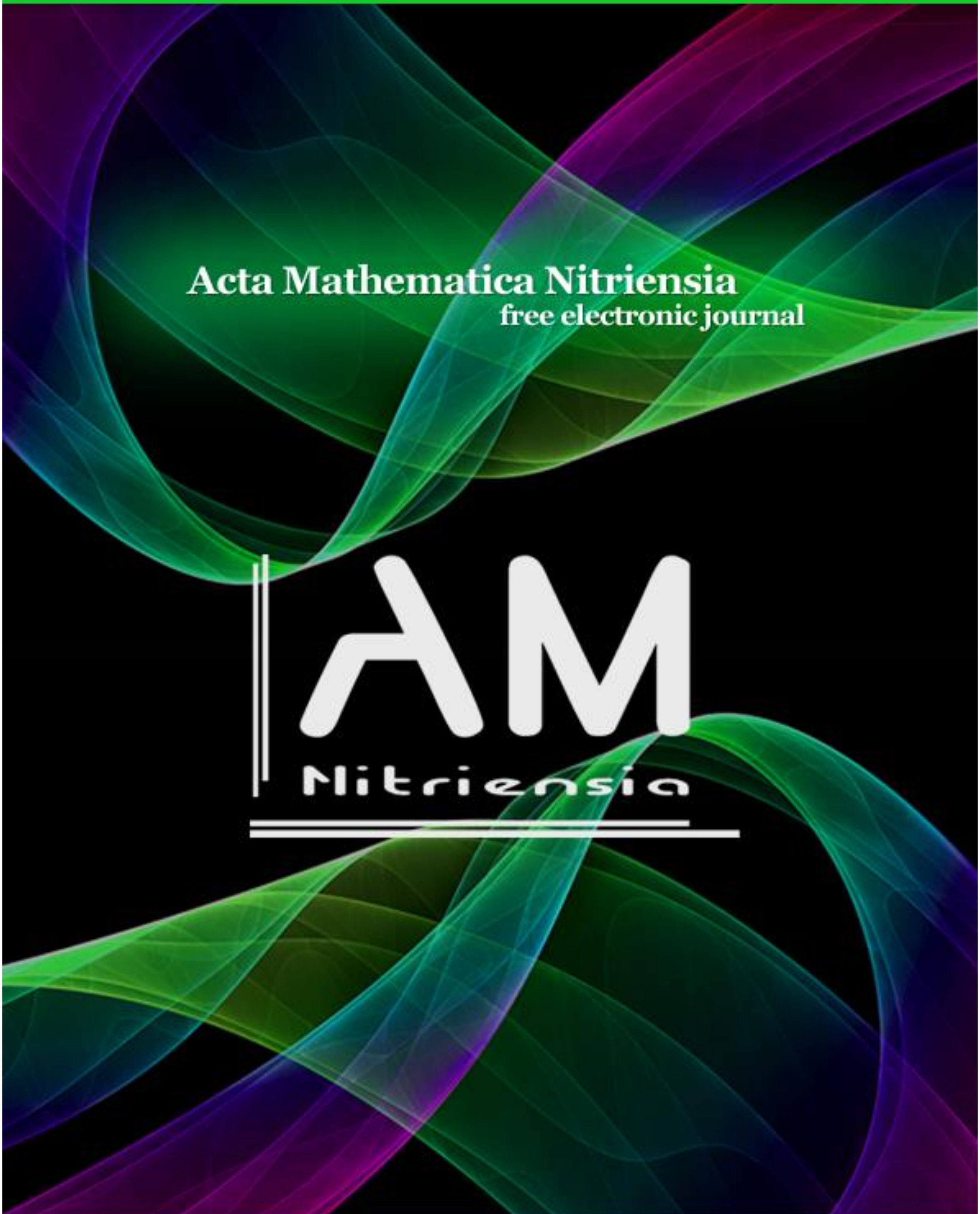
Vol. 2, No. 1, 2016



ISSN: 2453-6083

Názov / Title
Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup

General information
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access

Pokyny pre autorov
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Guidelines for authors
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Recenzné konanie
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.

Review process
The journal carries out a double - blind peer review evaluation of drafts of contributions.

Dostupnosť
www.amn.fpv.ukf.sk

Available from
www.amn.fpv.ukf.sk

Vydavateľ
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

Publisher
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia

Údaje k aktuálnemu číslu
Ročník: 2
Číslo: 1
Rok: 2016
Dátum vydania: 28. 4. 2016

Information to current issue
Volume: 2
No.: 1
Year: 2016
Publication date: April 28, 2016

Obsah

Content

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 1, p. 1 – 6
ISSN 2453-6083

On One Strategy of Solving Problem Tasks in Mathematics

Peter Vrábel*[a]

[a] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 22 March 2016; received in revised form 19 April 2016; accepted 21 April 2016

Abstract

The strategy of penultimate step (way back) is the important method that turns solution of a mathematical problem on target. The detection and the awakening of the immediate cause or the condition of a contrived state are essential at choice of mathematical aids of solving a problem. Then we concentrate on the probation of the state which precedes the verified state directly and it is its precondition. The possibilities usage of this strategy are analysed in various mathematical branches in the submitted contribution. The effectiveness of the method in question is illustrated via solutions of several miscellaneous mathematical problems.

Keywords: mathematical strategy, penultimate step, mathematical problem

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Introduction

The terminologies of mathematical branches are verified already by their histories and they are therefore conventional. The terminology of "theory" of solving problem tasks in mathematics is not accomplished comprehensively. It is mostly popularized by the term heuristics (Polya [3] 1948; Polya [4] 1954). On the other hand an experienced solver of mathematical problems works in several various levels that are artificial by usage of mathematical methods with different comprehension of application. Those most general are known as mathematical strategies usually (Zeitz [5] 1999; Kopka [1] 2004; Vrábel [4] 2005). The method *penultimate step (way back)* is one of these strategies. This strategy is based on the identification of the immediate preceding situation that induces the required (contrived) state. Then we do not concentrate on proving of the required state, but on proving the precondition which directly induces this state.

The strategy of *penultimate step*

In fact, while using the strategy of *penultimate step* we ask what condition implicates the contrived assertion (situation). In other words, we need to approach the problem a converse perspective. We can, thus, talk about "working backwards" too. If we have isolated the penultimate step, then we have reduced a problem into the simple deductive statement

$$\text{The truth of the penultimate step} \Longrightarrow \text{The conclusion.}$$

*Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.1-6

Of course, establishing the penultimate step may involve various forms of argument. One of them can also have the logical scope $p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow p_n$. The well-known games Nim based on removing playing stones are typical examples on such situation.

Problem 1. Have n $(n \in \mathbb{N})$ playing stones on a pile. Two players take from the pile one, two or three stones alternately. The winner is the player who takes the last stone (stones). Investigate that the stating player has a winning strategy (the winning strategy is such manner of game of a player which secures him/her victory regardless the opponent´s manner of game).

Solution. Every natural number n can be expressed in form $n = 4q + r$, where $r \in \{0,1,2,3\}$. Working backwards we can easily understand that a player wins in case he moves, provided that 1, 2 or 3 stones are left in the pile. The player cannot move, if four stones are left on the pile. Similarly, he cannot move if 8 stones, 12 stones, … , $4q$ stones are on the pile because its opponent sets him to these critical (losing) positions. Thus, the starting player wins if $r \in \{1,2,3\}$. The starting player takes 3 stones at the beginning of the game. The opponent is in the losing position because $4q$ stones are in the pile. Subsequently, the starting player has the possibility to keep of playing in such a way that the opponent has to move from the situation when there are $4q$, $4(q-1)$, ... , 8 or 4 stones are in the pile. On other hand, the starting player loses (the opponent has the winning strategy), if there are $4q$ stones in the pile at the beginning of the game.

The following elementary situations are typical examples of applying the *penultimate step*:

- a proof of equality of two number expressions A , B (separately, we prove inequalities $A \leq B$, $B \leq A$ instead of directly proving equality $A = B$);
- a proof of equality of two sets X, Y (here, the penultimate step is based on proving inclusions $X \subseteq Y, Y \subseteq X$);
- a proof of an assertion in form of equivalence of two statements p, q (here, the penultimate step is based on proving implications $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$).

The identification of penultimate step is not always as simple and straightforward as in problem 1. Usually it is necessary to use also other mathematical methods in order to establish the penultimate step. For example consider the following task:

Prove that the product of four consecutive natural numbers cannot be the square of an integer.

We cannot think of any easy criteria for determining when a number cannot be a square of an integer. By experimentation, for $f(n)$, $f(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, we have the following values:

$$f(1) = 24 = 5^2 - 1, f(2) = 120 = 11^2 - 1, f(3) = 360 = 19^2 - 1,$$

$$f(4) = 840 = 29^2 - 1, f(5) = 1680 = 41^2 - 1, f(20) = 212\,520 = 431^2 - 1$$

$$f(113) = 171\,845\,880 = 13109^2 - 1.$$

The hypothesis "$f(n)$ *is one less than a perfect square for any* n" is legitimate. Evidently, that $k^2 - 1$ $(k \in \mathbb{N})$ is not a square of an integer. We discover the penultimate step, and the new task is to prove that

"$f(n)$ *is the form* $k^2 - 1$ *for any* n", which is quite easy:

$$f(n)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=$$
$$\big((n^2+3n+1)-1\big)\big((n^2+3n+1)+1\big)+1=(n^2+3n+1)^2.$$

Applications of the p*enultimate* step strategy in problem solving

Problem 2. Investigate whether there are such natural numbers m, n for which it holds

(1) $$5^m-m^2+3(m+1)=2^n+1$$

is valid.

Solution. Consider most likely that equation (1) does not have any solution in the set of natural numbers. Two number expressions X, Y with integral values do not equal besides when one of them is always an even number and the second one is always an odd number. Therefore, using the strategy of penultimate step we aim to prove that the number expressions $5^m-m^2+3(m+1)$, 2^n+1 have a different parity. Number 2^n+1 is odd for any $n\in\mathbb{N}$. On the other hand, $5^m-m^2+3(m+1)$ is an even number for any $m\in\mathbb{N}$. It is sufficient to consider cases for even and odd m particularly. If m is odd then the terms $5^m, m^2$are odd and $3(m+1)$ is even. If m is even then the terms 5^m, $3(m+1)$ are odd and m^2 is even.

Problem 3. Find the greatest common divisor of numbers a, b, if

$$a=2^{2004}-1,\, b=2^{2001}-1.$$

Solution. Numbers A, B or numbers $A, A-B$ have the same greatest common divisor. Therefore, the penultimate step is based on finding the greatest common divisor d of numbers $a, 7.\,2^{2001}$, which is easier. The number a is odd, therefore d is also odd. Number $7.\,2^{2001}$ has only odd natural divisors, namely numbers 1, 7. Number 7 divides also number a, because

$$a=(2^3-1)(2^{2001}+2^{1998}+\cdots+2^3+1).$$

This implies that 7 is the greatest common divisor of numbers a, b.

Remark. Number 7 divides also number b because

$$b=(2^3-1)(2^{1998}+2^{1995}+\cdots+2^3+1).$$

However, it is further necessary to prove that numbers $2^{2001}+2^{\,1998}+\cdots+2^3+1$, $2^{1998}+2^{1995}+\cdots+2^3+1$ are relatively prime.

Problem 4. Let M be an arbitrary subset of set $\{1,2,\dots,2n\}$ with $n+1$ elements. Prove that M contains two numbers which are relatively prime.

Solution. Numbers $k, k+1$ are relatively prime for any natural number k. If a natural number d divides both numbers $k, k+1$, then it divides also their difference $k+1-k=1$, hence $d=1$. In this case the penultimate step lies in proving that an arbitrary subset of set $\{1,2,\dots,2n\}$ with $n+1$ elements contains at least one couple of natural numbers $k, k+1$, where $k+1\le 2n$. Indeed, this follows easily from the Dirichlet´s Box Principle (=pigeonhole principle) because

$$\{1,2,\dots,2n\}=\{1,2\}\cup\{3,4\}\cup\cdots\cup\{2n-1,2n\}.$$

The sets which are to the right of the last equality are mutually disjoint and their number is n. Set M has $n+1$ elements, therefore two its elements necessarily belong to one of the sets $\{1,2\}, \{3,4\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$.

Problem 5. Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be an arbitrary permutation of numbers $1, 2, \ldots, n$. Prove that

$$(x_1+1)(x_2+2)\cdot \cdots \cdot (x_n+n)$$

is an even number for every odd natural number n.

Solution. The product of several natural numbers is even if and only if at least one of the factors is an even number. We shall therefore prove that at least one of numbers x_1+1, $x_2+2, \ldots, x_n+n$ is even. Compute the sum of these numbers:

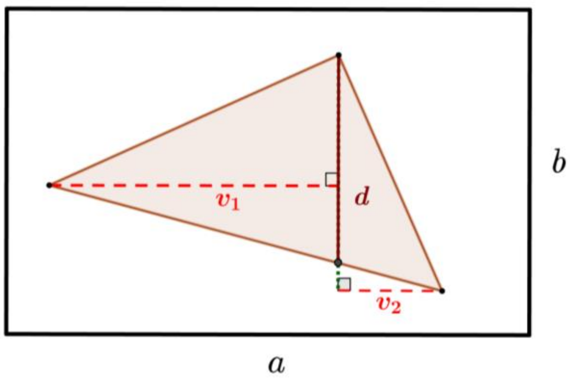
$$(x_1+1)+(x_2+2)+\cdots+(x_n+n)=$$

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(1+2+\ldots+n)=2(1+2+\ldots+n).$$

This sum is, thus, an even number. If the sum odd quantity of natural numbers is even, then at least one of these numbers must be even.

Problem 6. Consider a square $10\ \mathrm{cm} \times 10\ \mathrm{cm}$. There are 101 points in this square, and there are no three points among them lying in a line. Show that there is a triplet of points among them which form a triangle with area no more than 1 cm^2.

Solution. The area of an arbitrary triangle inscribed in a rectangle with side a, b does not exceed $\frac{ab}{2}$. This is evident from the following figure.



It is possible to divide such a triangle into two triangles with a common side of length d which is parallel to one side of the rectangle (b). Apparently, $d \le b$. The sum of altitudes v_1, v_2 of both triangles is not greater than the length of the second side of the rectangles (a). The sum of the areas of the two triangles is equal to number $\frac{dv_1}{2}+\frac{dv_1}{2}$. We obtain

$$\frac{dv_1}{2}+\frac{dv_1}{2}=\frac{1}{2}d(v_1+v_2)\le\frac{1}{2}ab.$$

The penultimate step here is based on the possibility of dividing a given square to 50 rectangles with area 2 cm^2. At least three points from the given 101 points get onto at least one rectangle from these 50 rectangles. It is the consequence of the Dirichlet´s Box Principle. It is sufficient to divide one side of the square into 10 segments measuring 1 cm in length and the remaining side into 5 segments with length 2 cm. This way we obtain the net dividing the given square with 50 rectangles.

Problem 7. Prove that for every natural number n it holds that

$$\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor,$$

where $\lfloor x\rfloor$ denotes the floor of a real number x.

Solution. If there is an integer m with the property $a, b \in \langle m, m+1)$ for some real numbers a, b, then $\lfloor a\rfloor = \lfloor b\rfloor$. Hence, the use of the penultimate step here is based on proving that $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor \in \langle k, k+1)$ for each natural number n, where $k = \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor$.

It is evident that inequalities

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} < \sqrt{n}+\sqrt{n+1}+1$$

are true for any $n \in \mathbb{N}$. These inequalities are consequence of relations

$$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n}\sqrt{n+1} < 4n+2 <$$

$$2n+2+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1} = \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\ +\ 1\right)^2.$$

If n is an arbitrary natural number, then $4n+2$ cannot be a square of an integer. The remainder after the division of natural number m^2 by number 4 is 0 or 1 for any $m \in \mathbb{N}$, but for number $4n+2$ equals 2. The equality $\lfloor x\rfloor = \lfloor x+1\rfloor$ is true for every $x \in \mathbb{R}$. Thus, we obtain

$$k^2 = \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor^2 < 4n+2 < \lfloor\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)+1\rfloor^2 = (k+1)^2,$$

$$k < \sqrt{4n+2} < k+1,$$

$$k = \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor.$$

Conclusion

It is convenient to observe certain steps verified by practice when we solve problem tasks in mathematics. The consistent understanding and the accurate orientation are primary. The determination of a reasonable beginning strategy appertains to the initial steps when solving mathematical problems. We use mainly the following methods:

- solving a more general problem, or on the contrary, a more specific one;
- experimentation, testing particular cases, solving a easier problem with some changed or missing conditions;
- using the method and the result of a similar problem, reformulation and transformation of a problem;
- decomposition of the task solution to various separate cases;
- consideration of a possible estimation of a solution, using a graphical method and implementation of a suitable quotation;
- identification of an immediate occasion that induces a required (contrived) state, i.e. the penultimate step strategy.

The latter plays the most important role in the reasonable alignment of solving most of mathematical problems.

References

[1] Kopka, J. 2004. *Výzkumný přístup při výuce matematiky.* Ústí nad Labem: Acta

Universitatis Purkynianae 101, 2004, ISBN 80-7044-604-8.

[2] Polya, G. 1948. *How to Solve it.* New Jersey: Princeton, 1948.

[3] Polya, G. 1954. *Mathematics and Plausible Reasoning.* New Jersey: Princeton, 1954.

[4] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: FPV UKF, Edícia prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050-840-2.

[5] Zeitz, P. 1999. *The Art and Craft of Problem Solving.* New York: John Wiley and Sons, 1999, ISBN 0-471-13571-2

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 1, p. 7 – 12
ISSN 2453-6083

Limit of a Sequence Defined by Recursion

Marek Varga[*a] – Zuzana Naštická[a]

[a] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 3 April 2016; received in revised form 11 April 2016; accepted 21 April 2016

Abstract

Limit of a sequence is one of the fundamental notions in university mathematics. Computing limits of various types is included in standard tasks. This paper is devoted to selected non-standard and/or problem limits. The sequences in question are defined by recursion, thus traditional algorithms are of no use here and must be superseded by other methods.

Keywords: sequence defined by recursion, limit of sequence, application of limit of sequence

Classification: I35

Introduction

Limit of a sequence is one of the cornerstones of calculus. Based on this notion calculus defines the sum of infinite series, limit of a function (Heine definition), then derivative of a function (special type of a limit of a function) and finally also definite (Riemann) integral.

Consequently, the main mathematical skills of university students who attend calculus courses must include also computation of various types of limits of a sequence. The pillars are the limits which may be referred to as paradigm limits, such as

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = \infty \quad \text{(both for } k>0\text{)}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{(where } a>0\text{)}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty \quad \text{(for } a>1,\ k>0\text{)}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \text{ and } \quad \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty; & q>1 \\ 1; & q=1 \\ 0; & |q|<1 \end{cases}.$$

As far as the computation is concerned, the simplest types of limits include the limit of a quotient of two polynomials. The method appropriate for its computation – dividing both the numerator and the denominator by the expression which "approaches infinity the fastest" – can also be generalized for computation of other limits of ∞/∞ type. When dealing with limits of $\infty-\infty$ type, which are often encountered in form of a difference of two roots, it is usually advantageous to extend the expression by means of multiplication by an appropriate fraction. Last but not least, there is a plentiful group of limits of 1^∞ type, and those can be solved by changing them into the form of number e, i. e. Euler's number.

[*] Corresponding author; email: mvarga@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.7-12

All of the above mentioned methods should be mastered by an ordinary student, as they belong to standard tasks requiring only appropriate computational algorithms. So far we have not mentioned one important property of the previous examples – the sequences are defined in analytic way.

A more challenging task is to find the limit of a sequence defined by recursion. Several examples are presented and discussed further in this paper.

Existence and computation of limits

For the purposes of computing the limits of sequences defined by recursion there is no general template-like algorithm. Yet, the main idea might be summarized in two steps – find out whether the limit of the given sequence exists, and then, if it exists, compute the limit. Firstly, let us note two important theorems which we refer to in the below presented examples.

Weierstrass theorem (*Wt1*). Let sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be non-decreasing. If the sequence:

1) is not bounded above, then $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;

2) else is bounded above, then $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$.

Weierstrass theorem (*Wt2*). Let sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be non-increasing. If the sequence:

1) is not bounded below, then $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;

2) else is bounded below, then $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\}$.

Cauchy – Bolzano convergence criterion (*CBcc*). Sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent if and only if for all $\varepsilon > 0$ there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $n, m > n_0$, $n, m \in \mathbb{N}$, it holds that

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

<u>Example 1.</u>

Find out whether the limit of sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ exists, where $x_1 = \sqrt{k}$, $x_{n+1} = \sqrt{k + x_n}$; where $k > 0$ is a given constant.

Solution. Our hypothesis implies that the given sequence is increasing – hereby we prove it by induction.

Let $n = 1$. Obviously $k < k + \sqrt{k}$; then also $x_1 = \sqrt{k} < \sqrt{k + \sqrt{k}} = x_2$. Assume now that $x_{n-1} < x_n$. Then $k + x_{n-1} < k + x_n$, and it also holds that $x_n = \sqrt{k + x_{n-1}} < \sqrt{k + x_n} = x_{n+1}$.

Furthermore, we claim that the sequence in question is bounded above. The relation $x_n = \sqrt{k + x_{n-1}}$ suggests that $x_n^2 = k + x_{n-1}$, also $x_n = \frac{k}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}$. The first part implies that $x_1 < x_n$, therefore $\frac{k}{x_n} < \frac{k}{x_1}$. Next, it also holds that $x_{n-1} < x_n$, i. e. $\frac{x_{n-1}}{x_n} < 1$. Thus, we obtain the upper bound: $x_n = \frac{k}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} < \frac{k}{x_1} + 1 = \frac{k}{\sqrt{k}} + 1 = \sqrt{k} + 1$.

Now, let us add another inductive proof. For $n = 1$ it obviously holds that $x_1 = \sqrt{k} < \sqrt{k} + 1$. Next, assume that $x_n < \sqrt{k} + 1$; then

$$x_{n+1} = \sqrt{k + x_n} < \sqrt{k + \left(\sqrt{k} + 1\right)} < \sqrt{k + 2\sqrt{k} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{k} + 1\right)^2} = \sqrt{k} + 1.$$

Since sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is increasing and bounded above, according to theorem (*Wt1*) it is convergent. Mark $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$. Having applied the limit transition we obtained $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{k + x_{n-1}}$, i. e. $\alpha = \sqrt{k + \alpha}$. Thus, we have quadratic equation $\alpha^2 - \alpha - k = 0$, and the conditions of the task (the terms of the sequence are non-negative) are met only by solution

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4k}\right).$$

Example 2.

Show that sequence $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, where F_n are Fibonacci numbers, is convergent.

Solution. The terms of Fibonacci sequence are defined by recursion as follows

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

Let $\varepsilon > 0$. According to Archimedean property of natural numbers there exists $p \in \mathbb{N}$ such that $\frac{1}{p} < \varepsilon$. However, let us assume $p > 4$ in order to ensure that $F_n > n$ for $n > p$.

If $m = n$, then $\left|\frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{F_{m+1}}{F_m}\right| = 0 < \varepsilon$, and the proof is done. Thus, let be $m \neq n$, maintaining the generality, it may be assumed that $m > n$.

Compute:

$$\left|\frac{F_{n+1}}{F_n}-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right|=\left|\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}-\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}\right)+\left(\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}-\frac{F_{n+3}}{F_{n+2}}\right)+\ldots+\left(\frac{F_m}{F_{m-1}}-\frac{F_{m+1}}{F_m}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{(F_{n+1})^2-F_{n+2}F_n}{F_nF_{n+1}}+\frac{(F_{n+2})^2-F_{n+3}F_{n+1}}{F_{n+1}F_{n+2}}+\ldots+\frac{(F_m)^2-F_{m+1}F_{m-1}}{F_{m-1}F_m}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{F_nF_{n+1}}+\frac{(-1)^{n+3}}{F_{n+1}F_{n+2}}+\ldots+\frac{(-1)^{m+1}}{F_{m-1}F_m}\right|=$$

$$\overset{*}{=}\left|\frac{1}{F_nF_{n+1}}-\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}+\ldots+(-1)^{m-n-1}\frac{1}{F_{m-1}F_m}\right|\le\left|\frac{1}{F_nF_{n+1}}\right|\le\frac{1}{F_p}\le\frac{1}{p}<\varepsilon.$$

The sequence in question thus meets criterion (CBcc) and is therefore convergent.

Mark $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$. Then we obtain $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)$, implying $\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$. The solution of quadratic equation $\varphi^2-\varphi-1=0$ includes numbers $\varphi_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. In view of the conditions of the task, the limit we were expected to determine is the constant of the golden section, i. e. $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

<u>Example 3.</u>

Find out whether the sequence defined by recursion $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)$, $a_1>0$, converges. ($a\ge 0$).

Solution. Obviously, for all $n\in\mathbb{N}$ it holds that $a_n>0$, i. e. the sequence is bounded below. We need to analyze the monotony of the sequence. Comparing two subsequent terms we obtain hypothesis that the given sequence is non-increasing. In order to prove the hypothesis, assume that $a_{n+1}\ge a_{n+2}$. Then

$$a_{n+1}\ge a_{n+2}\Leftrightarrow a_{n+1}\ge\frac{1}{2}\left(a_{n+1}+\frac{a}{a_{n+1}}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a_{n+1})^2\ge a+(a_{n+1})^2\Leftrightarrow(a_{n+1})^2\ge a\Leftrightarrow a_{n+1}\ge\sqrt{a}.$$

We have obtained an equivalent statement, which, however, must be also verified:

* We made use of the Cassini's identity, i. e. $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$.

$$a_{n+1} \geq \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) \geq \sqrt{a} \Leftrightarrow a + (a_n)^2 \geq 2a_n\sqrt{a} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - a_n\right)^2 \geq 0 .$$

We can see that the given sequence is in fact non-increasing and bounded below, therefore according to theorem (*Wt2*) its limit exists. Mark $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$. Having applied limit transition in identity $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$ we have $\xi = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{a}{\xi}\right)$, thus $\xi = \sqrt{a}$. The terms of the given sequence, thus, converge to the square root of number a, and this “approaching” is relatively fast. This can be demonstrated for value $a = 100$ and first estimate of $a_1 = 20$. Then, we obtain $a_2 = 12,5$; $a_3 = 10,25$; $a_4 = 10,00305\ldots$ At real approximation the first estimate can be, naturally, “more reasonable”.

Example 4.

Kepler’s equation $x = q\sin x + a$ is used for determination of the position of planets in their orbits; while $0 < q < 1$, $a \in \mathbb{R}$ are known constants, x is expected to be determined. Show that this equation has a single solution.

Solution. Let $x_0 \in \mathbb{R}$. Construct a number sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, where

$$x_1 = q\sin x_0 + a,\ x_2 = q\sin x_1 + a,\ \ldots,\ x_{n+1} = q\sin x_n + a, \text{ etc.}$$

Then
$$x_2 - x_1 = q\left(\sin x_1 - \sin x_0\right) = 2q\sin\frac{x_1 - x_0}{2}\cos\frac{x_1 + x_0}{2},$$

which implies
$$|\, x_2 - x_1 \,| \leq q|\, x_1 - x_0 \,|.$$

Similarly $|\, x_3 - x_2 \,| \leq q|\, x_2 - x_1 \,|$, or $|\, x_3 - x_2 \,| \leq q^2|\, x_1 - x_0 \,|$, i. e. $|\, x_{n+1} - x_n \,| \leq q^n|\, x_1 - x_0 \,| \quad (*)$.

Now, let $m > n$, then $x_m - x_n = x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} - \ldots + x_{n+1} - x_n$.

Applying $(*)$ we obtain

$$|\, x_m - x_n \,| \leq |\, x_m - x_{m-1}| + |\, x_{m-1} - x_{m-2} \,| + \ldots + |\, x_{n+1} - x_n \,| \leq$$
$$\leq \left(q^{m-1} + q^{m-2} + \ldots + q^n\right)|\, x_1 - x_0 \,| = q^n\frac{1 - q^{m-n}}{1 - q}|\, x_1 - x_0 \,|.$$

Let $n \to \infty$, then for the individual factors it holds that $q^n \to 0$, $0 < \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} < 1$, $|\, x_1 - x_0 \,|$ is a fixed number. It means that $|\, x_m - x_n \,| \to 0$, or in other words criterion (*CBcc*) is met, i. e. limit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ exists.

Applying limit transition in relation $x = q\sin x + a$ we obtain $\xi = q\sin\xi + a$, so number ξ is the solution to Kepler’s equation. Now, we need to prove that this solution is independent of the choice of value x_0, which means that the position of the planet is univocal. Actually, if there were also $\vartheta \neq \xi$ for which it would hold

$\vartheta = q\sin\vartheta + a$, then $\xi - \vartheta = q(\sin\xi - \sin\vartheta) = \; = 2q\sin\frac{\xi-\vartheta}{2}\cos\frac{\xi+\vartheta}{2}$.

The latter suggests that $$|\xi-\vartheta| \le 2q\left|\sin\frac{\xi-\vartheta}{2}\right| \le q|\xi-\vartheta|.$$

With respect to the value of number q the inequality holds only if $|\xi-\vartheta| = 0$, i. e. $\xi = \vartheta$.

Conclusion

There are many techniques for computation of limits of sequences, depending on the type of the limit. However, in such cases the sequences are defined analytically. In the paper we present selected problem tasks – obstacles, non-standard nature of the circumstances and impossibility to use algorithmic methods to solve the tasks are caused by the fact that the sequences in question are defined by recursion. Firstly, as an example we chose a general mathematical task, secondly, a task whose solution is a well-known constant φ. Then we continued with a sequence whose terms approximate the square root of a positive number, and finally, we demonstrated an application of this issue in celestial mechanics.

References

[1] Fichtengoľc, G. M.: *Kurs differenciaľnogo i integraľnogo isčislenija I*. Moskva: Nauka, 1962. 607 s.

[2] Grebenča, M. K., Novoselov, S. I.: *Kurs matematičeskogo analiza 1*. Moskva: Učpedgiz, 1951. 543 s.

[3] Trench, W. F.: *Introduction to real analysis*. NJ: Pearson, 2003. 583 s. ISBN: 0-13-045786-8.

[4] Varga, M.: *Úvod do diferenciálneho počtu*. Nitra: UKF, 2015. 143 s. ISBN: 978-80-558-0868-0.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 1, p. 13 – 18
ISSN 2453-6083

Metodika konštrukčných úloh z geometrie v prostredí DGS

Methodology of Geometrical Construction Tasks in DGS' Environment

Dušan Vallo[a]

[a*]*Katedra matematiky, Fakulta prírodných vied, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 28 March 2016; received in revised form 5 April 2016; accepted 18 April 2016

Abstract

In this article we deal with some methodological teaching problems that are occurring in teaching to geometric construction tasks. The analysis of problems are related to support of teaching with usage of dynamical geometry software in generally.

Keywords: dynamical geometry software, geometry, didactics of mathematics

Classification: G10, R20

Úvod

Digitálne technológie ponúkajú široké možnosti iného, moderného učenia sa, odovzdávania vedomostí a zručností Sú hybnou silou, ktorá postupne pretvára tradičnú školu a jej výchovno-vzdelávací proces na školách. Do vyučovacieho procesu vstupujú rôzne technológie a softvérové produkty, avšak najvýznamnejší vplyv na jeho kvalitatívnu zmenu majú pedagogické softvéry. Možno ich charakterizovať citátom: *„Na kvalitný pedagogický softvér sa môžeme pozerať ako na „múdry papier“ (na ploche obrazovky). Nerieši za nás problémy, pomáha nám však experimentovať, manipulovať s objektmi, objavovať vzťahy a zákonitosti, skúmať a konštruovať. Konštruovať niečo, a tak konštruovať naše poznanie*.“ Kalaš (2013)

Ak sa zameriame len na výučbu geometrie, ponúkajú sa nám, učiteľom, viaceré pedagogické softvéry, ktoré sa súhrnne označujú ako dynamické geometrických programy (DGS). Tieto programy majú spoločné znaky: sú interaktívne, majú dynamické konštrukcie, umožňujú meniť atribúty konštruovaných útvarov a objektov, atd. Žilková (2009).

Poznamenávame, že DGS sú silný motivačný prostriedok, čo je ich výhodou. Dovoľujú rozvíjať výučbu v duchu zásad didaktického konštruktivizmu, t.j. vyučovať matematiku a geometriu konštruktivistickým prístupom, kde sa zdôrazňuje aktivita žiaka, vytváranie tvorivého prostredia, dobrá pracovná atmosféra v triede, hľadanie súvislostí, rozvoj rôznych reprezentácií a odbúranie formalizmu vo vedomostiach žiakov. Hejný & Kuřina (2001)

V tomto príspevku poukážeme na niektoré metodické poznámky, ktoré sú spojené s použitím DGS pri výučbe geometrických konštrukčných úloh.

[*]Corresponding author; email: dvallo@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.13-18

Význam konštrukčných úloh v geometrii

Konštrukčné úlohy v geometrii patria medzi neštandardné úlohy rôznej obtiažnosti, ktoré sú jedinečné a od žiaka vyžadujú aktivitu, aby ich vyriešil. Hejný (1990) uvádza opodstatnenosť zaradenia konštrukčných úloh do výučby s nasledovnými dôvodmi:

a) sú motivačné, podnecujú zvedavosť riešiteľa a vedú k samostatnému objavovaniu zákonitosti,

b) ukazujú žiakovi jasný cieľ, čo má zostrojiť,

c) sú prirodzeným prepojením manuálnych zručností a skúsenosti riešiteľa s jeho geometrickou poznatkovou štruktúrou,

d) sú aplikovateľné v praxi, prepájajú teóriu a prax,

e) sú vhodné ako testovací prostriedok kvality neformálnych poznatkov žiaka

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že riešiť konštrukčnú úlohu prakticky znamená zostrojiť geometrický útvar. Výučba na základnej škole je typická tým, že konštrukcia geometrického útvaru je veľmi dôležitá a priamo sa od žiaka aj vyžaduje. Dôraz sa kladie na presnosť a estetickú stránku konštrukcie, pretože na danom stupni rozvoja poznatkovej štruktúry ide o budovanie konkrétnych predstáv o geometrických objektoch a cielené vytváranie geometrickej poznatkovej štruktúry.

V skutočnosti „riešiť konštrukčnú úlohu“ znamená omnoho viac, keď na základe platných geometrických viet žiak odvodí vzťahy medzi danými a hľadanými prvkami, a následne konštrukčne doplní dané prvky ďalšími tak, aby bol útvar zostrojiteľný.

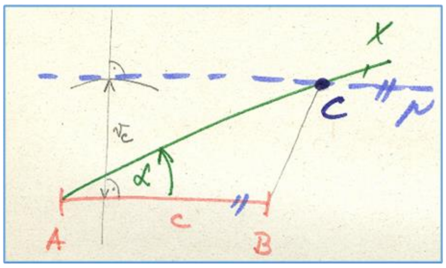
Z didaktických dôvodov sa v riešení konštrukčných úloh vymedzujú tzv. fázy (etapy, kroky) riešenia - rozbor, konštrukcia (postup), skúška, diskusia (záver). Každá fáza je svojím obsahom a účelom dôležitá a nie je didakticky vhodné ju opomenúť, resp. podceniť. Šedivý & Vallo, (2013). Akým spôsobom sa prelínajú, resp. je možné uplatniť, jednotlivé fázy riešenia konštrukčnej úlohy pri použití DGS, uvedieme v ďalšom texte.

Rozbor konštrukčnej úlohy v DGS

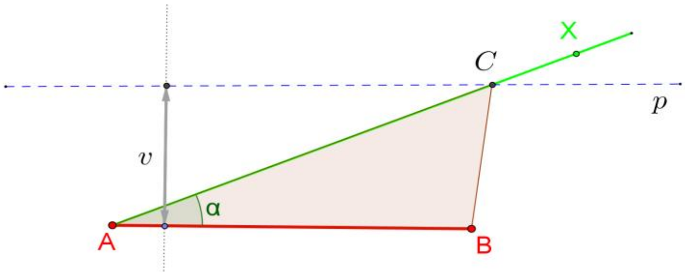
Vzhľadom k tomu, že v rozbore ide o hľadanie kauzalít medzi danými a hľadanými prvkami geometrického útvaru a pedagogický softvér konštrukčnú úlohu nevyrieši automaticky, je samotné použitie DGS v tejto fáze konštrukčnej úlohy viac-menej rozporuplné.

V prvom rade, súčasťou rozboru môže byť aj náčrt (na úrovni ZŠ je to dôležitá súčasť rozboru). Je otázne, či od žiakov s nižšou úrovňou geometrickej predstavivosti vyžadovať načrtávanie „voľnou rukou“ alebo trvať na použití rysovacích pomôcok. V prostredí DGS je voľný náčrt problematický a útvar možno modelovať pomocou úsečiek, kružnicových oblúkov, ... Tie sa na pracovnej ploche však môžu kresliť nezávisle od spoločných bodov prieniku. Samozrejme, obdobne ako pri na klasickej výučbe, deduktívnymi úvahami sa na ploche obrazovky vygeneruje zadaním požadovaný geometrický útvar, ktorý „vyzerá ako narysovaný v zošite“. To môže žiaka priviesť k mylnému záveru o uskutočnení konštrukcie. Súčasne je na zváženie aj časovo-technická realizácia tejto formy rozboru. Názorná ukážka je na obr. 1a,b, kde je naznačený rozbor nasledujúcej úlohy.

Úloha 1. *Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte stranu c, výšku v na stranu c a uhol α.*



Obr. 1a



Obr. 2b

Naviac, takýmto prístupom sa môže porušiť dynamickosť konštrukcie – hlavná výhoda DGS. Na obr. 1 sú jednotlivé geometrické útvary len „poukladané“ na plochu.

Na druhej strane, využitie DGS môže byť je účelné v prípadoch, kedy analógia riešenia nevedie k správnemu výsledku. Ako ukážka poslúžia konštrukčné úlohy, ktoré sa riešia metódou podobnosti. V ich riešeniach sa často využíva pomocný útvar, ktorý aspoň z časti vyhovuje požiadavkám úlohy. Jeho zostrojenie je jednoduché a vhodnou transformáciou sa zobrazí na hľadané riešenie. Ilustračným príkladom je napr. úloha:

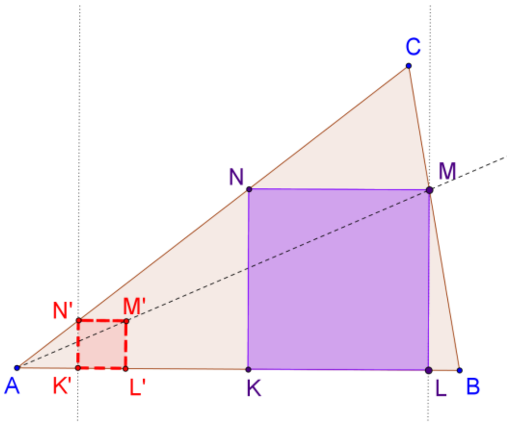
Úloha 2. *Do trojuholníka ABC vpíšte štvorec KLMN tak, aby jeho strana KL ležala na strane AB.*

Riešenie pomocou rovnoľahlosti je naznačené na obr. 2a, kde je vyznačený pomocný štvorec *K'L'M'N'*.

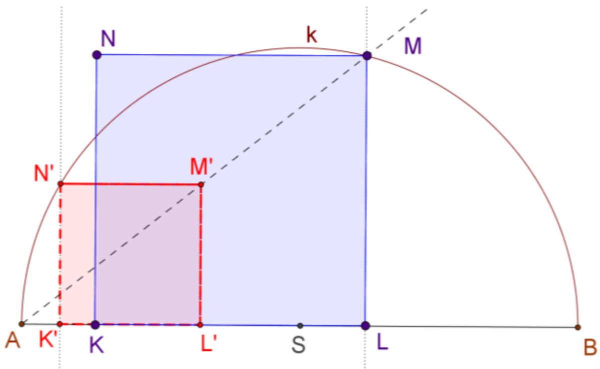
Použitie analógie pri hľadaní riešenia obdobnej úlohy so zadaním:

Úloha 3. *Do polkruhu k s priemerom AB vpíšte štvorec KLMN tak, aby jeho strana KL ležala na priemere AB,*

nie je korektné, pretože rovnoľahlosť je lineárne zobrazenie (obr. 2b). Z pohľadu didaktického konštruktivizmu je chyba dôležitý míľnik v učení sa. Poučenie vo forme priamej konštrukcie a zdôvodnenie , resp. nájdenie chyby v úsudku je preto dôležitý nástroj spätnej väzby.



Obr. 2a



Obr. 2b

V tomto poňatí je však na úvahu, do akej miery ide o rozbor úlohy, samotnú konštrukciu, či dokonca skúšku alebo preverenie správnosti konštrukcie.

Konštrukcia a postup konštrukčnej úlohy v DGS

Z pohľadu geometrie ako vednej disciplíny sa na konštrukciu dívame ako na logický sled krokov, ktoré od daných prvkov vedú k hľadaným prvkom zostrojovaného geometrického útvaru. V tomto ponímaní konštrukcie samotná realizácia - zostrojenie obrázka rysovacími pomôckami nie je nutná.

Avšak v didaktike matematiky, kde sa prihliada aj na dôležitosť prepojenia manuálnych zručností a poznatkovej štruktúry, je zostrojenie obrázka veľmi dôležité. Význam zostrojenia obrázka je zdôraznený aj tým, že sa vo výučbe rozlišujú pojmy „konštrukcia“ a „postup“.

Ak budeme vychádzať z tejto terminológie, potom zostrojenie obrázku pomocou DGS predstavuje pre žiaka silný motivačný nástroj. Dôvodov je viac, pretože dynamickosť konštrukcie umožňuje:

a) meniť pozíciu vstupných prvkov,

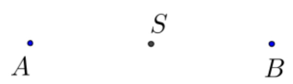
b) upraviť estetický výstup,

c) pomocné konštrukcie dočasne skryť, a tak zdôrazniť hlavnú myšlienku riešenia,

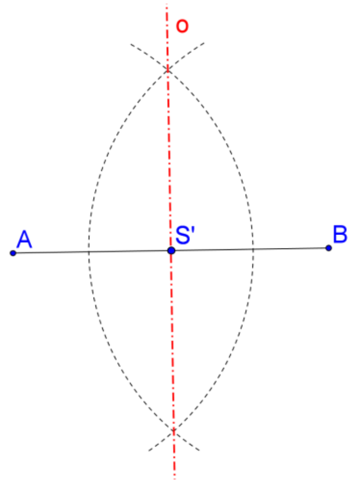
d) využiť preddefinované konštrukčné nástroje v záujme časového zrýchlenia realizácie konštrukcie.

Uvedené skutočnosti sú demonštrované na obr. 2a,b, napr. farebné škála, dizajn čiar, automatická konštrukcia kolmíc, resp. štvorca nástrojom *Pravidelný mnohouholník*.

V prípade, že žiaci zvládajú elementárne konštrukcie, môže učiteľ výhodne aplikovať možnosti programu a konštrukciu „sprehľadniť“ skrytím pomocných čiar.



Obr. 3a



Obr. 3b

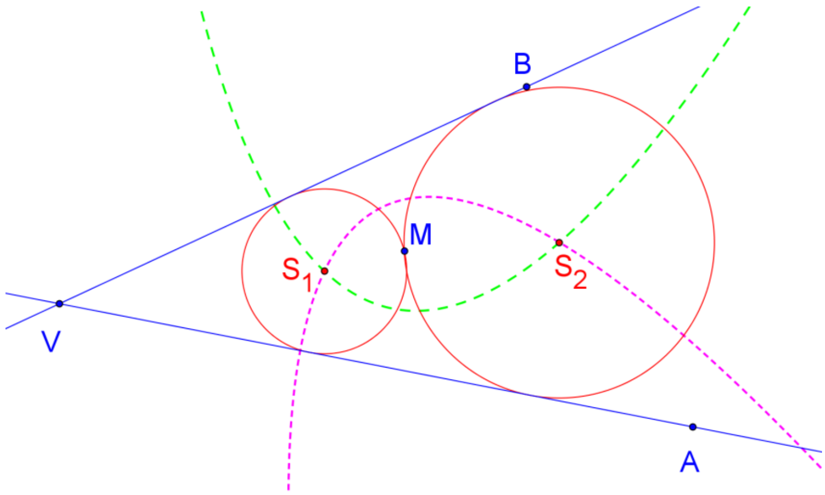
Ak tomu tak nie je a žiaci nezvládajú základné konštrukcie (najmä na nižšom stupni vzdelávania), je dôležité, aby sa všetky konštrukčné kroky (body postupu) realizovali na pracovnej ploche tak, ako ich majú žiaci skonštruovať do zošita. Napríklad, zostrojenie stredu S úsečky AB. Na obr. 3a,b vidno konštrukciu stredu pomocou nástoja *Stred úsečky*, ktorý znázorní stred-bod aj v prípade, že úsečka AB nie je vyznačená. Konštrukcia na obr. 3b je „štandardná“.

K nesporným výhodám softvéru však patrí aj to, že umožňuje vykonať konštrukcie, ktoré boli doposiaľ euklidovskými prostriedkami nedosiahnuteľné. Uvedieme ukážku.

Úloha 4. *Do uhla AVB vpíšte kružnicu, ktorá prechádza daným bodom M.*

Ide o úlohu, ktorá sa na strednej škole rieši metódou rovnoľahlosti a s využitím pomocného útvaru – obdobne ako v ukážke na obr. 2a.

Ak vychádzame z definície paraboly ako množiny bodov v rovine, ktorých vzdialenosť od pevného bodu a danej priamky (bod nie je incidentný s danou priamkou) je rovnaká, potom môžeme s pomocou DGS vyriešiť úlohu netradične. Keďže softvér umožní užívateľovi nakresliť kužeľosečku ako „súvislú krivku“, prienikom odpovedajúcich dvoch parabol sú stredy hľadaných kružníc (obr. 4) Gunzel (2012)



Obr. 4

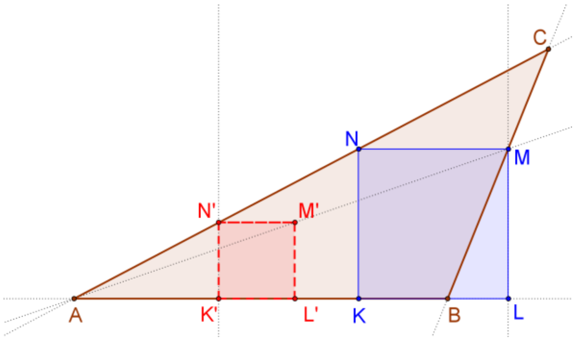
Hoci ide o „elegantné“ riešenie, z didaktického hľadiska je opodstatnená otázka, do akej miery je takáto konštrukcia na úrovni poznatkov súčasných žiakov strednej školy vhodná a použiteľná.

Skúška a diskusia konštrukčnej úlohy v DGS

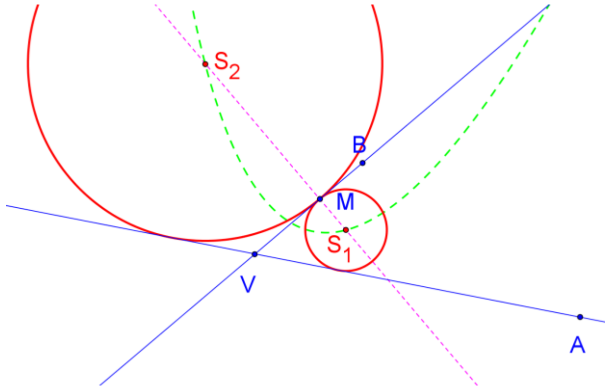
Ak sú v zadaní konštrukčnej úlohy uvedené konkrétne číselné vstupy – hodnoty dĺžok strán, výšok, veľkosti uhlov, ... , skúška na úrovni ZŠ, resp. SŠ sa redukuje na verifikáciu premeraním rozmerov zostrojeného útvaru. V geometrii však meranie nemožno považovať za dôkaz, a preto podstatou skúšky je overenie správnosti konštrukcie, či získané útvary spĺňajú všetky podmienky danej úlohy (na základe incidenčných vzťahov a definícií množín bodov danej vlastnosti).

V DGS existujú možnosti, ako zadať konkrétny číselný vstup a ďalej s ním pracovať. Nie je však zaručené, že jednotky, v ktorých počítač zobrazuje dané úsečky, aj reálne zodpovedajú štandardne používaným jednotkám miery. Zachováva sa len pomer podobnosti.

Na druhej strane, dynamickosť konštrukcií je neoceniteľná vlastnosť pri diskusiách o počte a existencii rôznych riešení konštrukčnej úlohy. Napríklad na obr. 5a je zrejmé, že úloha 2 nemá vyhovujúce riešenie pre tupouhlý trojuholník *ABC* s tupým uhlom pri vrchole *A*, resp. *B* (strana *KL* leží na priamke *AB,* nie strane *AB*); prípadne, ako sa zmení riešenie úlohy 4, ak bod *M* leží na ramene *VB* (obr. 5b).



Obr. 5a



Obr. 5b

Záver

Hoci metodika riešenia konštrukčných úloh z geometrie patrí k pomerne dobre prepracovaným tematickým celkom školskej geometrie, ide o náročné učivo, ktorého zvládnutie spôsobuje žiakom značné problémy. Domnievame sa, že implementáciou DGS do výučby sa môže toto učivo stať príťažlivejším a ľahšie zvládnuteľným aj pre žiakov s nižšou úrovňou geometrickej predstavivosti.

Ako každý modernizačný prúd, aj tento má svoje nedostatky, resp. cesty, ktoré vedú iným smerom, než sme ako učitelia boli zvyknutí. Metodické poznámky a postrehy uvedené v článku vychádzajú z osobných skúseností, a keďže doposiaľ nie sú tieto úvahy podporené relevantným pedagogickým výskumom, zostávajú pre potreby praxe len v rovine odporúčaní.

Literatúra

Hejný, M., Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.

Kalaš, I. a kol. (2013). *Premeny školy v digitálnom veku.* Bratislava: SPN – Mladé letá

Gunzel, M. a kol (2012). *Integrace elektronických prostředí pro počítačem podporovanou výuku matematiky*. České Budějovice: JU v Českých Budějovicích.

Šedivý, O. , Vallo, D. (2013). *Prečo vyučovať Slovné a konštrukčné úlohy?* Nitra: FPV UKF v Nitre

Vaníček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Ped. fakulta UK v Praze

Žilková, K. (2009). *Školská mtematika v prostredí IKT (Informačné a komunikačné technológie)*. Bratislava: UK Bratislava

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektu KEGA č. 016UKF-4/2016 s názvom *Implementácia konštruktivisticky orientovaného vyučovania matematiky s dôrazom na aktívne nadobúdanie poznatkov žiakmi v kontexte bilingválneho vzdelávania*.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 1, p. 19 – 26
ISSN 2453 -6083

Zaujímavé nerozvinuteľné priamkové plochy v technickej praxi a bežnom živote

Interesting Ruled Surfaces in Technical Practice and Real-life

Lucia Rumanová[a] – Vjera Kiš 2[b]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*
[b] *SPŠ Stavebná, Cabajská 4, SK-950 50 Nitra*

Received 13 April 2016; received in revised form 18 April 2016; accepted 22 April 2016

Abstract

In the article we describe the use of knowledge from descriptive geometry in construction. Specifically we deals with unroll ruled surfaces, which are frequently used in technical practice because of their simplicity of construction and also good static properties. We present main unroll hyperboloid, hyperbolic paraboloid and different types of conoids. In structural engineering practice the common using of these surfaces is illustrated in the attached figures.

Keywords: ruled surfaces, conoids, properties, technical practice, examples of surfaces.

Classification: 51L20, 14J26, M50

Úvod

Námetov na upevnenie geometrických vedomostí je všade okolo nás dostatok, preto je prirodzené ich využiť aj v rámci vyučovacieho procesu, a tým prepojiť výučbu s bežným životom.

Architekti sa snažia projektovať stavby, ktoré sú pre bežnú verejnosť na pohľad zaujímavé a teda v technickej praxi používajú od jednoduchých a všeobecne známych plôch, ako sú rovina, plocha guľová, valcová, kužeľová, aj špeciálne priamkové plochy. Z hľadiska využitia rôznych plôch v stavebníctve sa priamkové plochy používajú predovšetkým kvôli ich jednoduchej konštrukcii a dobrým statickým vlastnostiam.

Z hľadiska staviteľa je dôležité, aby použitá plocha splnila požadovanú funkciu, bola dostatočne „pevná", esteticky žiaduca a technicky zostrojiteľná. Z hľadiska teórie, statické vlastnosti plôch závisia aj od ich geometrických vlastností, najmä na vzájomnej polohe dotykových rovín plochy a plochy samotnej.

V tomto článku sa budeme venovať najmä *nerozvinuteľným plochám,* ktoré vzhľadom k dobrým statickým vlastnostiam, nachádzajú svoje uplatnenie v stavebníctve, najčastejšie ako tvary striech rôznych budov. Na konkrétnych ukážkach priblížime ich použitie v praxi.

[*] Corresponding author; email: lrumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.19-26

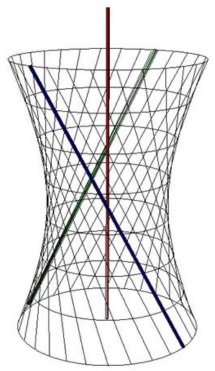
Nerozvinuteľné priamkové plochy

Nerozvinuteľné priamkové plochy definujeme ako plochy, ktoré obsahujú konečný počet torzálnych priamok. Torzálnou priamkou nazveme takú tvoriacu priamku p_o priamkovej plochy Φ, ktorej každý bod leží v dotykovej rovine τ danej plochy Φ **.**

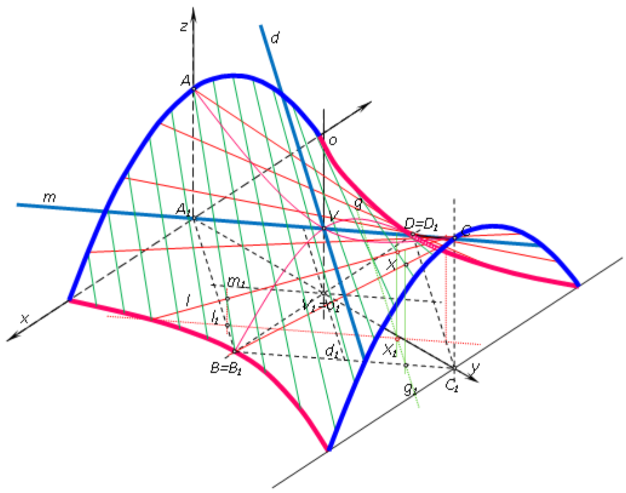
Ak sú všetky priamky plochy Φ torzálne, tak plocha Φ sa nazýva rozvinuteľná priamková plocha. V inom prípade plochu nazývame *nerozvinuteľnou.*

K pomerne známym príkladom plôch sú jednodielny hyperboloid a hyperbolický paraboloid

Jednodielny hyperboloid je určený tromi vlastnými mimobežnými priamkami, ktoré nie sú rovnobežné so žiadnou rovinou. Ide o plochu druhého stupňa a neobsahuje torzálne priamky (Obrázok 1), teda je to nerozvinuteľná plocha.



Obrázok 1



Obrázok 2

Podobnú konštrukciu má aj hyperbolický paraboloid. Hyperbolický paraboloid je možné zadať tromi (vlastnými) mimobežkami, ktoré sú rovnobežné s jednou rovinou alebo dvoma mimobežnými priamkami a riadiacou rovinou s nimi rôznobežnou. Keďže je plocha určená tromi priamkami, podobne ako jednodielny hyperboloid, aj hyperbolický paraboloid je plocha druhého stupňa a neobsahuje torzálne priamky. Môže byť zadaný aj zborteným štvoruholníkom.

Hyperbolický paraboloid bol pomenovaný podľa toho, že rezom danej plochy môže byť parabola alebo hyperbola. Názov, pod ktorým ho poznáme, je aj sedlová plocha (Obrázok 2).

Rotačný jednodielny hyperboloid a parabolický hyperboloid majú okrem zaujímavého dizajnu aj výborné statické a iné vlastnosti. Najčastejšie sa využívajú pri stavbe chladiarenských veží a komínov, ale i na zastrešovanie rôznych budov.

Uvedieme niekoľko konkrétnych ukážok.

Šuchova veža (Shukhov tower) je prvá veža na svete v tvare hyperboloidu, ktorú navrhol v roku 1896 ruský inžinier a architekt Vladimír Shukhov. Vodárenská veža je vysoká 37 metrov a nachádza sa v dedinke Polibino, oblasti Lipetsk v Rusku. Poznamenávame, že architekt Shukhov navrhol mnoho hyperboloidných oceľových mriežkových konštrukcií a používal ich v stovkách vodárenských veží, morských majákov, stožiarov vojnových lodí.

Svojím návrhom tvaru veže bol priekopnícky, nakoľko v zahraničí sa podobné hyperboloidné štruktúry objavujú o desať rokov neskôr.

Iným príkladom je moderná veža jedinečného dizajnu, postavená v roku 1976, ktorá slúži ako nádrž (Obrázok 3). Hlavným konštruktérom bola poľská architektka J. Bogusławska a veža stojí na najvyššom bode Ciechanów (143 m) v Poľsku. Je zhotovená z oceľového plechu o objeme 1,560 m^3, má tvar pneumatiky - anuloidu. Priemer rúry má 6 metrov a je postavená na hyperboloidnej nosnej konštrukcii.

Obrázok 3 *(Zdroj: http://www.wiezecisnien.eu/Ciechanow.htm)*

Ďalším príkladom je elektráreň na juhu Slovenska. Medzi Nitrou a Levicami sa nachádzajú štyri bloky Atómových elektrární Mochovce s tlakovodnými reaktormi typu VVER 440/V-213. Priamky hyperboloidu sú vyznačené na Obrázku 4.

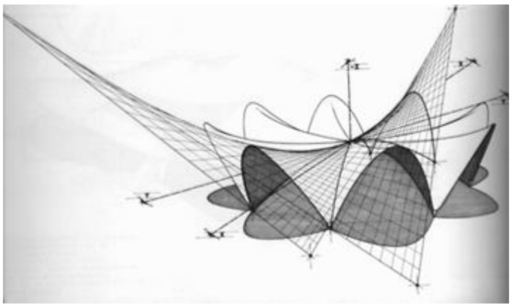
Obrázok 4 *(Zdroj: https://www.seas.sk/atomova-jadrova-elektraren)*

Ďalšia ukážka je rekonštrukcia krytej lávky ponad ulicu Corporation v centre Manchestru s názvom Corporation Street Bridge. Samotnú lávku nahradil most, ktorý má tvar hyperboloidu a spája Marks & Spencer/Selfridges budovu s Manchestr Arndale. Bol navrhnutý architektmi zo spoločnosti Manchester-based Hodder and Partners a otvorili ho v roku 1999. Most je dlhý 18 metrov a má 6,2 metrov v priemere (Obrázok 5).

Obrázok 5 *(Zdroj: http://happypontist.blogspot.sk/2010_03_01_archive.html)*

Možno jeden z najznámejších príkladov použitia plochy v tvare hyperbolického paraboloidu je L'Oceanographic vo Valencii. Ide o najväčšie akvárium v Európe, ktoré navrhol španielsky architekt Felix Candela. Stavbu dokončili v roku 1997 (Obrázok 6).

Hyperbolicko-paraboloidny tvar strechy má tiež Los Manantiales, reštaurácia v Mexicu City (Obrázok 6), ktorú Candela navrhol už v roku 1958.



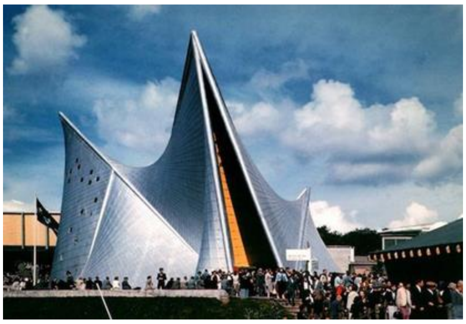
Obrázok 6 *(Zdroj: https://sk.pinterest.com/pin/400679698073802931/)*

Ďalším príkladom využitia hyperbolického paraboloidu je strecha kostola Reformovanej kresťanskej cirkvi v New Yorku (Valley Christian Reformed Church, Kattelville), ktorú navrhol architekt James R. Mowry (Obrázok 7).

Obrázok 7 *(Zdroj: http://nyslandmarks.com/mowry/mowry4.htm)*

Pavilón Philips (Obrázok 8) je zase dielo, ktoré spája architektúru, film, svetlo, hudbu (hlavne zvuk) za použitia rôznych matematických a fyzikálnych zákonov. Ide o dielo architektov Le Corbusiera, Lannis Xenakis a hudobníka Edgara Varese, ktorí spoločne pracovali na zákazke firmy Philips a navrhli pavilón pre svetovú výstavu Expo '58 v Bruseli.

Xenakis navrhol stan konštruovaný hyperbolickými paraboloidmi a konoidmi tak, ako ich použil vo svojej slávnej stavbe Metastassis. Podlahová plocha pavilónu bola 1000 m^2 a výška stavby 22 metrov. Geometrická konštrukcia z trubiek a betónových dosiek bola samonosná. (Effenbergerová, 2011)

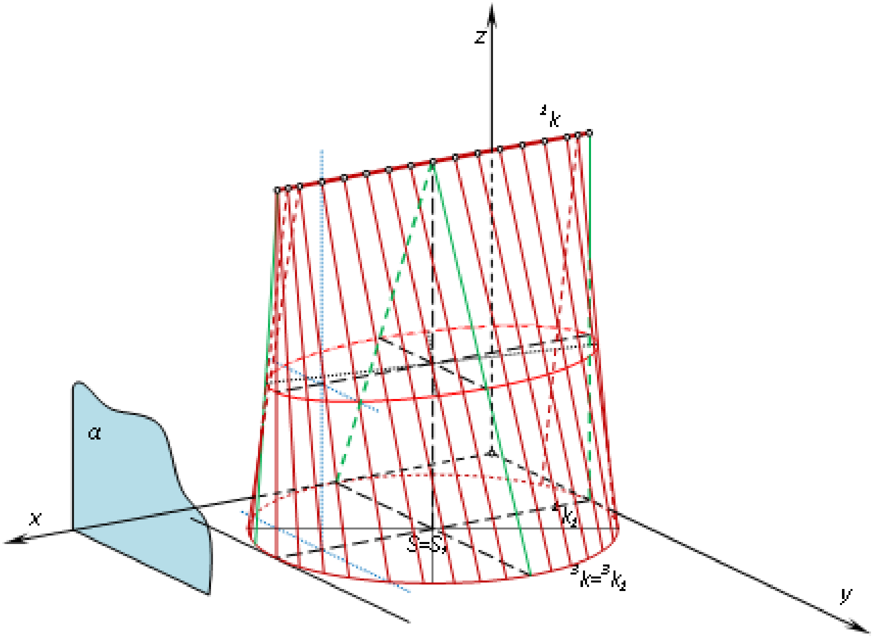


Obrázok 8 *(Zdroj: https://sk.pinterest.com/pin/400679698073802931/)*

Konoidy ako nerozvinuteľné plochy

Konoidy sú určené jednou vlastnou, jednou nevlastnou priamkou (teda rovinou) a krivkou *k* resp. plochou, pričom podľa tretieho určujúceho prvku pomenovávame jednotlivé konoidy.

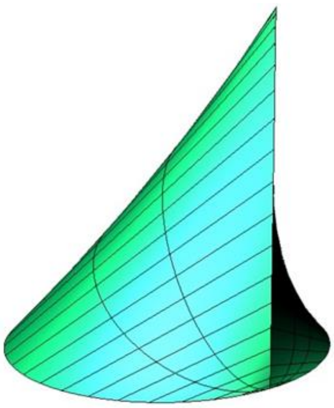
Na Obrázku 9 je v pravouhlej axonometrii zobrazený priamy kružnicový konoid, určený týmito riadiacimi prvkami: priamkou ${}^1k$, ktorá je rovnobežná s osou x, rovinou α, rovnobežnou s priemetňou υ a kružnicou ${}^3k(S; r)$ v rovine $\pi = (x, y)$.



Obrázok 9

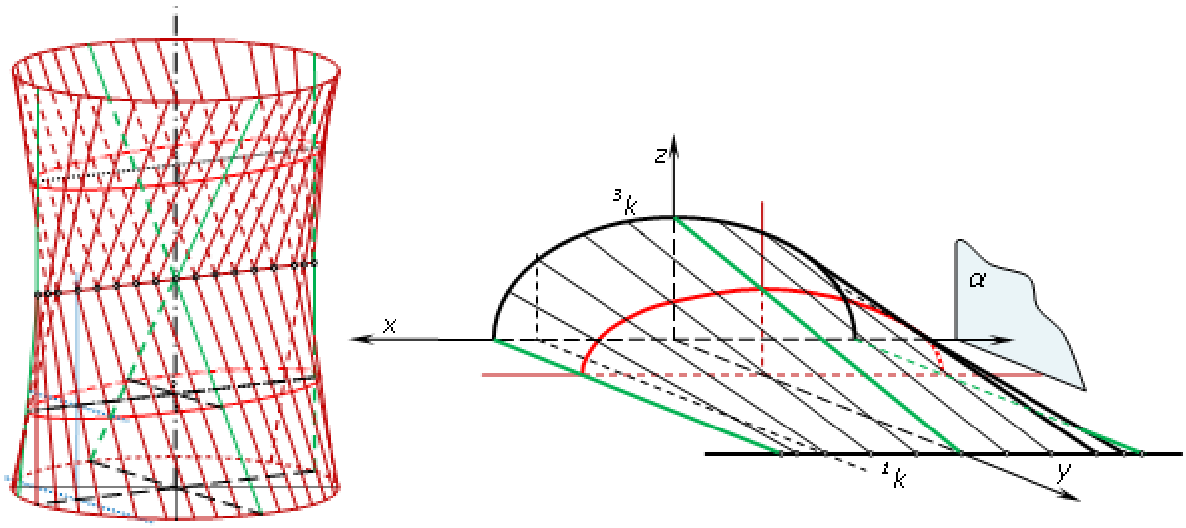
Kružnicový konoid je plochou štvrtého stupňa so štyrmi torzálnymi priamkami.

Špeciálnym prípadom kružnicového konoidu je Kupperov konoid (Obrázok 10). Určený je riadiacou kružnicou ${}^1k$, priamkou ${}^2k$ (kolmou na určujúcu rovinu β kružnice ${}^1k$) a rovinou α, ktorá zviera s určujúcou rovinou β uhol 45°.



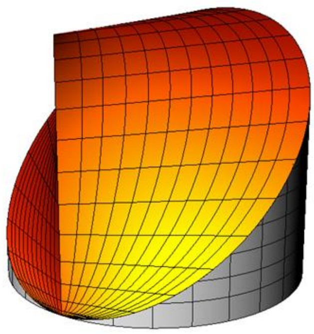
Obrázok 10

Eliptický konoid je určený priamkou ${}^1k$, riadiacou rovinou α a elipsou ${}^3k$. Plocha je štvrtého stupňa a obsahuje štyri torzálne priamky (Obrázok 11).



Obrázok 11

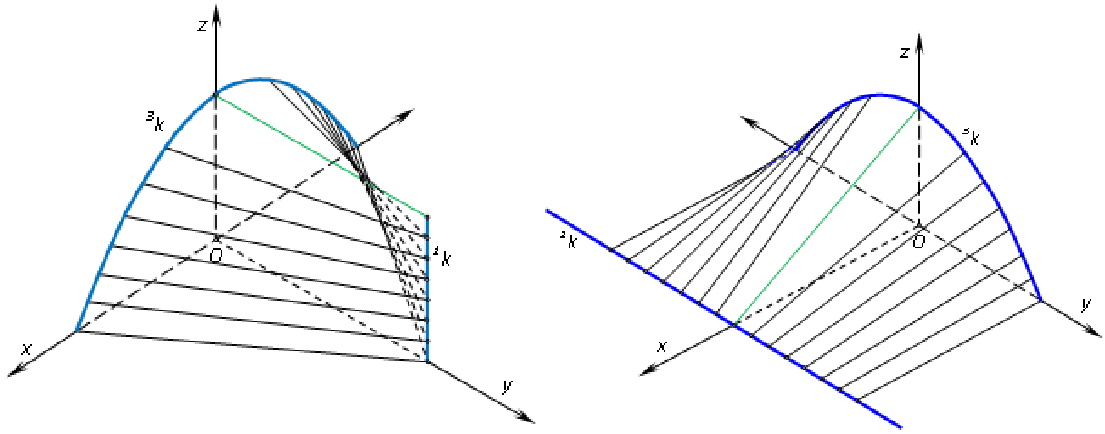
Špeciálny prípad eliptického konoidu je Plückerov konoid (Obrázok 12), je určený elipsou ^1k, ktorá je rezom rotačnej valcovej plochy rovinou ρ, tvoriacou priamkou p tejto plochy a rovinou α kolmou na os valcovej plochy. Určujúca priamka je dvojnásobná a ostatné určujúce útvary sú jednoduché. Vzhľadom na to, že elipsa ^1k a priamka p majú spoločný bod P, táto plocha je tretieho stupňa.



Obrázok 12

Ďalším zaujímavým konoidom je parabolický konoid, ktorého určujúce prvky sú riadiaca priamka ^1k, riadiaca rovina α a parabola ^3k. Priamka a parabola majú jeden spoločný bod, teda plocha je tretieho stupňa. Plocha obsahuje iba jednu torzálnu priamku.

Existujú dva typy parabolického konoidu, ktoré rozlišujeme podľa vzájomnej polohy určujúcich prvkov. Na ilustráciu uvedieme modely týchto plôch zobrazených v pravouhlej axonometrii (Obrázok 13).



Obrázok 13

Zaujímavým konoidom je aj guľový konoid (Obrázok 14). Ide o nerozvinuteľnú plochu, ktorá je vytvorená dotykovými priamkami ku guľovej ploche. Tie prechádzajú riadiacou priamkou kolmou na riadiacu rovinu a sú rovnobežné s danou riadiacou rovinou. Určujúce prvky plochy sú riadiaca dvojnásobná priamka ^1k, rovina α a priestorová krivka ^3k, pričom plocha je štvrtého stupňa.

Obrázok 14

V technickej praxi sú najčastejšie využité kužeľosečkové konoidy, najčastejšie sa používajú na rôzne typy zastrešenia. Uvedieme príklady.

Obrázok 15 *(Zdroj: http://www.moderndesigninterior.com/2014/10/butterfly-house-mid-century-modern.html)*

Na Obrázku 15 je dom Julesa Gregoryho v New Jersey, ktorý v roku 1961 zaradili medzi desať najkrajších domov v USA. Dom naďalej priťahuje pozornosť ľudí pre svoje jedinečné línie strechy v tvare dvojitých konoidov, čím má výnimočný dizajn.

Na ďalšom Obrázku 16 prezentujeme často používaný spôsob zastrešenia vstupu budov, ktorý má tvar kružnicového konoidu.

Obrázok 16

Záver

V článku sme sa venovali nerozvinuteľným priamkovým plochám, pričom sme poukázali na ich možnosti a výhody v bežnom živote. Zdôraznili sme ich najdôležitejšie vlastnosti a použitie v už realizovaných stavbách, realizovaných najmä v zahraničí. Vzhľadom na veľký rozvoj počítačových technológií v súčasnej dobe je možné predpokladať, že teória priamkových plôch sa bude využívať v technickej praxi aj v budúcnosti.

Literatúra

Doležal, J.: Deskriptivní geometrie pro AST na FAST. http://mdg.vsb.cz/jdolezal/DgFAST/Realizace/Konoidy/Konoidy.html [25.03.2016].

Effenbergerová, K. (2011) *Netradiční výrazové prostředky a techniky. Matematické principy v komparaci netradičního výtvarného a hudebního díla*: Diplomová práca. Praha: Pedagogická fakulta Univerzita Karlova v Praze, 2011. 106 s. Dostupné: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/95973/?lang=en

Kiš, V. (2012) *Priamkové plochy*: Diplomová práca. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského, 2012. 86 s.

Theodossopoulos, D. – Gonzáley-longo, C. (2008): *Hybrid masonry shell technology in the work of Idelfonso Sánchey del Río*. Dostupné: http://www.research.ed.ac.uk/portal/files/9050504/Hybrid_masonry_shell_technology_in_the_work_of_Idelfonso_Sanchez_del_Rio.pdf

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2, No. 1, p. 27 – 35
ISSN 2453-6083

Budúci učitelia – elementaristi a ich vedomosti o zlomkoch

Future Elementary School Teachers and their Knowledge of Fractions

Valéria Švecová[*a] –Iveta Scholtzová [b]

[a] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*
[b] *Department of Mathematic Education, Faculty of Education, University of Presov, Ul. 17. novembra č. 15, 080 01 Prešov*

Received 31 March 2016; received in revised form 14 April 2016; accepted 17 April 2016

Abstract

Fractions still recovering one of the "problems" of school mathematics. The paper presents partial results of our research, which we have devoted task solving with fractions. In the center of our interest was implicative analysis of correlation among steps of solution.

Keywords: fractions, implicative analysis.

Classification: C30

Úvod

Súčasné kurikulum stavia do centra matematického vzdelávania na primárnom stupni základnej školy oboznámenie sa s prirodzenými číslami a štyrmi matematickými operáciami. Neskôr sa začína obor prirodzených čísel rozširovať, a to dvomi smermi: k častiam – zlomky a desatinné čísla a k záporným číslam. Samostatne myslieť a uvažovať je možné iba na základe pochopenia a porozumenia. Pokiaľ chceme zlepšiť matematické predstavy u detí, je potrebné pochopiť ako sa matematické predstavy vytvárajú a rozvíjajú.

Zvláštne postavenie v školskej matematike majú otázky vzťahu a celku. Sú previazané na ďalšie matematické štruktúry, ktorých pochopenie ovplyvňuje pojmotvorný proces, sú aplikovateľné nielen vo viacerých oblastiach matematiky, ale aj v spoločenskej, prírodnej a technickej praxi. S procesom delenia celku na časti sa dieťa stretáva už v predškolskom veku. Už v tom čase sa začína rozvíjať chápanie vzťahu časti a celku.

Zlomky na primárnom stupni

S vytváraním celku a jeho delením sú spojené základné pojmy elementárnej matematiky – pojem prirodzeného a racionálneho čísla, ako aj pojem geometrického útvaru. Od prvého ročníka základnej školy sa neformálne vedomosti o vzťahu časti a celku ďalej rozvíjajú pri porovnávaní, sčítaní a odčítaní.(Hejný, 1999)

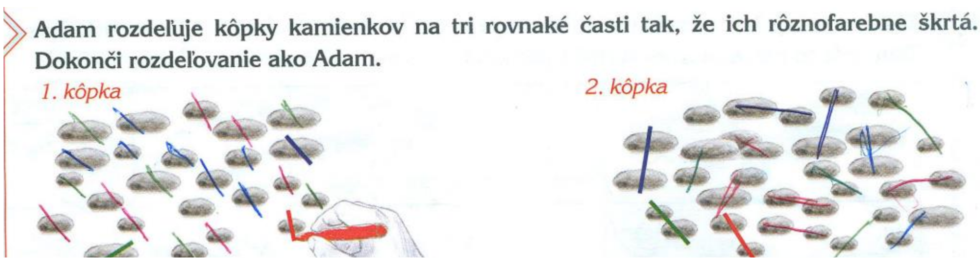
[*] Corresponding author; email: vsvecova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.27-35

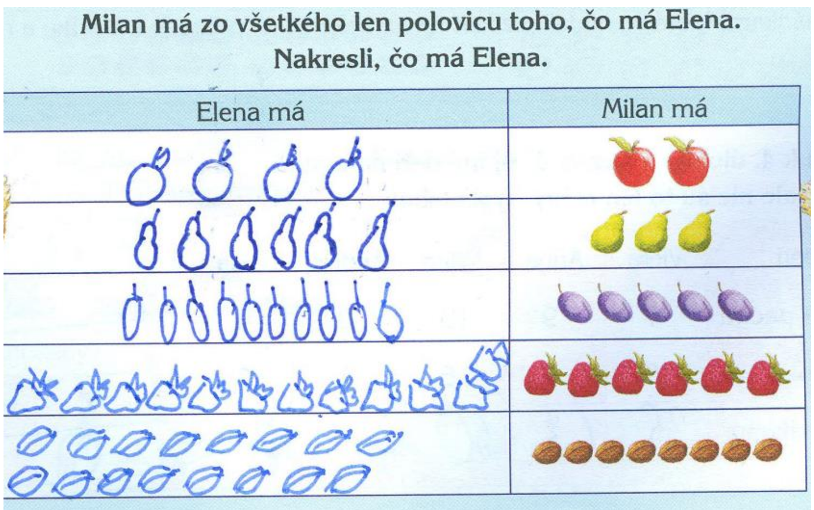
Často sa zdôrazňuje, že zlomok patrí k náročným pojmom, ktorý je potrebné rozvíjať v dlhom časovom úseku. Ťažisko vyučovania tematického celku Zlomok je na sekundárnom stupni základnej školy.

Predstavy o zlomkoch sa ale začínajú vytvárať a budovať oveľa skôr, a to buď v škole alebo mimo nej. So slovami „polovica“, „štvrtina“ sa deti stretávajú už v predškolskom veku a v škole sa potom tieto slova vyskytujú už na primárnom stupni. Je to preto, že sa s nimi deti stretávajú neustále aj v každodennom živote. Označenie polovica však veľa detí chápe ako synonymum k slovu časť. Pravdepodobne to súvisí s tým, že delenie, ktoré predchádza a pripravuje pojem zlomok, nemusí byť nutne „spravodlivé“, teda na rovnaké časti. Preto sa bežne môžeme stretnúť s vyjadreniami typu: „Daj mi väčšiu polovicu koláča“; „koláč sme rozdelili na štyri (rovnaké) polovice“. Zriedkavejšie sa deti stretávajú s označením tretina, pätina, desatina.(Tichá, Macháčková, 2006)

Vychádzajúc zo štátneho vzdelávacieho programu ISCED1 sa žiaci so zlomkami stretávajú už na primárnom stupni v 3. ročníku základnej školy v rámci tematického celku Násobenie a delenie prirodzených čísel v obore do 20. Podľa obsahového a výkonového štandardu by sa mal žiak oboznámiť s pojmami celok, časť celku, počet rovnakých častí (delenie na), skupiny danej veľkosti (delenie po) a mal by vedieť deliť na rovnaké časti (rozdelenie na daný počet rovnakých častí), vedieť deliť podľa obsahu (delenie po, rozdelenie skupiny danej veľkosti).

V učebnici matematiky pre 3. ročník primárneho stupňa nájdeme aj takéto úlohy k propedutike zlomkov:

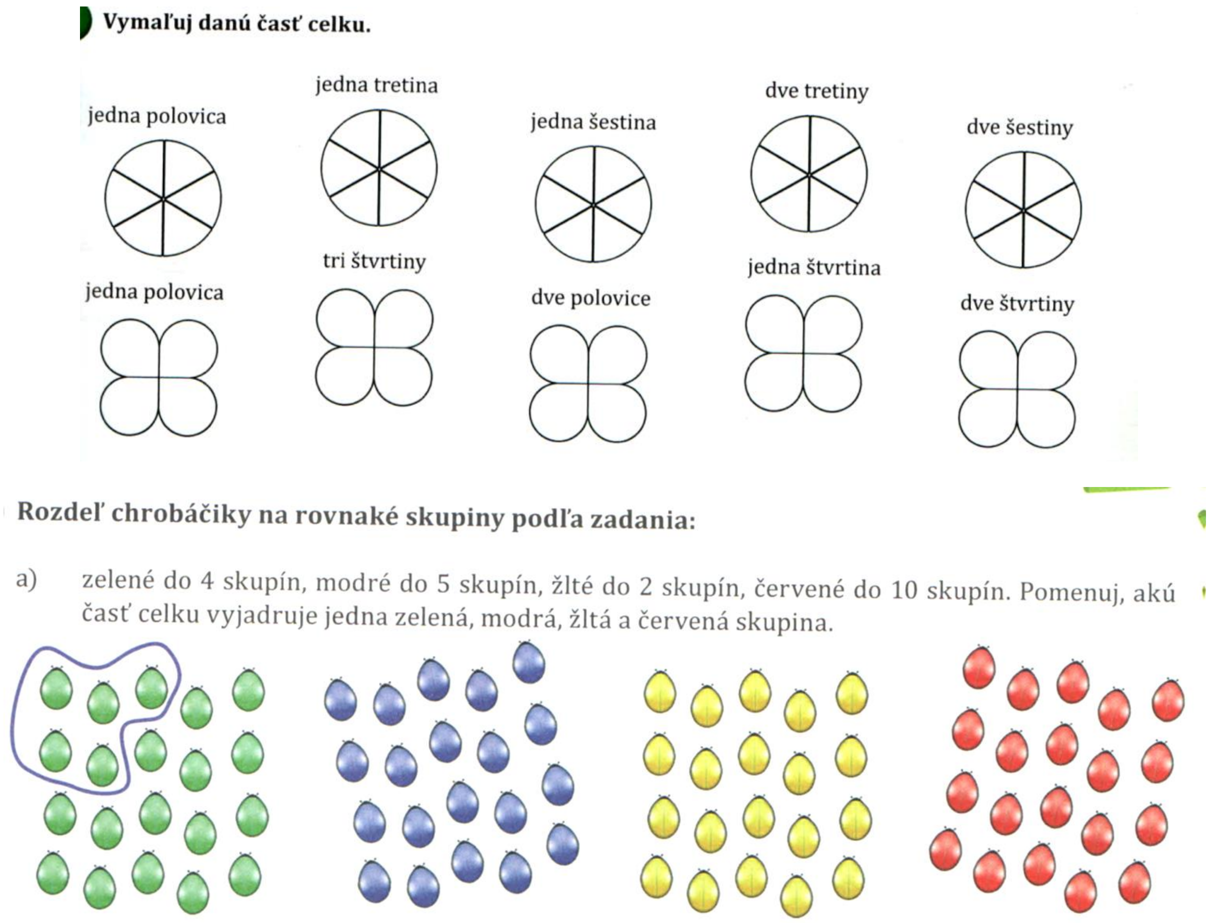




Obr. 1: *Ukážky úloh určené žiakom 3. ročníka (zdroj Černek, 2012, s.8)*

Podľa obsahového a výkonového štandardu by si mal žiak štvrtého ročníka primárneho stupňa základnej školy v rámci tematického celku Násobenie a delenie v obore násobilky osvojiť rozdeľovanie na polovice, tretiny, atď.

V učebnici pre 4.ročník primárneho stupňa nájdeme aj takéto úlohy o zlomkoch:



Obr. 2: *Ukážky úloh určené žiakom 4. ročníka (zdroj Hvolková 2014)*

Výskum

Výskumy matematickej anxiety u žiakov stredných škôl a starších viedli až ku skúsenostiam a spomienkam na vyučovanie elementárnej matematiky v mladšom školskom veku. Preto sme si za výskumnú vzorku zvolili študentov učiteľstva pre primárny stupeň vzdelávania. Výber vzdelávacích metód a foriem u učiteľa v praxi je ovplyvnený jeho pedagogickými a odbornými kompetenciami.

Tie vplývajú aj na jeho vnútorný postoj k danému predmetu, ktorý vedome, či nevedome prenáša na žiakov. Teda, ak učiteľ nie je schopný aplikovať matematické vedomosti a zručnosti na neformálnej úrovni (riešiť otvorené úlohy, aplikačné úlohy...) má tendenciu sa takýmto úlohám vyhýbať aj pri samotnom vyučovaní.

To znamená, že pokiaľ sa spomínané úlohy vyskytujú v pracovných listoch, má tendenciu ich vynechávať (pokiaľ mu to štátny vzdelávací program dovolí).

Našu výskumnú vzorku tvorilo 112 študentov 1. ročníka odboru Predškolská a elementárna pedagogika Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre.

V tabuľke uvádzame prehľad absolvovaných stredných škôl týchto študentov.

Tab. 1 : Rozdelenie študentov podľa typu absolvovanej strednej školy

Typ školy	**Počet študentov**
Gymnázium	28
Pedagogická a sociálna akadémia	36
Obchodná akadémia	20
Iná stredná škola	28

Ako vidieť z tabuľky najviac študentov má absolvovanú strednú školu s pedagogického smeru, čo súvisí so samotným zameraním odboru Predškolská a elementárna pedagogika.

Priebeh výskumu

Výskum prebiehal v dvoch fázach. Pre potreby tohto článku uvádzame iba prvú fázu, v ktorej študenti riešili matematický test zameraný na využitie algoritmov pri počítaní so zlomkami. Kvôli prehľadnosti uvádzame aj jednotlivé úlohy:

1. Vypočítajte a výsledok zapíšte v základnom tvare

$$\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{30}=$$

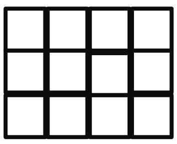
Vypočítajte a výsledok zapíšte v základnom tvare

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{8}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}:\frac{3}{10}\right)=$$

2. Vypočítajte a výsledok zapíšte v základnom tvare

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{4}{6}:\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}=$$

3. Vyznačte $\frac{2}{3}$



Test obsahoval tri gradujúce úlohy na využitie jednotlivých algoritmov počítania so zlomkami a jednu úlohu na znázornenie daného zlomku.

V prvej úlohe bolo potrebné sčítať, odčítať a vynásobiť medzi sebou zlomky v základnom tvare a menovatele zlomkov boli nesúdeliteľné čísla. V tejto úlohy boli zlomky zámerne zvolené tak, aby pri riešení stačilo aplikovať iba jednotlivé algoritmy a neboli potrebné ďalšie úpravy.

V tabuľke 2 sú uvedené počty študentov, ktorí správne, resp. nesprávne vyriešili prvú úlohu

Tab2: Úspešnosť riešenia 1. úlohy

Správne riešenia	Nesprávne riešenia	Nesprávne riešenia v %	Správne riešenia v %
77	35	31,86	68,14

V druhej úlohe okrem už vyššie uvedených algoritmov mali študenti použiť algoritmus delenia. V tejto úlohe už ale neboli uvedené zlomky v základnom tvare a bolo možné využívať krátenie zlomkov, čo následne uľahčilo výpočet celej úlohy. Pri riešení tejto úlohy bolo 54 správnych riešení a 58 nesprávnych riešení.

Pre úspešné zvládnutie tretej úlohy bolo potrebné uprednostniť operáciu násobenia pred operáciou sčítania, ako aj správne počítať so zmiešaným číslom. Táto úloha spôsobovala študentom najväčšie problémy.

Tabuľka 3 prezentuje počty študentov, ktorí správne, resp. nesprávne riešili tretiu úlohu.

Tab. 3: Úspešnosť riešenia 3. úlohy

Správne riešenia	Nesprávne riešenia	Nesprávne riešenia v %	Správne riešenia v %
20	92	82,14	17,86

Štvrtou úlohou študentov bolo znázornenie určitého zlomku. Pri riešení tejto úlohy boli študenti najviac úspešní. Úspešnosť riešenia ilustruje tabuľka 4.

Tab. 4: Úspešnosť riešenia 4. úlohy

Správne riešenia	Nesprávne riešenia	Nesprávne riešenia v %	Správne riešenia v %
87	25	22,32	77,68

Vyhodnotenie výskumu

Vo výskumnej časti našej práce bolo v centre nášho záujmu implikačnou analýzou zistiť závislosť medzi jednotlivými krokmi riešení. Pod pojmom didaktická premenná sa rozumie taký typ premennej, ktorá je pre učiteľa (aj pre študenta) k dispozícii, a ktorá súvisí zo zadaním, riešením úloh, cvičení (daná je úloha s presne určeným „tvarom“ a otázkami). O didaktickej premennej hovoríme vtedy, ak medzi premenným existuje aspoň jedna premenná (môže byť aj numerická), ktorá môže nadobúdať rôzne hodnoty (numerické alebo iné) a môže byť vybraná učiteľom (bez toho, aby zmenil úlohu), a ktorej rôzne hodnoty majú za následok rôzny prístup k riešeniu úlohy, môžu u študentov vyvolať rôzne postupy.(Bereková, 2001) V našom experimente boli didaktickými premennými jednotlivé kroky riešenia daných úloh. Konkrétne šlo o tieto didaktické premenné:

A_1 – študent ovláda algoritmus sčítavania zlomkov

A_2 – študent ovláda algoritmus násobenia zlomkov

A_3 – študent ovláda algoritmus odčítavania zlomkov

B_1 študent využíva pri riešení krátenie zlomkov

B_2 – študent ovláda algoritmus delenia zlomkov

C_1 – študent upredností operáciu násobenia pred operáciou sčítania

C_2 – študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok

C_3 - študent správne vyrieši úlohu číslo 3

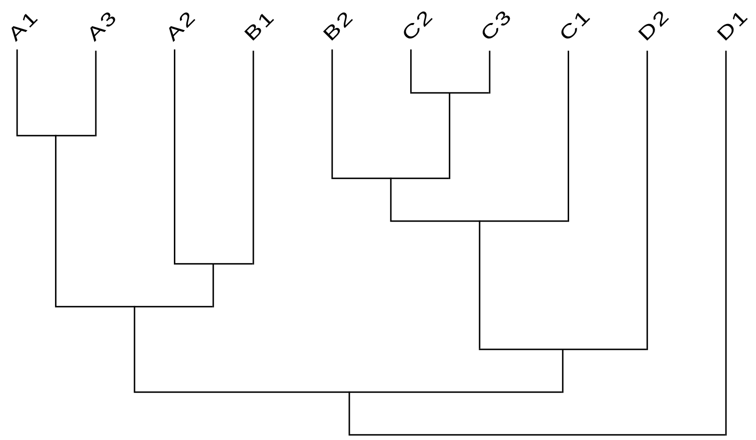
D_1 – študent rieši úlohu iba graficky

D_2 – študent rieši úlohu výpočtom aj graficky

V štatistickom programe CHIC sú vytvorené nasledujúce grafy Similarity tree, Implicative tree, Implicative graph.

SIMILARITY TREE

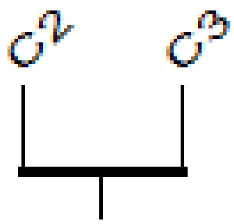
definuje podobnosť a intenzívnosť medzi dvoma triedami premenných definovaných v analýze a-priori. Pri konštrukcii grafu sa do jednej triedy (najvyššia úroveň) spájajú dve premenné na najpodobnejšom základe. Ďalej sa k nim pridajú jedna alebo dve premenné s podobným základom, tie už tvoria ďalšiu, ale slabšiu úroveň. Takýmto spôsobom sa priradia aj ďalšie premenné alebo množiny premenných na podobných základoch. Pre vyhodnotenie výsledkov z experimentu sú významné len dve najvyššie úrovne v grafe, ostatné úrovne sú bezvýznamné.



Ako už bolo spomenuté vyššie pre vyhodnotenie výsledkov z experimentu sú významné len dve najvyššie úrovne v grafe, ostatné úrovne sú bezvýznamné.

Z grafu môžeme vyčítať nasledovné podobnosti:

- najsilnejšia podobnosť je medzi premennými C2 a C3, lebo sú najvyššie spojené, t. j. medzi premennou študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok (C2) a premennou študent správne vyrieši úlohu číslo 3 (C3). Vzťah medzi nimi tvorí prvú úroveň.(Obr.2)

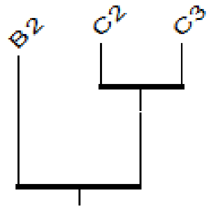


Obr. 3

Je teda pravdepodobné, že študent, ktorý si vie pracovať so zmiešaným číslom, dokáže aj správne vyriešiť celý príklad.

- druhá úroveň je medzi premennými A1– študent ovláda algoritmus sčítavania zlomkov a A3 – študent ovláda algoritmus odčítania zlomkov, pričom táto úroveň je ale slabšia ako medzi premennými C2 a C3. Táto závislosť nie je ani veľmi prekvapivá, nakoľko tieto dva algoritmy sú veľmi podobné, a tak možno s určitosťou povedať, že žiak/študent, ktorý vie zlomky sčitovať, ich vie aj odčítavať.

- v grafe ešte vidieť (menej významné úrovne) medzi premennou B2 množinou premenných {C2, C3} (Obr. 4).



Obr. 4

Premenná B2 sa pripája k množine {C2, C3}, t. j. B2 sa globálne podobá premenným C2 alebo C3. Premenná študent ovláda algoritmus delenia zlomkov (B2) sa vo všeobecnosti podobá tvrdeniam: študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok (C2) alebo študent správne vyrieši úlohu číslo 3 (C3). Z našej výskumnej vzorky 55 študentov vedelo správne použiť algoritmus delenia zlomkov (premenná B2), čo predstavuje približne 49%, 16 z nich správne vyriešilo tretiu úlohu (premenná C3), čo znamená, že aj vedeli počítať so zmiešaným číslom (premenná C2) a osem študentov z vyššie uvedených 55 síce správne počítali so zmiešaním číslom (premenná C2), ale tretiu úlohu nevyriešili správne.

- medzi ostatnými nami definovanými premennými nie je žiadna podobnosť, ani súvislosť.

IMPLICATIVE TREE

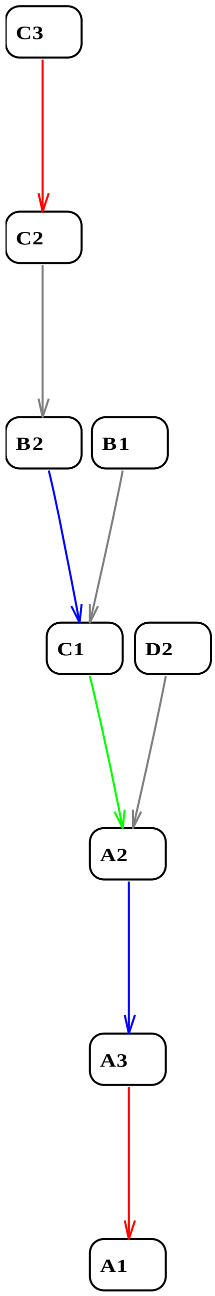
predstavuje implikácie alebo ekvivalencie medzi niektorými premennými a množinami premenných v analýze a-priori. Podobne ako v grafe Similarity tree, sú pre vyhodnotenie výsledkov významné len dve najvyššie úrovne, ostatné sú bezvýznamné pre hodnotenie experimentu.

Tak ako aj v predchádzajúcom prípade (similarity tree), vidíme najsilnejšiu hierarchiu (prvá úroveň) medzi premennými A1 a A3. Študent, ktorý ovláda algoritmus sčitovania zlomkov, ovláda aj algoritmus odčítania zlomkov, naopak to ale platiť nemusí. Vyplýva to z faktu, že medzi premennými sa nachádza implikácia a nie ekvivalencia. Sedemdesiat dva študentov ovládalo algoritmus sčitovania zlomkov a rovnaký počet študentov ovládalo algoritmus odčítavania zlomkov. 67 študentov ovládala obidva algoritmy.

Druhú úroveň tvorí hierarchia medzi premennými C3 a C2, teda ak študent správne vypočítal tretiu úlohu, vedel pracovať so zmiešaným číslom. Sedemdesiat štyri študentov ovládalo prácu so zmiešaným číslo a zároveň správne vypočítalo tretí príklad a len devätnásť študentov napriek tomu, že správne určili zlomok zo zmiešaného čísla, nesprávne vypočítali tretiu úlohu. Z grafu Implicativ tree ďalej vidieť, že premenné B2, C3, C2, C1, A2, A1, A3 tvoria jednu množinu premenných a premenné D2 a B1 vytvárajú druhú množinu.

GRAF IMPLIKÁCIÍ

predstavuje možnosti, ako študent môže rozmýšľať alebo zamýšľať sa nad postupom pri riešení danej úlohy. Farebné rozlíšenie šípok medzi jednotlivými premennými alebo množinami premenných naznačujú, aká percentuálna intenzita je medzi nimi alebo na koľko percent, ak študent má istú vedomosť, sa dostane k tej ďalšej premennej. Pre výsledky experimentu, ako sám autor uvádza, sú podstatné vzťahy medzi premennými od 85 %. (Rumanová, Vallo, 2012)



Ako vidieť z grafu, v našom experimente medzi premennými A3 a A1, ako aj medzi premennými C3 a C2 je 100% závislosť, ktorá vyplýva už aj z vyššie spomínaných tvrdení.

99% závislosť môžeme pozorovať medzi premennými A2 – študent ovláda algoritmus násobenia zlomkov a A3 – študent ovláda algoritmus odčítavania zlomkov, ako aj medzi premennými B2 – študent ovláda algoritmus delenia zlomkov a C1– študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania.

Medzi premennými C1 – študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania a A2 – študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania je 97% závislosť.

A na 89% závislé sú aj premenné D2 – študent rieši úlohu výpočtom aj graficky a A2 – študent ovláda algoritmus násobenia zlomkov, premenné B1 študent využíva pri riešení krátenie zlomkov a C1 – študent uprednostní operáciu násobenia pred operáciou sčítania, ako aj C2 – študent vie previesť zmiešané číslo na zlomok a B2 – študent ovláda algoritmus delenia zlomkov.

Záver

V súčasnosti je často zdôrazňované, že zlomok patrí k pomerne náročným pojmom, ktorý je potrebné postupne rozvíjať v dlhom časovom úseku. Otázky časti a celku majú v školskej matematike celkom zvláštne postavenie. Sú prepojené na ďalšie matematické štruktúry, ich správne pochopenie ovplyvňuje pojmotvorný proces, dajú sa aplikovať vo viacerých oblastiach matematiky, ale aj v spoločenskej a technickej praxi. Patria k tým oblastiam teórie vyučovania matematiky, ktoré sú predmetom výskumu nielen u nás ale aj v zahraničí. Aj napriek veľkému množstvu získaných poznatkov, zostávajú zlomky stále jedným „problémom" v školskej matematike, čo potvrdzuje aj náš výskum, ktorého čiastočné výsledky sme v článku prezentovali.

Poďakovanie

Článok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0948/16 „Vplyv osobnej potreby štruktúry a psychodidaktických aspektov na rozvoj matematických kompetencií"

References

BEREKOVÁ, H. et al. Slovník teórie didaktických situácií, 2. časť. In: *Zborník príspevkov na seminári z teórie vyučovania matematiky*. Bratislava: Univerzita Komenského, 2003, s. 113-122. ISBN 80-223-1874-4.

ČERNEK, P. *Matematika pre 3. ročník* . 2. vyd. Bratislava: SPN – Mladé letá, 2012. 88s. ISBN 978-80-10-02254-0.

HEJNÝ, M. Představa celku a jeho části. In: *Jak učit matematice žáky ve věku 10 – 15 let.* Frýdek- Místek: JČMF, 1999.

HVOLKOVÁ, M.et al. *Hravá matematika. Pracovný zošit pre 4.ročník ZŠ. 1. časť.* Košice: Taktik, 85s. ISBN 978-80-89530-74-8.

RUMANOVÁ, L., VALLO, D. Evaluation of geometric problem by applying the statistical implicative analysis. In: *Statistical Implicative Analysis: of an exploratory posture to a confirmatory posture..* Caen : Université de Caen, 2012, p. 16-21. ISBN 978-2-7466-5256-9.

TICHÁ, M., MACHÁČKOVÁ, J. *Rozvoj pojmu zlomok vo vyučovaní matematiky.* Studijní materiál k projektu Operační program Rozvoj lidských zdroju. Praha: JČMF, 2006, 37s.

https://moodle.pf.unipo.sk/pluginfile.php?file=%2F17486%2Fmod_resource%2Fcontent%2F0%2F2009-2010%2F13.10.2009-Matematika_ISCED_1-2.upravena_.pdf

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 2 No. 1, p. 36 – 43
ISSN 2453-6083

Analýza riešení slovných úloh charakterizovaných zjednotením dvoch množín s neprázdnym prienikom

Analysis of Solving Math Word Problems Characterized by Union of Two Sets with Non-Empty Intersection

Klimentová Lucia[a] – Šovčíková Petronela[a] – Čeretková Soňa[a]

[a *] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 23 March 2016; received in revised form 18 April 2016; accepted 25 April 2016

Abstract

In our article we focused on math word problems, which solution does union of sets with non-empty intersection characterize. The research sample was the first year students of Preschool and Elementary Education at The Constantine the Philosopher University in Nitra, master level. There were three tasks, which were solved by students. The context of tasks was different but the solving of these tasks was very similar and it can be represented by one general solution scheme. From all students´ solutions we chose six, which represent the most frequently algebraic or graphical errors within our sample solutions. So we made some word analysis and error diagnostics of these solutions.

Keywords: math word problems, solving, analysis, error diagnostics

Classification: 97D70

Úvod

Riešenie slovných úloh patrí k málo obľúbeným činnostiam vo vyučovaní matematiky. Všeobecne, ako učiteľmi a žiakmi, tak aj verejnosťou je prijímaný fakt, že riešenie slovných úloh v matematike je pre žiakov náročné. Často už len samotná skutočnosť, že žiak má riešiť slovnú úlohu, je základnou príčinou jeho neúspechu pri riešení. Rakoušanová (1957, in Novotná, 2000) vo svojej práci tvrdí, že žiaci radi a prevažne správne a rýchlo počítajú najrôznejšie numerické úlohy, ale zjavne neradi riešia slovné úlohy... Jedným z možných vysvetlení je, že v matematickej úlohe, ktorá nie je slovná, sú vždy vyznačené počtové operácie a žiak preto nie je nútený tvoriť matematickú úlohu samostatne, na rozdiel od slovnej úlohy, v riešení ktorej musí najskôr číselné údaje vyhľadať, zistiť ich vzájomný vzťah a závislosť a až na základe toho zistenia musí sám určiť vhodné počtové operácie. Je to však iba časť vysvetlenia nechuti k riešeniu slovných úloh. Ďalšie príčiny nechuti a neúspechu žiakov pri riešení slovných úloh sú hlbšie a sú prevažne metodického rázu. (Novotná, 2000)

* Corresponding author; email: petronela.sovcikova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2016.2.1.36-43

V našom príspevku analyzujeme riešenia slovných úloh, ktorých riešenie je charakterizované neprázdnym prienikom dvoch množín a diagnostikujeme najčastejšie chyby vyskytujúce sa pri ich riešení.

Jednou z hlavných podmienok pre vytvorenie klímy, ktorá podnecuje diskusiu o problémoch riešenia slovnej úlohy, je schopnosť učiteľa diagnostikovať príčiny chýb a úroveň porozumenia problémom u jednotlivých žiakov. Vo väčšine prípadov dokáže skúsený učiteľ odhaliť mnohé príčiny problémov, ktoré majú jeho žiaci pri riešení slovných úloh. (Novotná, 2000)

Teoretické východiská

Schopnosti a zručnosti riešenia slovných úloh v matematike patria medzi matematické kompetencie a zaoberajú sa nimi všetky aktuálne teórie o cieľoch vyučovania matematiky a všetky národné i medzinárodné testovania v matematike. (Čeretková, Šedivý, 2005)

Blum a Niss (1991, in Novotná, 2000) uvádzajú, že slovné úlohy by mali byť zaradené do vyučovania matematiky, pretože sú vhodným prostriedkom pre rozvíjanie všeobecných kompetencií žiakov a ich postojov k matematike, umožňujú žiakom *„vidieť a posudzovať“* nezávisle, analyzovať a porozumieť použitiu matematiky, rozvíjajú schopnosť žiakov aktivovať matematické vedomosti a zručnosti v nematematických situáciách a pomáhajú žiakom pri poznávaní, porozumení a zapamätávaní pojmov, metód a výsledkov matematiky.

„Úlohy, v ktorých je závislosť medzi danými a hľadanými údajmi vyjadrená slovnou formuláciou a treba v nich riešiť istý problém zo spoločenskej, ekonomickej alebo inej oblasti, nazývame slovnými úlohami. V slovných úlohách treba na základe vhodnej úvahy zistiť, aké počtové operácie musíme s danými údajmi (číslami) urobiť, aby sme našli čísla, ktoré máme vypočítať a odpovedať nimi na hľadané otázky.“ (Šedivý a kol., 2013)

Novotná (in Hejný, 2004) uvádza nasledovné problémy žiakov špecifické pre riešenie slovných úloh: žiak má nedostatočné predchádzajúce skúsenosti a znalosti súvisiace s kontextom alebo s potrebným matematickým zázemím úlohy; žiak nečíta zadanie pozorne, s porozumením; žiak nesprávne interpretuje jeden alebo viac termínov použitých v zadaní úlohy; žiak nie je schopný spojiť oddelené informácie a vzťahy do jedného komplexnejšieho celku.

Jadro úspešnosti riešenia slovnej úlohy teda spočíva v schopnosti žiaka danú úlohu zmatematizovať.

V procese matematizácie slovnej úlohy, v rámci rozboru, sú dôležité tieto činnosti: určenie objektov, určenie vzťahov medzi objektmi, identifikácia otázky, nájdenie zjednocujúceho pohľadu, získanie vhľadu do štruktúry slovnej úlohy, vytvorenie matematického modelu (matematickej úlohy). (Šedivý a kol., 2013)

Jednotlivé činnosti v rámci riešenia nemusí žiak vykonávať v uvedenom poradí. Záleží na kontexte a kategórii slovnej úlohy, či žiak niektoré z činností vynechá alebo sa ku niektorým vráti aj viackrát.

Metodika výskumu

Zadania slovných úloh, ktoré sme si pre analýzu vybrali, neboli zvolené náhodne, ale zámerne. Pri ich voľbe sme si stanovili podmienku, aby to boli slovné úlohy, ktoré sa riešia pomocou princípu inklúzie a exklúzie. V rámci analýzy sme sa zamerali na riešenie nasledujúcich troch úloh.

Úloha č.1

V triede bolo 32 žiakov. Na krúžok z matematiky sa prihlásilo 21 žiakov. Na krúžok zo slovenského jazyka 28 žiakov. Koľko žiakov sa prihlásilo len na krúžok z matematiky? Koľko žiakov sa prihlásilo len na krúžok zo slovenského jazyka? Koľko žiakov sa prihlásilo na oba krúžky?

Úloha č.2

Hudobnej súťaže sa zúčastnilo 25 žiakov umeleckých škôl, ktorí súťažili v hre na klavír a na gitaru. V hre na klavír súperilo 17 žiakov a v hre na gitaru 19 žiakov. Koľko žiakov súťažilo v hre na oba nástroje? Koľko žiakov súťažilo v hre iba na jeden nástroj?

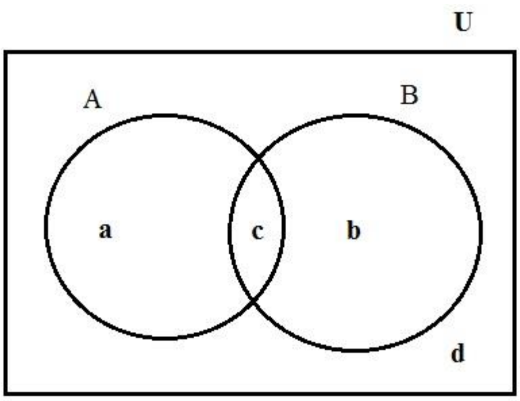
Úloha č.3

Na výlete bolo 26 detí. 17 detí si prinieslo kolobežku a 13 detí kolieskové korčule. Koľko detí si prinieslo kolobežku aj korčule? Koľko detí si prinieslo iba kolobežku?

Vybrané slovné úlohy sa štandardne riešia aplikovaním postupu všeobecného riešenia, ktoré predstavujeme v nasledujúcich riadkoch. Všeobecné riešenie vychádza zo schémy riešenia slovnej úlohy: Slovná úloha -> Rozbor -> Matematická úloha -> Riešenie matematickej úlohy -> Skúška -> Výsledok + Odpoveď. (Šedivý a kol., 2013)

Všeobecné riešenie zvolených slovných úloh:

Slovnú úlohu riešime pomocou princípu inklúzie a exklúzie. V našom prípade ide vždy o dve množiny s neprázdnym prienikom - množina A a množina B, ktoré sú podmnožinami základnej množiny U. Nech x je počet prvkov množiny A, nech y je počet prvkov množiny B a nech z je počet prvkov základnej množiny U. Ďalej, nech a je počet prvkov, ktoré patria iba do množiny A, nech b je počet prvkov, ktoré patria iba do množiny B a nech c je počet prvkov, ktoré patria súčasne do množín A aj B. Označme d počet prvkov, ktoré nepatria ani do množiny A, ani do množiny B. V našich úlohách ide vždy o prípad, keď $d = 0$. Uvedené situáciu vieme zakresliť pomocou Vennovho diagramu (Obr. 1).



Obrázok 1

Zápis:

$a + b + c + d = z$

$a + c = x$

b + c = y

a = ?

b = ?

c = ?

Výpočet:

Ak $a + c = x$, potom $x + b + d = z$. Z toho vyplýva $b = z - x - d$. Zo zadania $d = 0$, teda $b = z - x$.

Počet prvkov, ktoré patria súčasne do množín A aj B vypočítame nasledovne : $b + c = y$. Keďže vieme, že $b = z - x$, potom $c = x + y - z$

Teraz už ľahko vypočítame, že ak $a + c = x$, potom $a = z - y$.

Skúška:

$a + b + c = z$	$a + c = x$	$b + c = y$
$z - y + z - x + x + y - z = z$	$z - y + x + y - z = x$	$z - x + x + y - z = y$

Odpoveď:

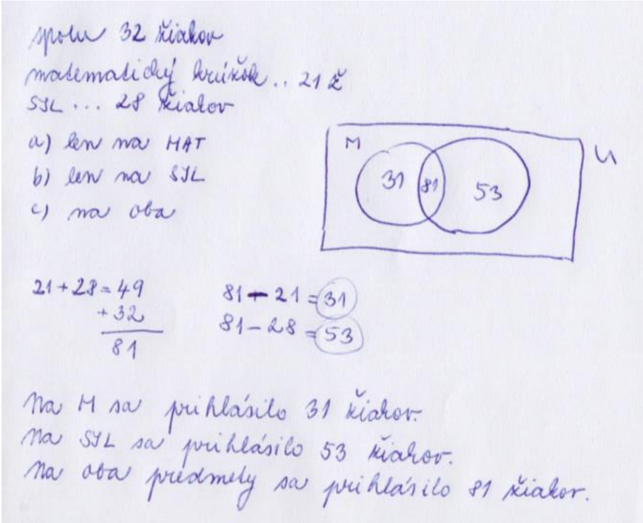
Iba v množine A je a prvkov, iba v množine B je b prvkov a v oboch množinách zároveň je c prvkov.

Analýza riešení

V nasledujúcej časti postupne predstavíme šesť študentských riešení, ktoré sme vybrali spomedzi všetkých 81 riešení ako typové chybné riešenia. Prvú úlohu riešilo 25 študentov a chybných bolo 8 riešení. Druhú úlohu riešilo 32 študentov a chybných bolo 17 riešení. Tretiu úlohu riešilo 22 študentov a chybných bolo 9 riešení. Úlohy riešili študenti Učiteľstva predškolskej a elementárnej pedagogiky v rámci predmetu Metódy riešenia matematických úloh.

Riešenie 1A:

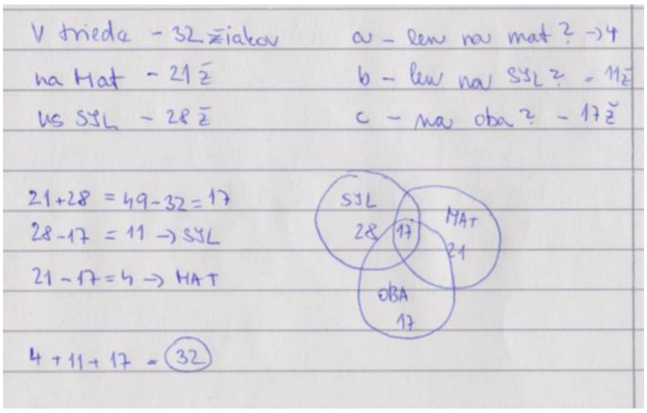
V prvom riešení môžeme vidieť, že študent riešil slovnú úlohu princípom inklúzie a exklúzie. Zvolil si základnú množinu U a pomocou Vennových diagramov si znázornil situáciu, ktorá vyplynula zo zadania. Ukážka znázornená na obrázku obsahuje všetky časti, ktoré sú potrebné k riešeniu slovnej úlohy – zápis, znázornenie, výpočty, skúška a odpoveď. Skúsme sa pozrieť na samotné výpočty. Vychádzajúc zo všeobecného riešenia vidíme, že študent mal problém už so samotným porozumením princípu inklúzie a exklúzie, resp. s porozumením pojmom – množina, podmnožina množiny, prienik dvoch množín a vzťahov medzi nimi. Napríklad: žiakov bolo spolu 32. Študent pri svojom riešení uvádza, že počet žiakov, ktorí navštevovali oba krúžky súčasne je 81, čo je logicky a matematicky nemožné. Taktiež uvádza, že počet žiakov, ktorí navštevovali len krúžok zo slovenského jazyka je 53, avšak v zadaní bol počet žiakov 28. Bolo si treba uvedomiť, že to je počet žiakov, ktorí navštevovali iba krúžok zo slovenského jazyka a zároveň aj počet žiakov, ktorí navštevovali oba krúžky. Podľa tohto riešenia by muselo platiť, že 53+81=28, čo samozrejme nie je pravda.



Obrázok 2

Riešenie 1B:

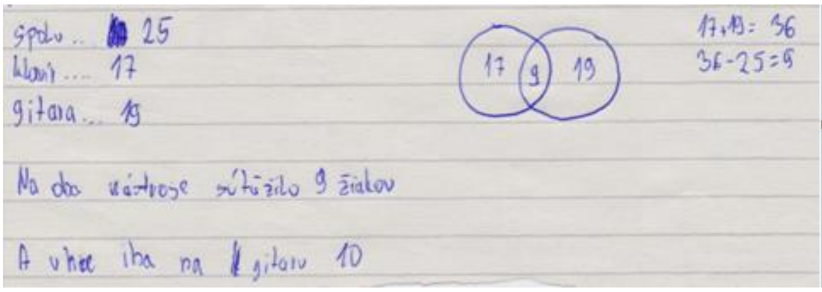
V ďalšom riešení úlohy môžeme vidieť, že študent rozumie princípu inklúzie a exklúzie a vzťahom medzi nimi, keďže úlohu vyriešil korektne. Má však značné medzery v grafickom znázornení dvoch množín pomocou Vennových diagramov, čo môžeme vidieť na Obr. 3 Riešenie obsahuje všetky časti, ktoré sú pri hľadaní riešenia slovnej úlohy potrebné: zápis, znázornenie, výpočty, skúška. Avšak v tomto spomínanom riešení chýba slovný komentár a odpoveď.



Obrázok 3

Riešenie 2A:

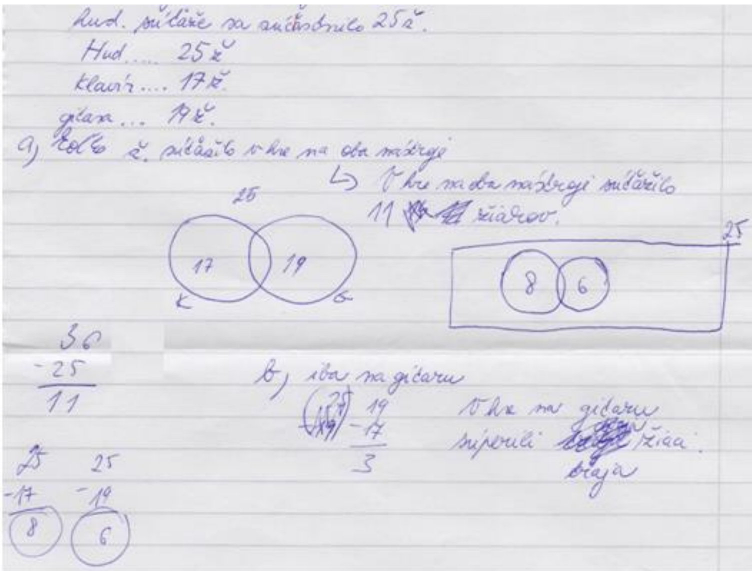
V tomto prípade išlo v riešení hlavne o numerické chyby. Ako môžeme vidieť, študent správne určil súčet 17 + 19 = 36, ale v nasledujúcom kroku už nesprávne vypočítal rozdiel čísel 36 a 25. Podľa študenta je rozdiel rovný číslu 9, čo však nie je pravda, pretože je rovný 11. Keďže študent získal nesprávnu hodnotu výsledku, všetky jeho ostatné výpočty boli nekorektné. Z riešenia môžeme ďalej vidieť, že študent nemá úplne osvojené pojmy množina a podmnožina a vzťahy medzi nimi, pretože počet žiakov, ktorí súťažili v hre na klavír, je 17. Tento počet žiakov zahŕňa v sebe tých, ktorí súťažili len v hre na klavír, ale aj tých, ktorí súťažili aj v hre na klavír, aj v hre na gitaru. Ak by sme vychádzali zo študentovho nákresu, tak počet týchto študentov by bol 17 + 9 = 26. Čo je v rozpore so zadaním.



Obrázok 4

Riešenie 2B:

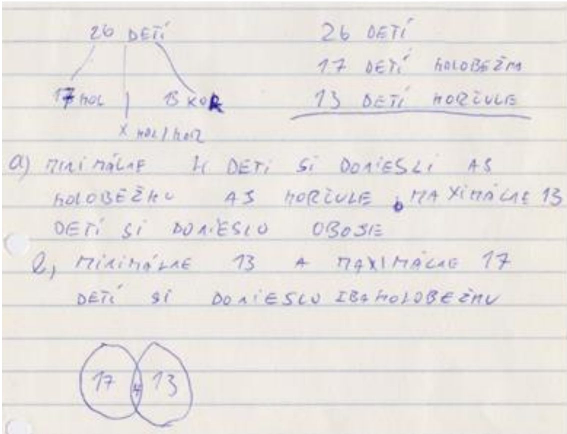
V nasledujúcom riešení môžeme vidieť, že študent si správne znázornil dve množiny pomocou Vennových diagramov, ale číselné údaje, ktoré boli uvedené v zadaní, nesprávne zaznačil do obrázka. V zadaní bol daný počet žiakov, ktorí súťažili v hre na klavíri, nie počet žiakov, ktorí súťažili *iba* v hre na klavíri. Vo výpočtoch môžeme vidieť, že študent vie, ako úlohu vyriešiť. Problém však nastal pri druhom znázornení. Keďže chýba označenie množín, nevieme s istotou priradiť k jednotlivým množinám počty študentov. V ďalšej časti však študent nesprávne určil počet žiakov, ktorí súťažili v hre *iba* na gitare. Odčítal od seba počet študentov, ktorí súťažili v hre na gitare a počet študentov, ktorí súťažili v hre na klavír. A to je nekorektná operácia.



Obrázok 5

Riešenie 3A:

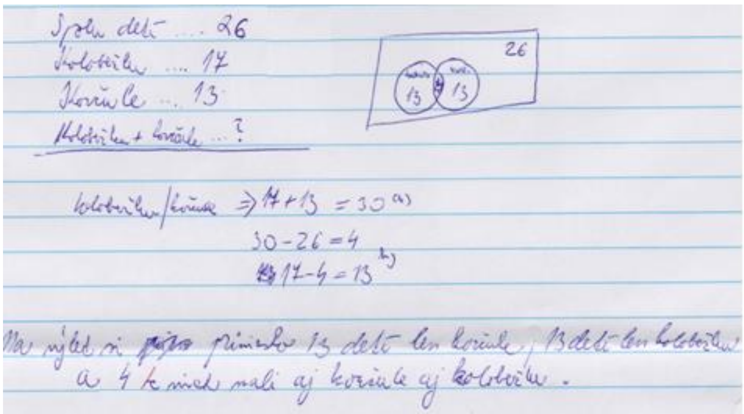
Na prvý pohľad môžeme v tomto riešení vidieť, že študent na riešenie slovnej úlohy prvotne nepoužil Vennove diagramy, znázornil si ich až nakoniec. Zadanie slovnej úlohy sa rozhodol znázorniť vlastným spôsobom, čo nemôžeme považovať za nesprávnu voľbu. Avšak študent vôbec neporozumel zadaniu slovnej úlohy. Nevieme posúdiť, akým smerom sa uberali myšlienky jeho uvažovania, ale na základe odpovede vieme zhodnotiť, že úlohu vyriešil nesprávne. Odpoveď na otázku, koľko detí si prinieslo aj kolobežku, aj korčule, študent odpovedal, že minimálne 4 deti a maximálne 13. Podobne je to aj v druhej odpovedi. Z uvedených dôvodov môžeme povedať, že študent nemá osvojený princíp inklúzie a exklúzie, nerozumie pojmom množina a podmnožina množiny a vzťahom medzi nimi. Uvedené potvrdzujú aj dodatočne znázornené Vennove diagramy. Podľa obrázka Vennových diagramov by počet všetkých detí bol 17 + 4 + 13 = 34, čo je však v rozpore so zadaním, kde bol počet všetkých detí 26.



Obrázok 6

<u>Riešenie 3B:</u>

V riešení Obr. 6 môžeme vidieť, že študent začal počítať správne, ale v poslednom kroku neodčítal počet detí, ktoré si priniesli aj kolobežku, aj korčule, od počtu detí, ktoré si priniesli iba korčule. Nevykonaním tohto kroku samozrejme nezískal správne riešenie. Študent má osvojené znázornenie dvoch množín pomocou Vennových diagramov. V riešení chýba skúška správnosti. Ak by ju študent vykonal, tak by svoje nesprávne riešenie odhalil: všetkých detí je spolu 13 + 13 + 4 = 30. Avšak v zadaní bol stanovený počet detí 26. Študentov výsledok je v rozpore so samotným zadaním.



Obrázok 7

Záver

Je všeobecne známe, že slovné úlohy patria medzi najproblematickejšie oblasti vo vyučovaní matematiky. Je dôležité včas diagnostikovať problémy prítomné pri riešení slovných úloh, aby sme problémy a najčastejšie chyby mohli následne efektívne eliminovať.

V predstavenej analýze sme sa zamerali na diagnostiku najčastejších chýb pri riešení slovných úloh, v ktorých išlo o porozumenie princípu inklúzie a exklúzie. Vybrané riešenia boli zvolené tak, aby obsahovali najčastejšie numerické a grafické chyby, ktoré sa pri riešení slovných úloh daného typu vyskytujú. Vo väčšine riešení sme sa stretli s neporozumením princípu inklúzie a exklúzie, nakoľko v riešeniach študentov bol počet prvkov podmnožiny *A*, resp. *B*, základnej množiny *U* väčší, ako je počet všetkých prvkov základnej množiny uvedený v zadaní úlohy. Riešením tohto problému by mohlo byť zaradenie slovných úloh s reálnym kontextom do vyučovacieho procesu, ktoré by žiakom umožnili prepojiť vedomosti z matematiky s ich každodenným životom. Taktiež by bolo vhodné tieto úlohy vhodne zakresliť do obrázkov alebo schém, čo žiakom poskytne názornú ukážku a umožní lepšie pochopiť úlohy Ďalšie chyby, ktorých sa študenti dopúšťali, boli numerické chyby vo výpočtoch, ktoré mohli byť spôsobené nepozornosťou. Poslednú skupinu tvorili riešenia, ktoré obsahovali korektné riešenie slovnej úlohy, avšak grafické znázornenie bolo nesprávne.

Problémy, ktoré vznikajú pri riešení úloh, sa dajú v školskej praxi odstrániť opätovným a dôkladnejším vysvetlením problematiky, názornými ukážkami a viacnásobným precvičovaním riešenia úloh. Vznik numerických chýb môžeme zamedziť eliminovaním rušivých prvkov vo vyučovacom procese, ktoré môžu žiakov zbytočne rozptyľovať.

Poďakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektu APVV-14-0446 s názvom *Hodnotenie kompetencií učiteľa.*

Literatúra

Čeretková, S., Šedivý, 0. (2005). *Aktuálne problémy teórie vyučovania matematiky.* FPV UKF v Nitre.

Hejný, M. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky.* Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Šedivý, O., a kol. (2013). *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky.* Nitra: UKF.