher or a pupil's work during lesson.

References

Artigue, M. – Baptist, P. 2012. Inquiry in mathematics education. Res Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school. [online]. 2012. [08-03-2019]. Retrieved from http://www.fibonacci-project.eu.

Blair, A. (2014). Inquiry maths: an idea whose time has come. In Mathematics teaching 240 [online]. 2014. [08-03-2019]. Retrieved from https://www.atm.org.uk/Mathematics-Teaching-Journal-Archive/15344.

Dewey, J. 1997. How we think. Dover Publications, INC. Mineola, New York, 1997. 240 p. ISBN 0-486-29895-7

Goos, M. 2004. Learning mathematics in a classroom community of inquiry. In Journal for Research in Mathematics Education. ISSN 00218251, 2004, Vol. 35, No. 4, 258-291.

Semanišinová, I. 2018. Educational materials for secondary school teachers [online]. 2018. [11-03-2019]. Retrieved from https://vzdelavanie.itakademia.sk/

State Institute for Education, State Educational Program – Mathematics ISCED 2 [online]. 2015. [11-03-2019]. Retrieved from http://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/inovovany-svp-2.stupen-zs/matematika-praca-informaciami/

Záhorská, J. 2017. Educational materials for secondary school teachers [online]. 2017. [12-03-2019]. Retrieved from https://vzdelavanie.itakademia.sk/

Acta Mathematica Nitriensia

Vol. 5, No. 1, p. 29-33

ISSN 2453-6083

Meranie matematickej úzkosti u vysokoškolských študentov

Measurement of Math Anxiety in University Students

Valéria Švecová[a]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received March 15, 2019; received in revised form March 26, 2019; accepted March 28, 2019

Abstract

In Slovakia there is no research into mathematical anxiety and its impact on mathematics. Our goal was to create a tool for measuring mathematical anxiety that would be adapted to Slovak conditions. Our research studied the relationship between individual need for cognitive structure and three forms of anxiety (math, state, and trait). The sample comprised 150 students of two specializations from the Faculty of Education (63 students of primary education – UPV and 87 students of pre-school and elementary education – PEP).

Keywords: math anxiety, university students

Classification: C20

Úvod

Matematická úzkosť ako negatívna afektívna reakcia na situácie súvisiace s matematikou je v dnešnej dobe reálnym problémom. Ako uvádzajú Richardson a Suinn (in Pradeep, 2011) matematická úzkosť zahŕňa pocity napätia a úzkosti, ktoré súvisia s manipuláciou s číslami a riešením matematických problémov v širokom spektre situácii v bežnom živote alebo akademických situáciách. Matematická úzkosť je pocit napätia, obavy alebo strachu, ktorý sa kríži s matematickým výkonom (Ashcraft, 2002). Niekoľko štúdií naznačuje, že matematická úzkosť zasahuje do kognitívneho spracovania prostredníctvom zníženia kapacity pracovnej pamäte (Ashcraft, 2001). Pradeep (2011) syntetizuje rôzne definície do jednej a uvádza, že ide o akýsi stav diskonfortu, strachu pracovať s číslami a strachu riešiť matematické problémy, ktorý vedie k averzii a vyhýbaniu sa matematike a akejkoľvek situácii s matematikou spojenej.

Príčinami vzniku matematickej úzkosti môžu byť aj nepríjemnosti v škole, ako napríklad sledovanie spolužiaka, ktorý vyrieši príklad rýchlejšie, negatívne reakcie učiteľa na žiaka, pričom takýto spôsob zahanbovania sa prenáša do činností spojených s matematikou už len pri čakaní na hodinu a pribúdajúcim vekom matematická úzkosť narastá (Nolting, 2002). Potenciálne kauzálne faktory možno rozdeliť na environmentálne premenné, ako sú negatívne skúsenosti v triede a učiteľove charakteristiky, intelektuálne premenné, napr. stupeň abstraktného a logického myslenia a samozrejme aj osobnostné premenné, kde môžeme zaradiť sebavedomie, učebný štýl, postoje a podobne (Yüksel- Şahin, 2008, Newstead, 1998).

*Corresponding author; email: vsvecova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2019.5.1.29-33

Premenná *sebahodnota* si získala pozornosť v procese nadobúdania matematických vedomostí, zručností a kompetencií. Od jednotlivcov, ktorí sa prejavujú vysokým sebahodnotením sa očakáva, že budú disponovať nízkym stupňom matematickej úzkosti, čím môžu dosiahnuť väčší úspech (Brown, 2008). Už aj v predchádzajúcich výskumoch bola zistená závislosť medzi sebahodnotením a stereotypmi v sociálnych situáciách (Levy,1998). Ako však uvádzajú Ashcraft a Kirk(2001) nimi vytvorený model deficitu pamäte nemusí zachytiť kognitívne procesy, ktoré vplývajú na to, že ani matematicky nadaní študenti nemusia dosahovať dostatočné výsledky, pokiaľ ich je ich pracovná pamäť dočasne ochromená. V takýchto prípadoch môže nastať situácia, že aj študent s nadaním na matematiku nadobudne subjektívny pocit, že matematike nerozumie, že učivo nezvláda. V medzinárodných výskumoch sa na ako jeden z nástrojov na meranie matematickej úzkosti používa škála MARS (*The Mathematics Anxiety Rating Scale*) alebo AMAS (*The Abbreviated Math Anxiety Scale*). Z uvedeného vyplýva, že vplyv matematickej úzkosti na úspešnosť v matematike je predmetom medzinárodného výskumu. Ako uvádza európsky parlament: Matematická kompetencia je schopnosť rozvíjať a používať matematické myslenie na riešenie rôznych problémov v každodenných situáciách. Vychádzajúc z dobrých numerických znalostí sa dôraz kladie na postup a aktivitu, ako aj na vedomosti. Matematická kompetencia zahŕňa na rôznych stupňoch schopnosť a ochotu používať matematické modely myslenia (logické a priestorové myslenie) a prezentácie (vzorce, modely, diagramy, grafy, tabuľky).

Autori Hadfield a McNeil (1994) rozdeľujú príčiny matematickej úzkosti do troch oblastí:

1. Prvým zdrojom sú faktory prostredia. Patria sem rôzne negatívne skúsenosti v triede, nátlak na žiaka zo strany jeho rodičov, poprípade tlak od vyučujúceho tohto predmetu. K faktorom prostredia neodmysliteľne patrí aj nevšímavosť a neochota učiteľa venovať sa žiakom, ktorí učivu nerozumejú, či napríklad strnulý a jednotvárny prístup k výučbe tohto predmetu.
2. Intelektový faktor uvádzajú autori ako príčinu druhú. Intelektový faktor pozostáva z toho, že učebný štýl konkrétneho žiaka nezodpovedá štýlu vyučovania matematiky a taktiež sem patria žiakove postoje voči tomuto predmetu („Matematika je úplne zbytočný predmet.“).
3. Posledným z faktorov, ktoré sú možnou príčinou vzniku matematickej úzkosti u žiakov, sú ich osobnostné faktory. Zahŕňajú pochybnosti dieťaťa o sebe, stratu dôvery vo vlastné matematické schopnosti v dôsledku častého neúspechu. Odmietanie aktivity je príkladom, kedy sa dieťa odmieta pýtať, keď niečomu nerozumie, bojí sa strápnenia, hanbí sa, že ono „jediné“ tomu nerozumie. K osobnostným faktorom môže patriť aj pohľad na matematiku ako na výlučne chlapčenskú záležitosť, čo môže u dievčat vzbudzovať dojem, že aj keď sa budú akokoľvek snažiť, nedokážu uspieť.

Keď to ale zhrnieme, matematická úzkosť a jej vznik je určite kombináciou viacerých zo spomenutých faktorov.

Výskum

Podľa nášho názoru na Slovensku štandardizovaný nástroj na meranie matematickej úzkosti absentuje. Preto sme sa rozhodli vytvoriť nástroj na meranie matematickej úzkosti u vysokoškolských študentov. Pri overovaní vytvoreného nástroja budeme využívať aj dáta získané zo štandardizovaného dotazníka na meranie úzkosti a úzkostlivosti STAI.

Dotazník na meranie úzkosti a úzkostlivosti STAI

Dotazník vychádza zo Spielbergerovej koncepcie o rozlišovaní medzi úzkosťou ako stavom a úzkostlivosťou ako vlastnosťou osobnosti a možnosti merania rozdielov medzi nimi, t. j . medzi dočasným, prechodným stavom a relatívne stálou predispozíciou. Podľa toho je úroveň stavu úzkosti pod vplyvom stresujúcich faktorov vo výraznej závislosti na diferenciách v úzkostlivosti u jednotlivcov. Nosným je vzájomný vzťah stresujúcich podmienok – stav úzkosti – viažuci sa na diferencie v úzkostlivosti jednotlivých ľudí.

Koncepcia celkove vychádza z predpokladu, že vysoko úzkostliví ľudia (s vysokým sklonom k úzkosti) budú vnímať situácie alebo podmienky, ktoré potencionálne implikujú možnosť neúspechu (zlyhania) alebo ohrozenia seba (ohrozenia "ja") s väčšou intenzitou ako ich menej úzkostlivé protipóly.

Dotazník pozostáva z dvoch 20- položkových škál, kde jedna sleduje, ako sa jednotlivec cíti teraz (t. j. sleduje aktuálny stav) a druhá sleduje, ako sa jednotlivec zvyčajne cíti, t. j. úzkostlivosť ako vlastnosť osobnosti.

Dotazník na meranie matematickej úzkosti

Pri tvorbe dotazníka sme vychádzali z dostupných zahraničných nástrojov na meranie matematickej úzkosti a prispôsobili sme ich našim podmienkam. Dotazník sa skladá z 9 –tich položiek, na ktoré participanti odpovedajú pomocou Likertovej škály v rozmedzí od 1 (žiadna úzkosť) po 4 (vysoká úzkosť). Celkové skóre sa určuje súčtom zvolených hodnôt v položkách.

***Tabuľka 1**: Položky z dotazníka na meranie matematickej úzkosti (autori Ivan Sarmány-Schuller, Valéria Švecová, 2016)*

nemôžem pri riešení úloh použiť pripravené vzorce, prípadne kalkulačku
sa zaoberám myšlienkami o písomke z matematiky, ktorá ma čaká nasledujúci deň
píšem písomku z matematiky
mám mať ústnu skúšku z matematiky
mám vypracovať seminárnu prácu z matematiky, v ktorej treba riešiť viacero náročných problémov
sústredene počúvam prednášku z matematiky a nerozumiem jej
mám ísť na seminári/na cvičení z matematiky k tabuli
mám si samostatne doma naštudovať matematický problém
mám sa začať učiť novú kapitolu z matematiky

Pri štatistickom spracovaní dotazníka sa zistilo, že ide o jednodimenzionálny konštrukt, pričom odhad reliability Cronbachovou alfou je 0.83 (95% CI [0.74, 0.89]).

Výskumnú vzorku tvorilo 150 študentov odboru Predškolská a elementárna pedagogika (87 študentov) a Učiteľstvo pre primárny stupeň (63 študentov). Pre týchto študentov nie je matematika primárnym predmetom, tvorí ale neoddeliteľnú a dôležitú súčasť pri štúdiu. V tabuľke 1 uvádzame korelácie medzi jednotlivými premennými – M-Anxiety, S-Anxiety, T-

Anxiety. Na základe korelácií zisťujeme vzťah medzi štandardizovaným a nami vytvoreným dotazníkom.

Tabuľka 1. *Korelácie medzi premennými*

PEP			
	M-Anxiety	S-Anxiety	T-Anxiety
M-Anxiety	1	0,25*	0,10
S-Anxiety	0,25*	1	0,53***
T-Anxiety	0,10	0,53***	1

UPV			
	M-Anxiety	S-Anxiety	T-Anxiety
M-Anxiety	1	0,39*	0,10
S-Anxiety	0,39*	1	0,49
T-Anxiety	0,10	0,49	1

(p<0,001 (***), p<0,01 (**), p<0,05 (*))

Nakoľko bola preukázaná korelácia medzi premennými matematická úzkosť (M-Anxiety) a úzkosťou ako trvalou črtou (S - Anxiety), považujeme dotazník na meranie matematickej úzkosti za správne vytvorený.

Možno konštatovať, že študenti UPV vykazovali nižšiu matematickú úzkosť (M-Anxiety) avšak vykazovali väčšiu úzkosť (S-Anxiety a T-Anxiety). Z celej výskumnej vzorky až 89 študentov (59%) vykazovalo skóre viac ako 23, čo predstavuje vysokú matematickú úzkosť, 48 študentov (32%) vykazovalo miernu úzkosť (skóre 17-22) a žiadnu úzkosť (skóre 9-16) vykazovalo len 13 študentov, čo predstavuje 9%. Domnievame sa, že práve táto matematická úzkosť prispieva k ťažkostiam študentov s matematikou.

Záver

Medzinárodné výskumy matematickej anxiety u žiakov stredných škôl a starších viedli až ku skúsenostiam a spomienkam na vyučovanie elementárnej matematiky v mladšom školskom veku. Matematická úzkosť môže mať za následok problémy súvisiace s učením. Jedným z jej dopadov sú ťažkosti spojené s vypracovávaním domácich úloh, ktoré úzkostlivým žiakom pripomínajú predchádzajúce zlyhania v matematike, čo opätovne spôsobuje úzkosť a vedie k úplnému vyhýbaniu sa plneniu domácich úloh. Negatívne skúsenosti s matematikou vyvolávajú spomienky, v dôsledku čoho sa jej veľa žiakov s matematickou úzkosťou vyhýba. Slabá príprava vedie k nízkej úspešnosti, tá sa stáva ďalšou negatívnou skúsenosťou, ktorá vyvoláva ďalšiu úzkosť a posilňuje názor, že študent je neschopný v matematike.

Vytvorenie nástroja na meranie matematickej úzkosti v slovenských podmienkach ako aj skúmanie závislostí medzi matematickými kompetenciami a matematickou úzkosťou, považujeme v rámci Slovenska za vysoko originálne a v medzinárodnom meradle za aktuálne.

V budúcnosti by sme radi našu pozornosť upriamili na skúmanie matematickej úzkosti u žiakov a študentov základných a stredných škôl, ako aj na jej prípadnú elimináciu, napríklad prostredníctvom vytvoreného intervenčného programu.

Literatúra

ASHCRAFT, M. H. 2002. Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. In: Current Direction in Psychological Science. ISSN: 0960 – 7214, 2002, vol. 11, p. 181-185.

ASHCRAFT, M. H., KIRK, E. 2001.The relationship among working memory, math anxiety and performance. In: Journal of Experimental Psychology. ISSN: 0096-3445, 2001, vol. 130, p.224-237.

BROWN, H.D. 2000. Principles of language learning and teaching. 4th ed. New York: Addison Wesley Longman, 2000, 354p. ISBN: 0-13-017816-0.

HADFIELD, O.D. and McNEIL, K. 1994. The relationship between Myers-Briggs personality type and mathematics anxiety among preservice elementary teachers. In: Journal of Instructional Psychology. ISSN 0094-1956, 1994, vol. 21, p. 33–46.

LEVY, S.R. et al. 1998. Stereotype formation and endorsement: The role of implicit theories. In: Journal of Personality and Social Psychology. ISSN: 0022-3514, 1998, vol. 74, p. 1421 – 1436.

NEWSTEAD K. 1998. Aspects of children's mathematics anxiety. In: Educ Stud Math. ISSN: 0013-1954, 1998, vol. 36, p.53–71.

NOLTING, P.D. 2002.Winning at Math: Your Guide to Learning Mathematics Through Successful Study Skills. Bradenton: Academic Success Press, 2002. 301p. ISBN: 0-940287-34-X.

PRADEEP, R. 2011. A Study of Mathematics Anxiety Amongst Primary Pre-service Teachers enrolled in a Dutch Teacher Training Program. (online). Amsterdam: Universiteit Van Amsterdam, 2011. (cit. 2017.11.23).
Dostupné na Internete: https://esc.fnwi.uva.nl/thesis/centraal/files/f485290306.pdf

YÜKSEL-ŞAHIN F. 2008. Mathematics anxiety among 4th and 5th grade Turkish elementary school students. International Electronic Journal Mathematics Education. 2008, vol.3, p. 179–192. (cit. 2018.2.18).
Dostupné na Internete: https://www.iejme.com/download/mathematics-anxiety-among-4th-and-5th-grade-turkish-elementary-school-students.pdf