Vol. 4, No. 1, 2018

Acta Mathematica Nitriensia

free electronic journal

ISSN: 2453-6083

Názov / Title
Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup

General information
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access

Pokyny pre autorov
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Guidelines for authors
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Recenzné konanie
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.

Review process
The journal carries out a double -blind peer review evaluation of drafts of contributions.

Dostupnosť
www.amn.fpv.ukf.sk

Available from
www.amn.fpv.ukf.sk

Vydavateľ
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

Publisher
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia

Údaje k aktuálnemu číslu
Ročník: 4
Číslo: 1
Rok: 2018
Dátum vydania: 02. 05. 2018

Information to current issue
Volume: 4
No.: 1
Year: 2018
Publication date: May 05, 2018

Obsah

Content

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 1, p. 1– 6
ISSN 2453-6083

Konštrukčné úlohy o zobrazeniach
Construction Tasks about Mappings

Peter Vrábel *[a]

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 12 March 2018; received in revised form 21 March 2018; accepted 22 March 2018

Abstract

The notion of the mapping belongs to the basis of mathematics. It is the key notion for students of mathematics on universities especially for incoming teachers of mathematics. Many students have appreciable problems with mapping operations. It is evident in situations when it needed to devise a mapping with predetermined properties. The students have difficulty deeper understanding of a composite mapping. Their knowledge does not go deep and to substance. The mathematical thinking in a work with mappings is formed by construction tasks about mappings with given properties in the paper.

Keywords: construction task, problem task, mapping

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Úvod

Pojem zobrazenia patrí do základov matematiky. Na strednej škole ho špeciálne nahrádza pojem funkcie, pretože sa tu viac menej uvažujú iba niektoré elementárne funkcie reálnej premennej, čo už neplatí pre matematickú olympiádu. Na vysokej škole, zvlášť pre budúcich učiteľov matematiky, je to kľúčový pojem, ktorý je používaný v každej matematickej disciplíne. Vedieť operovať so zobrazeniami patrí do základných znalostí každého, kto používa matematiku. Operovať so zobrazeniami však študentom robí značné problémy. Ešte väčšie problémy majú pri úlohách, v ktorých treba skonštruovať zobrazenie s vopred danými vlastnosťami. Príčinu treba hľadať v tom, že pojem zobrazenia a zloženého zobrazenia nemajú vžitý. Riešia (a možno ani to nie) iba rutinné úlohy o zobrazeniach, ich poznatky sú povrchné, nejdú do hĺbky a podstaty (Vrábel [2], 2005). V tomto príspevku sa snažíme formovať matematické myslenie v narábaní so zobrazeniami prostredníctvom konštrukčných úloh o zobrazeniach s danými vlastnosťami.

Základné pojmy a označenia

Relácia f, $f \subseteq A \times B$, sa nazýva zobrazenie z množiny A (množiny A) do množiny B, ak ku každému x z množiny A existuje najviac (práve jeden) prvok y z množiny B tak, že $[x, y] \in f$. Ak f je zobrazenie z množiny A do množiny B a $[x, y] \in f$, tak x nazývame vzorom k prvku y a y nazývame obrazom prvku x v danom zobrazení. Píšeme tiež, že $y = f(x)$. Množinu $\{x \in A;\ \exists y \in B\ [x, y] \in f\}$ nazývame definičný obor zobrazenia f a označujeme $D(f)$. Množinu $\{y \in B;\ \exists x \in A\ [x, y] \in f\}$ nazývame obor hodnôt zobrazenia f a označujeme $H(f)$. Ak $H(f) = B$, tak hovoríme, že f je zobrazenie z množiny A na množinu B. Zobrazenie

*Corresponding author: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.1-6

f množiny A do množiny B (teda ak $D(f) = A$) budeme označovať $f: A \to B$. Uvedomme si, že každé zobrazenie f z množiny A do množiny B je aj zároveň zobrazením množiny $D(f)$ na množinu $H(f)$. Zobrazenia $f: A \to B$, $g: C \to D$ sa rovnajú práve vtedy, keď $A = C$ a $f(x) = g(x)$ pre každé $x \in A$. Ak zobrazenie $f: A \to B$ je prosté, tak ho nazývame injekcia. Ak pre zobrazenie $f: A \to B$ platí $H(f) = B$, tak ho nazývame surjekcia. Ak zobrazenie $f: A \to B$ je súčasne injekcia aj surjekcia, tak ho nazývame bijekcia. Ak $f: A \to B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, tak množinu $\{y \in B; \exists x \in X\ y = f(x)\}$ nazývame obrazom množiny X v zobrazení f a označujeme $f(X)$ a množinu $\{x \in A; f(x) \in Y\}$ nazývame vzorom množiny Y v zobrazení f a označujeme $f_{-1}(Y)$. Ak je napríklad zobrazenie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané rovnicou $y = x^2$ a $X = \langle -1,2 \rangle$, $Y = \langle 1,4 \rangle$, tak $f(X) = \langle 0,4 \rangle$ a $f_{-1}(Y) = \langle -2,-1 \rangle \cup \langle 1,2 \rangle$. Nech $f: A \to B$, $X_1, X_2 \subseteq A$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Potom platia nasledujúce vzťahy (Šalát [1], 1986):

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2),\ f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2), f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2),$$

$$f_{-1}(Y_1 \cup X_2) = f_{-1}(Y_1) \cup f_{-1}(Y_2),\ f_{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f_{-1}(Y_1) \cap f_{-1}(Y_2),$$

$$f_{-1}(Y_1) - f_{-1}(Y_2) = f_{-1}(Y_1 - Y_2).$$

Vzťahy pre zjednotenia a prieniky možno zovšeobecniť: ak $X_t \subseteq A$, $Y_t \subseteq B$, $t \in T$ (indexová množina), potom

$$f(\cup_{t \in T} X_t) = \cup_{t \in T} f(X_t),\ f(\cap_{t \in T} X_t) \subseteq \cap_{t \in T} f(X_t),$$

$$f_{-1}(\cup_{t \in T} Y_t) = \cup_{t \in T} f_{-1}(Y_t),\ f_{-1}(\cap_{t \in T} Y_t) \subseteq \cap_{t \in T} f_{-1}(Y_t).$$

Zloženým zobrazením zobrazení $f: A \to B$, $g: B \to C$ je zobrazenie $h: A \to C$, kde $h = \{[x, z] \in A \times C; z = g(f(x))\}$. Zobrazenie h budeme označovať $g \circ f$. Skladanie zobrazení je asociatívne, teda pre ľubovoľné zobrazenia $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ platí $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Zobrazenie $f: A \to A$, pre ktoré platí $f(x) = x$ pre každé $x \in A$, sa nazýva identické zobrazenie a označujeme ho id_A. Ak $f: A \to B$ je prosté, potom $\{[y, x] \in B \times A;\ [x, y] \in f\}$ je zobrazenie množiny $H(f)$ do množiny A, ktoré nazývame inverzným zobrazením k zobrazeniu f a označujeme f^{-1}. Zrejme $f^{-1} \circ f = id_A$, $f \circ f^{-1} = id_{H(f)}$.

Konštrukčné úlohy o zobrazeniach

Budeme sa zaoberať problémovými úlohami, v ktorých bude treba zostrojiť zobrazenia s vopred danými vlastnosťami. Teda nebudeme riešiť rutinné úlohy typu : Je dané zobrazenie (funkcia). Dokážte, že má takú a takú vlastnosť, prípadne vyšetrite jeho vlastnosti. Budeme často uvažovať nekonečné postupnosti, čo sú vlastne špeciálne zobrazenia množiny $\mathbb{N}$ do nejakej množiny A. Ak $f: \mathbb{N} \to A$, tak po označení $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, dostávame postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Úloha 1. Nájdite také zobrazenia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aby $f \circ h = g \circ h$ ale $f \neq g$.

Riešenie. Pri riešení tejto úlohy si treba uvedomiť, že rozhodujúcu úlohu hrá obor hodnôt zobrazenia h i to, ako je definované zložené zobrazenie. Ak totiž $H(h) \neq \mathbb{N}$, tak prvky $\mathbb{N} - H(h)$ sa pri aplikácii zobrazení f, g nepoužijú a preto hodnoty $f(n)$, $g(n)$ môžu byť ľubovoľné. Teda napríklad, ak $h(n) = n + 2$, tak $H(h) = \{3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} - \{1,2\}$. Stačí položiť $f(1) = f(2) = 1$, $g(1) = g(2) = 2$ a $f(n) = g(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(f \circ h)(n) = f\big(h(n)\big) = f(n + 2) = n + 2 = g(n + 2) = g\big(h(n)\big) = (g \circ h)(n),$$

teda $f \circ h = g \circ h$ ale $f \neq g$.

Väčšina študentov nevie vyriešiť úlohu 1 hlavne preto, že uvažujú iba také funkcie f, g, ktoré sú definované na celej množine $\mathbb{N}$ jedným predpisom. Schopnosti riešiť úlohu 1 by iste napomohol poznatok o krátení „sprava" v pologrupe $(P,\circ)$, kde P označuje množinu všetkých zobrazení nejakej pevnej množiny X do X, X je aspoň dvojprvková množina, a $\circ$ je operácia zloženia zobrazení. Pre $f, g, h \in P$ totiž platí:

$$(\forall\, f, g \in P\ f \circ h = g \circ h \Longrightarrow f = g) \Longleftrightarrow h \text{ je surjekcia.}$$

Nech $h: X \to X$ je surjekcia. Nech $f, g \in P$ a $f \circ h = g \circ h$. K ľubovoľnému $y \in X$ existuje také $x \in X$, že $h(x) = y$. Potom

$$f(y) = f\big(h(x)\big) = (f \circ h)(x) = (g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = g(y),$$

teda $f = g$.

Naopak, ak h nie je surjekcia, tak postupujeme podobne ako v úlohe 1. Existuje $x_0 \in X$, ktoré nepatrí do $H(h)$. Definujme zobrazenia $f, g \in P$ takto:

$$f(x) = g(x) = x \text{ pre každé } x \in X - \{x_0\};\ f(x_0) = x_0,\ g(x_0) = x_1,\ x_1 \in X,\ x_1 \neq x_0.$$

Potom $f \circ h = g \circ h$, ale $f \neq g$.

Úloha 2. Nájdite také zobrazenia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aby $h \circ f = h \circ g$ ale $f \neq g$.

Riešenie. V tomto prípade si treba zase uvedomiť, že rovnosť $h\big(f(n)\big) = h\big(g(n)\big)$ môže platiť aj pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $f(n) \neq g(n)$. Môže to nastať, keď h nie je injekcia. Stačí zvoliť f, g, h napríklad takto: $f(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, $g(1) = 2$, $g(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $h(1) = h(2) = 1$, $h(n) = n$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Potom $(h \circ f)(n) = (h \circ g)(n) = 1$ pre $n = 1, 2$ a $(h \circ f)(n) = (h \circ g)(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$, teda $h \circ f = h \circ g$, ale $f \neq g$, pretože $f(1) \neq g(1)$.

Schopnosti riešiť úlohu 2 by mohol napomôcť poznatok o krátení „zľava" v pologrupe $(P,\circ)$, ktorú sme uvažovali za úlohou 1. Pre $f, g, h \in P$ totiž platí:

$$(\forall\, f, g \in P\ h \circ f = h \circ g \Longrightarrow f = g) \Longleftrightarrow h \text{ je injekcia.}$$

Nech $h: X \to X$ je injekcia. Potom existuje inverzné zobrazenie $h^{-1}: H(h) \to X$. Nech $f, g \in P$ a $h \circ f = h \circ g$. Potom pre každé $x \in X$ platí:

$$f(x) = id_X\big(f(x)\big) = (h^{-1} \circ h)\big(f(x)\big) = h^{-1}\big((h \circ f)(x)\big) = h^{-1}\big((h \circ g)(x)\big)$$
$$= (h^{-1} \circ h)\big(g(x)\big) = id_X\big(g(x)\big) = g(x),$$

teda $f = g$.

Naopak, ak h nie je injekcia, tak postupujeme podobne ako v úlohe 2. Existujú $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, že $h(x_1) = h(x_2)$. Definujme $f, g \in P$ napríklad takto: $f = id_X$, $g(x_1) = x_2$, $g(x) = x$ pre každé $x \in X - \{x_2\}$. Potom $h \circ f = h \circ g$, ale $f \neq g$, pretože $f(x_1) \neq g(x_1)$.

Úloha 3. Nech f, g sú zobrazenia neprázdnej množiny X do množiny X a $g \circ f = id_X$. Potom f je injekcia a g je surjekcia.

Riešenie. Najskôr dokážeme nepriamo, že f je injekcia. Keby zobrazenie f nebola injekcia, tak by existovali také rôzne prvky $x_1, x_2 \in X$, pre ktoré by platila rovnosť $f(x_1) = f(x_2)$. Potom by platilo:

$$x_1 = id_X(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = x_2$$

a to by bol spor. To, že g je surjekcia, dokážeme tiež nepriamo. Keby g nebola surjekcia, tak by existovalo také $x_0 \in X$, že pre všetky $y \in X$ by platilo $g(y) \neq x_0$. Potom ale

$$x_0 = id_X(x_0) = (g \circ f)(x_0) = g\big(f(x_0)\big) = g(y_0) \neq x_0$$

to by bol spor.

Úloha 3 dáva návod ako vyriešiť nasledujúcu úlohu.

Úloha 4. Nájdite také zobrazenia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, aby $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$, ale aby f, g neboli bijekcie.

Riešenie. Stačí vhodne zvoliť f, g tak, aby f bola injekcia, ale nebola surjekcia a g bola surjekcia, ale nebola injekcia. Tak napríklad zvoľme f, g nasledovne: $f(n) = n + 2$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Zobrazenie f je injekcia ale zrejme nie je surjekcia $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Vzhľadom na rovnosť $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ je zobrazenie g jednoznačne určené pre čísla z množiny $\mathbb{N} - \{1,2\}$. Musí platiť $g(n) = n - 2$ pre každé $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$. Položme $g(1) = g(2) = 1$. Potom zrejme g je surjekcia ale nie je injekcia, pretože napríklad $g(1) = g(3)$.

Celý rad vhodných úloh možno formulovať o vzoroch a obrazoch množín.

Úloha 5. Nech $f: A \to B$, $X_1, X_2 \subseteq A$. Dokážte inklúziu $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$. Dokážte tiež, že rovnosť nastane práve vtedy, keď zobrazenie f je prosté.

Riešenie. Platí:

$$y \in f(X_1 \cap X_2) \Leftrightarrow (\exists\, x \in X_1 \cap X_2\ y = f(x))$$
$$\underset{*}{\Rightarrow} ((\exists\, x \in X_1\ y = f(x)) \wedge (\exists\, x \in X_2\ y = f(x)) \Leftrightarrow (y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2))$$
$$\Leftrightarrow y \in f(X_1) \cap f(X_2).$$

Implikácia s hviezdičkou sa dá obrátiť, ak zobrazenie f je prosté. Ak f nie je prosté, tak existujú rôzne prvky $x_1, x_2 \in A$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$. Položme $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$. Potom $f(X_1 \cap X_2) = f(\emptyset) = \emptyset$, $f(X_1) \cap f(X_2) = \{f(x_1)\}$, teda $f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$.

Úloha 6. Nájdite takú funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a intervaly J_1, J_2 tak, aby množina $f(J_1 \cap J_2)$ bola vlastnou podmnožinou množiny $f(J_1) \cap f(J_2)$.

Riešenie. Vieme, že máme hľadať medzi funkciami, ktoré nie sú prosté. Vhodná by bola napríklad párna funkcia. Uvažujme funkciu $y = x^2$. Stačí zvoliť napríklad intervaly $\langle -1,2 \rangle$, $\langle -2,1 \rangle$. Potom $f(\langle -1,2 \rangle \cap \langle -2,1 \rangle) = f(\langle -1,1 \rangle) = \langle 0,1 \rangle$ a $f(\langle -1,2 \rangle) \cap f(\langle -2,1 \rangle) = \langle 0,4 \rangle$.

Úloha 7. Nájdite takú funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, že ku každému reálnemu číslu a existujú práve dve čísla x_1, x_2 tak, že $f(x_1) = f(x_2) = a$.

Riešenie. Keby sa malo jednať o zobrazenie z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tak by to nebol žiaden problém. Stačilo by vziať napríklad funkciu $y = \log|x|$ pri hocijakom základe, alebo funkciu $y = \operatorname{tg} x$ uvažovanú napríklad na množine $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Funkcia f má byť však definovaná na celej množine $\mathbb{R}$. Prvá funkcia, nech je to pre konkrétnosť dekadický logaritmus, je k riešeniu najbližšie. Totiž pre každé reálne číslo a existujú práve dve čísla a to 10^a, -10^a, pre ktoré platí $\log|10^a| = \log|-10^a| = a$. Treba túto fukciu pravda ale vhodne korigovať. Treba ju dodefinovať v bode 0. Nech napríklad $f(0) = 0$. Tým však porušíme podmienku pre funkciu f: $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, teda funkcia f by nadobúdala hodnotu 0 až v troch bodoch. Preto musíme opravovať hodnotu v bode 1, následne v ďalších bodoch, najjednoduchšie v bodoch 2, 3, 4, ... Posunieme hodnotu v bode n na hodnotu v bode $n+1$ pre každé celé nezáporné číslo n. Teda príkladom hľadanej funkcie je funkcia f definovaná takto:

$$f(x) = \begin{cases} \log|x|, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \log|x+1|, & x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Ďalšie konštrukčné úlohy možno formulovať pre bijektívne zobrazenia.

Úloha 8. Nájdite bijekciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Riešenie. Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ rozložme na dve disjunktné množiny: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_n$, kde $\mathbb{N}_p(\mathbb{N}_n)$ označuje množinu všetkých párnych (nepárnych) prirodzených čísel; $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_0^-$. Ľahko zostrojíme bijekcie $f_1\colon \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}$, $f_2\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{Z}_0^-$. Stačí položiť $f_1(n) = \frac{n}{2} = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pre každé $n \in \mathbb{N}_p$ a $f_2(n) = -\frac{n-1}{2} = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pre každé $n \in \mathbb{N}_n$, kde $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ označuje celú časť čísla $\frac{n}{2}$. Takto $f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Z teoretickej aritmetiky je známe, že ľubovoľný interval reálnych čísel možno bijektívne zobraziť na ľubovoľný interval. Nájsť však konkrétnu bijekciu v niektorých prípadoch nemusí byť ľahká úloha. Je to v prípadoch, keď intervaly sú rôznych typov.

Úloha 9. Nájdite bijekciu $f\colon \langle a,b\rangle \to (a,b\rangle$.

Riešenie. Nájsť takú bijekciu určenú na intervale $\langle a,b\rangle$ jedným predpisom nie je možné. Istú inšpiráciu možno nájsť v úlohe 7. Identické zobrazenie to samozrejme nie je, lebo číslo a nemá patriť do oboru hodnôt. Možno ho však korigovať zmenením hodnôt pre nekonečnú postupnosť bodov intervalu $\langle a,b\rangle$. Vyčleňme z tohto intervalu rastúcu postupnosť bodov, v ktorých zmeníme hodnotu identického zobrazenia. Napríklad uvažujme postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = a + \frac{n-1}{n}(b-a)$, $n \in \mathbb{N}$. Rozdeľme interval $\langle a,b\rangle$ na dve disjunktné množiny: $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, $\langle a,b\rangle - A$ a definujme zobrazenie f takto:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle a,b\rangle - A \\ a_{n+1}, & x = a_n \in A \end{cases}$$

Dokážeme, že f je príklad hľadanej bijekcie. Nech x_1, x_2 sú ľubovoľné rôzne prvky z intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom buď sú oba z $\langle a,b\rangle - A$, alebo z množiny A alebo jeden je z $\langle a,b\rangle - A$ a druhý je z A. V prvom prípade $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$; v druhom prípade $x_1 = a_m$, $x_2 = a_n$, $m \neq n$, $f(x_1) = a_{m+1} \neq a_{n+1} = f(x_2)$; v treťom prípade nech $x_1 \in \langle a,b\rangle - A$, $x_2 \in A$, potom $f(x_1) = x_1 \in \langle a,b\rangle - A$, $f(x_2) \in A$ a $f(x_1) \neq f(x_2)$, pretože množiny $\langle a,b\rangle - A$, A sú disjunktné. Takto sme dokázali, že f je injekcia. Zobrazenie f je aj surjekcia. Ak $y \in (a,b\rangle$, tak buď $y \in (a,b\rangle - A$ alebo $y \in A - \{a\}$. V prvom prípade $f(y) = y$; v druhom prípade $y = a_n$ pre nejaké $n \geq 2$, teda $f(a_{n-1}) = a_n$.

Úloha 10. Nájdite bijekciu $f\colon (-1,0\rangle \to (0,\infty)$.

Riešenie. Na začiatku nekonštruujme hľadanú bijekciu priamo. Možno ju dostať zložením viacerých jednoduchších bijekcií. Bijektívne možno „prechádzať“ postupne intervalmi $(-1,0\rangle$, $\langle 0,1)$, $(0,1)$, $(0,\infty)$:

$$f_1\colon (-1,0\rangle \to \langle 0,1),\ f_1(x) = -x;\ \ f_3\colon (0,1) \to (0,\infty),\ f_3(x) = \frac{1}{x} - 1,$$

$$f_2\colon \langle 0,1) \to (0,1)\,, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0,1) - \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\} \\ \frac{n}{n+1}, & x = \frac{n-1}{n}\,, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Potom hľadaná bijekcia je zobrazenie f, kde $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Predpis zobrazenia f nájdeme tak, že najskôr nájdeme predpis zobrazenia $f_2 \circ f_1$ a potom predpis f, $f = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$. Platí:

$$(f_2 \circ f_1)(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-1,0\rangle - \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \dots, -\frac{n-1}{n}, \dots\right\} \\ \frac{n}{n+1}, & x = -\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{x} + 1), & x \in (-1,0\rangle - \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \dots, -\frac{n-1}{n}, \dots\right\} \\ \frac{1}{n}, & x = -\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Záver

Schopnosť pracovať efektívne a tvorivo so zobrazeniami sa nedá získať iba riešením rutinných úloh. Študentom robia ťažkosti hlavne zložené zobrazenia. Okrem samozrejmých základných teoretických vedomostí je potrebné samostatne riešiť problémové úlohy a zvlášť konštruovať zobrazenia s vopred danými vlastnosťami.

Literatúra

[1] Šalát, T.-Smítal, J. 1986. *Teória množín*. Bratislava: Alfa, 1986.

[2] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: FPV UKF, Edícia Prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050- 840-2.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 1, p. 7 –12
ISSN 2453-6083

Nepriamo sformulované slovné úlohy v príprave budúcich učiteľov predprimárneho vzdelávania

Indirectly Formulated Problems in Training of Future Pre-primary School Teachers

Lucia Rumanová[a*] – Júlia Záhorská[b]

[a, b*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 4 April 2018; received in revised form 9 April 2018; accepted 20 April 2018

Abstract

Math word problems are an essential component of the teaching process of Mathematics. For many pupils, solving verbal problems from Mathematics is an undesirable activity. The paper presents results of students, which are based on one test focused on solving of indirectly formulated problems. Selected students are from the study field Pre-school and Elementary Education.

Keywords: math word problems, indirectly formulated problems, future teacher, test, implicative analysis.

Classification: D15, D35, F95

Úvod

Slovné úlohy sú podstatnou zložkou vyučovacieho procesu matematiky, pričom ich riešenie je súčasťou takmer každého jej tematického celku. Autor v [1] definuje slovnú úlohu ako matematickú úlohu formulovanú pomocou slov, ktorej riešenie vyžaduje jazykové porozumenie a presah do životnej skúsenosti.

V článku sa budeme venovať nepriamo sformulovaným slovným úlohám, ktoré riešili budúci učitelia predprimárneho vzdelávania. Myslíme si, že takýchto úloh na uvedenom stupni vzdelávania nie je dostatok. Slovné úlohy takéhoto typu majú v učebniciach matematiky nezastupiteľné miesto a je potrebné ich zaraďovať do vyučovacieho procesu.

Nepriamo sformulované slovné úlohy a ich riešenie

Nepriamo sformulované úlohy prispievajú k rozvoju matematických schopností žiakov, logického myslenia a komunikačných schopností. Takéto úlohy predstavujú hlavne problémové úlohy, kde žiak jednoznačne nevie, aké matematické operácie má v ich riešení použiť, akú stratégiu zvoliť v riešení, a ako získať správny výsledok.

Je teda pravdepodobné, že žiak bude úspešný v riešení nepriamo sformulovaných slovných úlohách, ak nemá problém s čítaním textu s porozumením, nepoužíva len naučené algoritmy

*Corresponding author: lrumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.7-12

a dokáže vybrať z poskytnutých údajov tie, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy a sú potrebné k vyriešeniu úlohy.

Metodika výskumu a charakteristika výskumnej vzorky

Výskumnú vzorku tvorili študenti 2. ročníka odboru *predškolská a elementárna pedagogika* Pedagogickej fakulty Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. Výskumnú vzorku 62 študentov môžeme považovať za reprezentatívnu, zber údajov bol realizovaný na tomto súbore študentov a výskum mal len deskriptívny charakter.

Študenti riešili test, ktorý tvorili nasledujúce úlohy:

A. *V ovocnom sade boli vysadené dva druhy ovocných stromov a to jablone a hrušky. Zistili sme, že jabloní bolo 32, čo bolo o 7 viac ako hrušiek. Koľko bolo hrušiek a koľko všetkých ovocných stromov spolu?*

B. *Matúš dostal za dobré vysvedčenie možnosť vybrať si v obchode dve hračky. Vybral si autíčko, ktoré bolo trikrát lacnejšie ako druhá vybraná lego hračka. Autíčko stálo 12 eur. Koľko eur zaplatili rodičia za obe hračky?*

C. *Jankova mamička má v peňaženke dvojeurové mince a päťeurové bankovky. Spolu má 9 kusov mincí a bankoviek. Ktorá z nižšie uvedených súm sa v peňaženke Jankovej mamičky nenachádza? Vyber správnu odpoveď.*

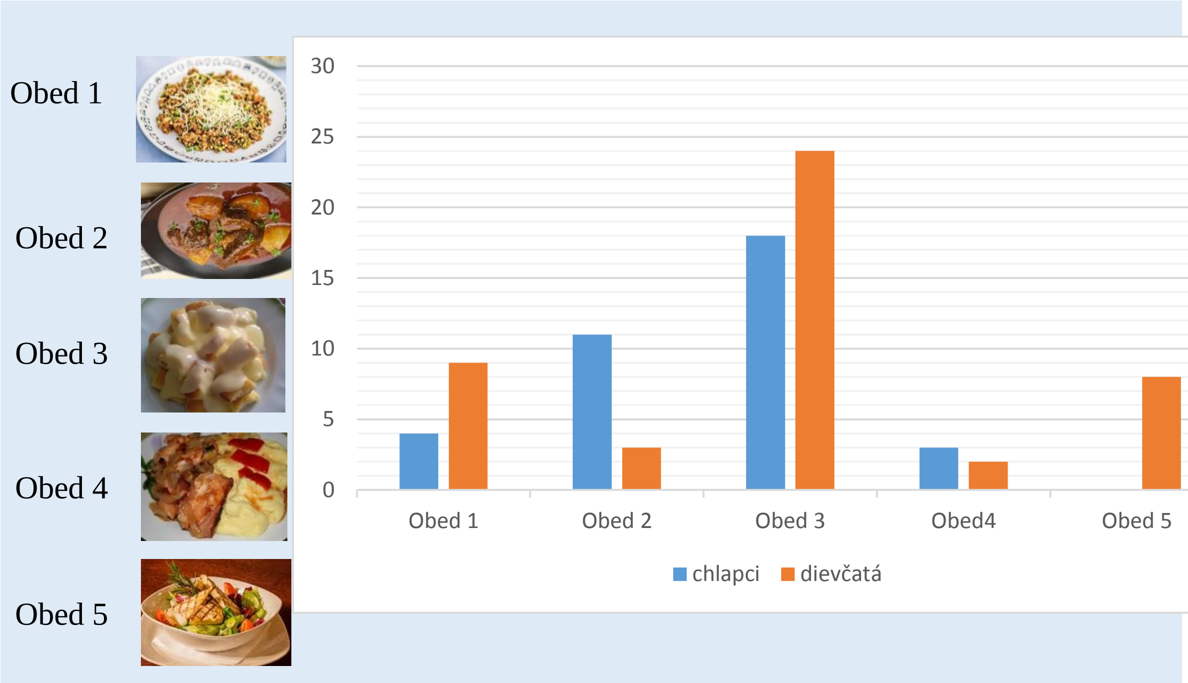
   a) 27 € b) 33 € c) 31 € d) 42 €

D. *Športová súťaž v atletike prebiehala v 4 disciplínach: beh na 100 m, beh na 200 m, beh na 400 m a beh na 800 m. V každej z nich boli odmenení 3 najlepší bežci. Ako odmenu mali dostať perá. Organizátori súťaže mali pripravených 32 pier. Koľko kusov musia doložiť, aby každý odmenený bežec dostal rovnaký počet pier?*

E. *V školskej jedálni si mohli žiaci v stredu po veľkonočných prázdninách vyberať z ponuky piatich obedov: Obed 1 (rizoto s bravčovým mäsom a uhorkou), Obed 2 (hovädzí guláš so zeleninou a varenými zemiakmi), Obed 3 (dukátové buchtičky s vanilkovým krémom), Obed 4 (bezlepkové jedlo – zapekané kuracie prsia so zemiakovou kašou) a Obed 5 (zeleninový šalát s tofu syrom). Každý žiak si mohol objednať vždy iba jeden obed. Vedúca školskej jedálne zisťovala záujem deviatakov z celého ročníka o jednotlivé druhy obedov a svoje zistenia graficky vyhodnotila (viď Obrázok 1).*

   Zistite z uvedeného grafu nasledovné:

   a) Koľko dievčat si vybralo hovädzí guláš so zeleninou a varenými zemiakmi?
   b) Koľko chlapcov si vybralo zeleninový šalát s tofu syrom?
   c) Koľko deviatakov si vybralo zapekané kuracie prsia so zemiakovou kašou alebo zeleninový šalát s tofu syrom?
   d) Obedovalo v stredu viac chlapcov alebo dievčat?
   e) Kto si objednal viac mäsitých jedál – chlapci alebo dievčatá?
   f) Koľko deviatakov v stredu obedovalo?



Obrázok 1: *Počty deviatakov k jednotlivým druhom obedov*

Študenti riešili uvedený test a získané riešenia úloh sme vyhodnotili implikačnou analýzou, kde sme zisťovali závislosť medzi jednotlivými krokmi riešenia (viď didaktické premenné v ďalšej časti).

Didaktické premenné pre test (a-priori analýza úloh)

V našom výskume boli didaktické premenné jednotlivé kroky riešenia úloh z testu, pričom úlohy sú označené veľkými písmenami (A, B, C, D, E) a kroky riešenia v každej úlohe sú označené číslami (viď Tabuľka 1).

Tabuľka 1*: Didaktické premenné pre jednotlivé úlohy v teste*

A1	študent správne určil počet hrušiek (nepriamo sformulované)
A2	študent správne určil počet ovocných stromov spolu
B1	študent správne určil cenu lego hračky (nepriamo sformulované)
B2	študent správne určil, koľko eur zaplatili rodičia za obe hračky
C1	študent správne určil, že suma 27 € sa môže nachádzať v peňaženke Jankovej mamičky
C2	študent správne určil, že suma 33 € sa môže nachádzať v peňaženke Jankovej mamičky
C3	študent správne určil, že suma 31 € sa nemôže nachádzať v peňaženke Jankovej mamičky (nepriamo sformulované)
C4	študent správne určil, že suma 42 € sa môže nachádzať v peňaženke Jankovej mamičky
D1	študent správne určil celkový počet odmenených súťažiacich

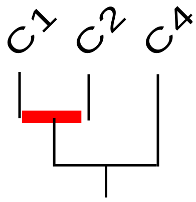
D2	študent správne urobil rozbor, aký počet pier je potrebný, ak každý odmenený dostane 1 pero, 2 perá alebo 3 perá
D3	študent správne určil počet pier potrebných na doloženie (nepriamo sformulované)
E1	študent správne určil počet dievčat, ktoré si vybrali hovädzí guláš so zeleninou a varenými zemiakmi
E2	študent správne určil počet chlapcov, ktorí si vybrali zeleninový šalát s Tofu syrom
E3	študent správne určil počet deviatakov, ktorí si vybrali zapekané kuracie prsia so zemiakovou kašou alebo zeleninový šalát s Tofu syrom
E4	študent správne určil počet dievčat a chlapcov, ktorí v stredu obedovali
E5	študent správne odpovedal na otázku
E6	študent správne určil počet dievčat a chlapcov, ktorí si objednali v stredu mäsité jedlo
E7	študent správne odpovedal na otázku
E8	študent správne určil počet deviatakov, ktorí v stredu obedovali

Tieto uvedené premenné nám poslúžili k štatistickému vyhodnoteniu testu s využitím programu C.H.I.C. Hodnoty môžu nadobúdať pravdivostnú hodnotu 1 (študent použil pri riešení úlohy) alebo 0 (študent nepoužil pri riešení úlohy).

Výsledky študentov z riešenia testu

Nasledujúce grafy sú vytvorené v uvedenom štatistickom programe, pričom pre vyhodnotenie výsledkov sú významné len dve najvyššie úrovne z konkrétneho grafu, ktorými sa budeme ďalej zaoberať.

Na Obrázku 2 je strom podobnosti, v ktorom vidieť najvyššiu podobnosť medzi premennými C1 a C2, t. j. študenti v C. úlohe hlavne zisťovali, či sa sumy 27 € alebo 33 € v peňaženke Jankovej mamičky nenachádzajú. Ak študenti zisťovali, či vyhovujú uvedené sumy zadaniu úlohy, tak ďalšou pokusnou možnosťou bola suma 42 €. Všetky tieto tri sumy z daných štyroch možností sú nesprávnou odpoveďou. Tieto závislosti sa dali očakávať.

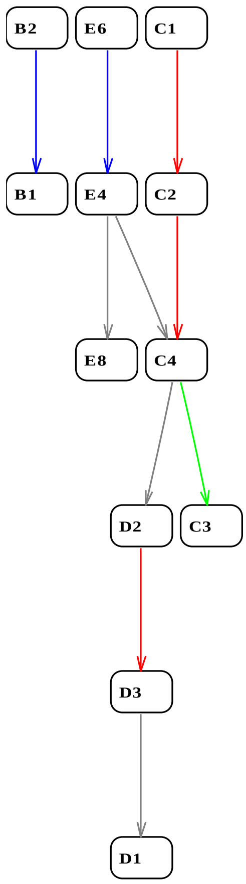


***Obrázok 2**: Strom podobnosti*

Implikatívny graf (viď Obrázok 3) predstavuje možnosti, ako študenti najčastejšie rozmýšľajú nad stratégiou riešenia daných úloh. Percentuálnu intenzitu medzi jednotlivými premennými naznačujú farebne rozlíšené šípky. [2]

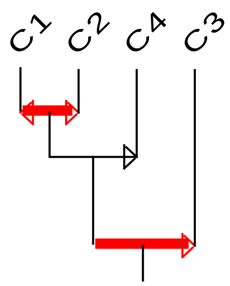
V našom prípade červená farba predstavuje až 99 %, modrá farba 98 %, zelená farba 97 % a najmenšia percentuálna závislosť 89 % je v grafe vyznačená šedou farbou. Každá ďalšia závislosť medzi inými premennými je slabšia ako uvedených 89 %, tie však nezobrazujeme.

Najvyššia závislosť vyplýva aj z iných grafov. Úloha sa pravdepodobne študentom zdala najjednoduchšia, tak ju väčšina aj riešila. Uvedená 99 % intenzita sa prejavila aj v riešení D. úlohy, ktorú riešili študenti po C. úlohe. Samostatnú množinu premenných tvoria premenné B1 a B2, to teda znamená, že riešenie tejto úlohy nesúvisí s riešeniami C., D. a E. úlohy.



***Obrázok 3**: Implikatívny graf*

Ďalším grafom na Obrázku 4 je implikatívny strom, kde sú zobrazené implikácie alebo ekvivalencie medzi popísanými didaktickými premennými. V tomto grafe sa potvrdilo tvrdenie aj zo stromu podobnosti. Konkrétne sa študenti v C. úlohe zaoberali možnosťami nakombinovať sumu 27 € dvojeurovými a päťeurovými bankovkami práve vtedy, keď kombinovali sumu aj 33 €. Ak vyriešili dané možnosti, tak sa zaoberali možnosťou kombinovať sumu 42 €, potom až sumu 31 €, čo bola zároveň aj správna odpoveď.



***Obrázok 4**: Implikatívny strom*

Záver

V riešení nepriamo sformulovaných slovných úloh je veľmi potrebný logický úsudok. Neprekvapili nás nesprávne riešenia zdanlivo jednoduchých úloh z uvedeného testu, konkrétne A. a B. úlohy (až 8 študentov nesprávne vyriešilo úlohy použitím opačnej počtovej operácie). Najviac študentov sa zaoberalo riešením C. úlohy, kde mali z uvedených možností vybrať tú správnu. Výsledok potvrdili aj získané štatistické grafy. Očakávali sme nesprávne riešenia E. úlohy. Toto zadanie úlohy bolo zdĺhavejšie, bolo potrebné čítať s porozumením a navyše študenti museli zistiť niektoré údaje z grafu. Naše predpoklady o výsledku sa však nepotvrdili. Študenti nemali problém správne vyriešiť danú úlohu. Riešenie úlohy po správnom pochopení grafu už nebolo zložité, študenti sformulovali svoje odpovede na položené otázky. Môžeme teda skonštatovať, že študenti videli súvislosti medzi kontextom a riešením slovných úloh, vybrali potrebné informácie zo zadania úloh, ale nie vždy správne použili matematický aparát na ich vyriešenie.

Záverom poznamenávame, že považujme za účelné, aby nepriamo sformulované slovné úlohy boli zaradované do vyučovacieho procesu matematiky. Rôzne riešenia takýchto úloh prispievajú k odhaleniu nesprávnych prístupov a formálnych vedomostí, a taktiež napomáhajú k celkovému rozvoju matematickej gramotnosti.

Literatúra

[1] Hejný, M. Anatómia slovnej úlohy o veku. In: *Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra*. Ružomberok: Katolícka univerzita, 2003. s. 1-13, ISBN 80-8084-066-0

[2] Rumanová, L., Vallo, D. Evaluation of geometric problem by applying the statistical implicative analysis. In: *Statistical Implicative Analysis: of an exploratory posture to a confirmatory posture.* Caen: Université de Caen, 2012, p. 16-21. ISBN 978-2-7466-5256-9

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 1, p. 13 – 18
ISSN 2453-6083

Aritmetický priemer a geometrický priemer II

Arithmetic Mean and Geometric Mean II

Marek Varga[a]

[a*]Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra

Received 13 April 2018; received in revised form 19 April 2018; accepted 26 April 2018

Abstract

In Mathematics we define several of kinds of the numerical means. Probably most known are the arithmetic mean and geometric mean. In last paper we proved the Cauchy´s inequality in different ways, especially by differential calculus. In this article we will add other ways.

Keywords: Cauchy´s inequality, mathematical induction

Classification: E55

Úvod

Nech sú dané nezáporné reálne čísla a_1, a_2, ..., a_n. Potom reálne číslo $A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ nazývame ich aritmetickým priemerom a reálne číslo definované vzťahom $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ nazývame ich geometrickým priemerom. Podľa tzv. Cauchyho AG – nerovnosti platí, že $A_n \geq G_n$. Platnosť tohto vzťahu sme dokázali v [1] a to predovšetkým prostriedkami diferenciálneho počtu, presnejšie hľadaním lokálnych či globálnych extrémov vhodných funkcií. Na ďalších riadkoch si ukážeme aj iné dôkazové stratégie.

Matematická indukcia

Podstatu tejto dôkazovej metódy vystihuje nasledovné tvrdenie.

Veta. *Nech $V(n)$ je výrok definovaný pre každé $n \in \mathbf{N}$. Potom výroky $V(n)$ sú pravdivé pre všetky $n \in \mathbf{N}$, ak platí:*

1° $V(1)$ je pravdivý výrok;

2° pre každé $k \in \mathbf{N}$ z pravdivosti výroku $V(k)$ vyplýva aj pravdivosť výroku $V(k+1)$.

---

*Corresponding author: mvarga@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.13-18

Musíme ešte doplniť, že v uvedenom tvare ide asi o najčastejší prípad matematickej indukcie. Vo všeobecnosti však prvý krok nemusíme nutne vykonať pre $n = 1$, môže byť vykonaný pre ľubovoľné $n_0 \in \mathbf{N}$.

Využime matematickú indukciu na dôkaz AG – nerovnosti (pozri [2]); malou zmenou je, že prvý krok vykonáme pre $n = 2$.

Z pravdivej nerovnosti $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$ vyplýva, že $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, teda výrok platí pre $n = 2$.

Ďalej, v druhom kroku by sme pomocou indukčného predpokladu získali

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + a_{n+1}}{n+1} \geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + a_{n+1}}{n+1}.$$

Označme $a_1 a_2 \ldots a_n = x^{n(n+1)}$, $a_{n+1} = y^{n+1}$. Potom máme:

$$\begin{aligned}
A_{n+1} - G_{n+1} &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} \geq \frac{n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}} = \\
&= \frac{nx^{n+1} + y^{n+1}}{n+1} - x^n y = \frac{nx^{n+1} + y^{n+1} - nx^n y - x^n y}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[nx^n (x-y) - y\left(x^n - y^n\right)\right] = \\
&= \frac{x-y}{n+1}\left(nx^n - yx^{n-1} - y^2 x^{n-2} - \ldots - y^n\right) = \frac{x-y}{n+1}\left(x^n - yx^{n-1} + x^n - y^2 x^{n-2} + \ldots + x^n - y^n\right) = \\
&= \frac{(x-y)^2}{n+1}\left[x^{n-1} + x^{n-2}(x+y) + x^{n-3}\left(x^2 + xy + y^2\right) + \ldots + \left(x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots + y^{n-1}\right)\right] \geq 0,
\end{aligned}$$

čo vlastne znamená, že skutočne $A_{n+1} \geq G_{n+1}$.

Spätná indukcia

Istou formou matematickej indukcie je aj dôkaz spätnou indukciou. Jej základnú myšlienku si predstavíme v nasledovnej vete.

Veta. *Nech $V(n)$ je výrok definovaný pre každé $n \in \mathbf{N}$, pričom:*

(A) $V(n)$ je pravdivý pre nekonečne veľa prirodzených čísel;

(B) ak $V(k)$, kde $k > 1$, je pravdivý výrok, tak aj $V(k-1)$ je pravdivý výrok.

Potom $V(n)$ platí pre všetky $n \in \mathbf{N}$.

Aplikujme uvedenú metódu na AG – nerovnosť (pozri [3]).

Využitím vzťahu $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ (dokázaný vyššie) a indukčného predpokladu máme

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}}{2k}=\frac{1}{k}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}\right)\geq\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}+\ldots+\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}{k}\geq$$
$$\geq\sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}\ldots\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}=\sqrt[2k]{a_1a\ldots a_{2k}},$$

čo znamená, že ak platí $A_k\geq G_k$, potom aj $A_{2k}\geq G_{2k}$.

Nech teraz platí AG nerovnosť pre nejaké $k\in\mathbf{N}$, tj. $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\geq\sqrt[k]{x_1x_2\ldots x_k}$, chceme ukázať, že platí aj pre $n=k-1$.

Položme $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, ..., $x_{k-1}=a_{k-1}$; $x_k=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}$. Potom

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}+\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}{k}\geq\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\geq\sqrt[k]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^k\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\right)^{k-1}\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\Leftrightarrow\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}}{k-1}\geq\sqrt[k-1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{k-1}},$$

čo sme potrebovali ukázať.

Ohraničenie určitého integrálu

Znovu si na úvod povedzme, z čoho budeme vychádzať pri tretej dôkazovej stratégii (pozri [4]).

Veta. Nech $f\in\mathcal{C}\langle a;b\rangle$, $m=\min\limits_{x\in\langle a;b\rangle}f(x)$, $M=\max\limits_{x\in\langle a;b\rangle}f(x)$. Potom $m(b-a)\leq\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)$.

Ak túto vetu (s jednoznačnou geometrickou interpretáciou) aplikujeme na funkciu $f(x)=\frac{1}{x}$ na intervale $\langle a;b\rangle$, pričom $0<a<b$, dostávame (1) $\frac{b-a}{b}\leq\ln\frac{b}{a}\leq\frac{b-a}{a}$ ♦.

Prepíšme teraz vzťah $A_n\geq G_n$ do tvaru $(A_n)^n\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$. Navyše, dané čísla a_j ($j=1,2,\ldots,n$) možno usporiadať tak, aby pre nejaké $k\in\mathbf{N}$ platilo (2) $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_k\leq A_n\leq a_{k+1}\leq a_{k+2}\leq\ldots\leq a_n$.

♦ Iným spôsobom, ako dokázať túto nerovnosť, je využiť Lagrangeovu vetu o strednej hodnote pre funkciu $F(x)=\ln x$ na uvedenom intervale.

Pomocou (1) a (2) dostaneme

$$\frac{A_n-a_1}{A_n}+\frac{A_n-a_2}{A_n}+\ldots+\frac{A_n-a_k}{A_n}\le\ln\frac{A_n}{a_1}+\ln\frac{A_n}{a_2}+\ldots+\ln\frac{A_n}{a_k},$$

resp. (3) $$\frac{kA_n-(a_1+a_2+\ldots+a_k)}{A_n}\le\ln\frac{(A_n)^k}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}.$$

Zo vzťahov (1) a (2) tiež máme

$$\ln\frac{a_{k+1}}{A_n}+\ln\frac{a_{k+2}}{A_n}+\ldots+\ln\frac{a_n}{A_n}\le\frac{a_{k+1}-A_n}{A_n}+\frac{a_{k+2}-A_n}{A_n}+\ldots+\frac{a_n-A_n}{A_n},$$

resp. (4) $$\ln\frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{(A_n)^{n-k}}\le\frac{(a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_n)-(n-k)A_n}{A_n}.$$

Ľavá strana (3) a pravá strana (4) je rovnaký výraz, preto platí $\ln\frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{(A_n)^{n-k}}\le\ln\frac{(A_n)^k}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}$, čiže (vďaka monotónnosti funkcie $y=\ln x$) získavame zápis $\frac{a_{k+1}\cdot a_{k+2}\cdot\ldots\cdot a_n}{(A_n)^{n-k}}\le\frac{(A_n)^k}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k}$, odkiaľ už dostávame AG nerovnosť.

Nerovnosti reálnych čísel

AG nerovnosť sme vyššie dokázali už viacerými spôsobmi, ale predsa len pokúsme sa minimalizovať našu námahu a využiť elementárnejšie stratégie. Skúsme teraz využiť nasledovnú lemu (pozri [5]).

Lema. *Nech sú dané reálne čísla* $0\le x_1\le x_2\le x_3$; $0\le y_1\le y_2\le y_3$. *Potom* $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\ge x_1y_k+x_2y_l+x_3y_m\ge x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1$; *kde* k, l, m *je ľubovoľná kombinácia čísel 1, 2, 3.*

Začnime tým, že zadané čísla a_j $(j=1,2,\ldots,n)$ usporiadame podľa veľkosti, preznačme potom $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n$.

Definujme teraz čísla tvaru $\frac{a_1}{G_n}$, $\frac{a_1a_2}{G_n^{\,2}}$, ..., $\frac{a_1a_2\ldots a_n}{G_n^{\,n}}=1$ a tiež čísla k nim prevrátené, tj. $\frac{G_n}{a_1}$, $\frac{G_n^{\,2}}{a_1a_2}$, ..., $\frac{G_n^{\,n}}{a_1a_2\ldots a_n}=1$.

Ak zovšeobecníme uvedenú lemu, tak najmenšiu možnú hodnotu súčtu súčinov dvojíc čísel z prvej skupiny a z druhej skupiny dostaneme, ak vynásobíme po rade najväčšie prvky z prvej skupiny s najmenšími prvkami z druhej skupiny. Preto (hoci nedokážeme porovnať navzájom čísla $\frac{a_1}{G_n}$, $\frac{a_1a_2}{G_n^{\ 2}}$, ..., $\frac{a_1a_2...a_n}{G_n^{\ n}}$; najväčšiemu z nich zrejme odpovedá najmenšia prevrátená hodnota atď.) môžeme písať

$$n=\frac{a_1}{G_n}\frac{G_n}{a_1}+\frac{a_1a_2}{G_n^{\ 2}}\frac{G_n^{\ 2}}{a_1a_2}+...+\frac{a_1a_2...a_n}{G_n^{\ n}}\frac{G_n^{\ n}}{a_1a_2...a_n}\le\frac{a_1}{G_n}\cdot 1+\frac{a_1a_2}{G_n^{\ 2}}\frac{G_n}{a_1}+...+\frac{a_1a_2...a_n}{G_n^{\ n}}\frac{G_n^{\ n-1}}{a_1a_2...a_{n-1}},$$

resp. $n\le\frac{a_1}{G_n}+\frac{a_2}{G_n}+...+\frac{a_n}{G_n}$, odkiaľ už vyplýva, že $G_n\le A_n$.

Euklidova veta

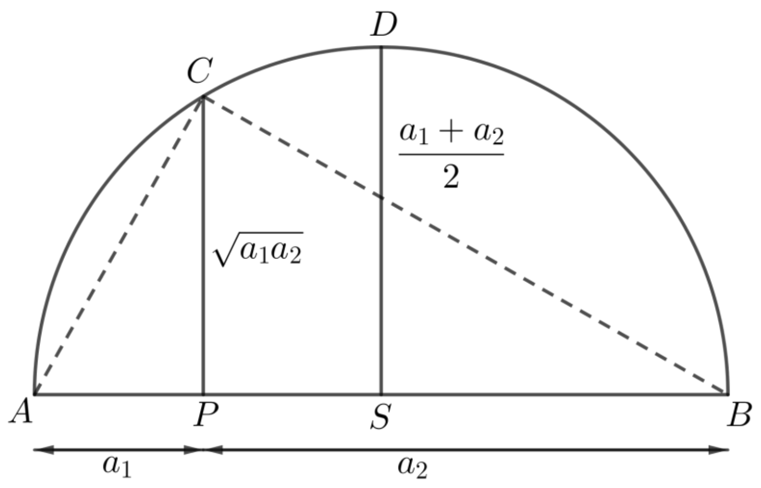
Posledný dôkaz sa možno nie celkom hodí k predošlému textu, keďže ho vykonáme len pre prípad dvoch čísel. Avšak pri hľadaní jednoduchších dôkazov sa prirodzene dostávame aj ku geometrii, ktorá nám pomôže svojou názornosťou. Využijeme Euklidovu vetu o výške.

Veta. Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z oboch úsekov prepony, tj. $v^2=c_a\cdot c_b$.

Využime označenia z obr. 1. Zostrojme Tálesovu kružnicu so stredom v bode *S* nad priemerom *AB*, trojuholník *ABC* je potom pravouhlý. Podľa Euklidovej vety o výške potom platí, že $v^2=|PC|^2=|AP|\cdot|PB|=a_1\cdot a_2$, čiže $v=\sqrt{a_1\cdot a_2}$.

Avšak táto hodnota nie je väčšia ako polomer kružnice, tj. $v\le|SD|=\frac{a_1+a_2}{2}$.

Spojením týchto faktov dostávame $\sqrt{a_1\cdot a_2}\le\frac{a_1+a_2}{2}$, resp. rešpektujúc naše doterajšie značenie platí $G_2\le A_2$.



Obrázok 1

Záver

V matematike poznáme viacero druhov priemerov z n nezáporných reálnych čísel a_j. Okrem už spomenutých, môžeme pridať harmonický priemer H_n, či kvadratický priemer K_n. Pritom platí $H_n \le G_n \le A_n \le K_n$. V článku sme ukázali rôznymi technikami platnosť prostredného vzťahu, pričom sme sa snažili o istú rozmanitosť – použili sme matematickú indukciu (ako jeden zo základných typov dôkazov ma tematike), vlastnosti určitých integrálov, vlastnosti reálnych čísel a operácie násobenia, či napokon sme si situáciu zjednodušili a preniesli do dvojrozmernej roviny. Na každom type dôkazu sa dá oceniť jeho istá matematická krása, či už ho považujeme za príliš zložitý či príliš jednoduchý. Zároveň môžeme dúfať, že čitateľ (študent matematiky) si tam nájde ten „svoj" obľúbený.

Literatúra

[1] Varga, M., Michalička P. Arithmetic Mean and Geometric Mean. *AMN*, Vol. 2, No. 2, ISSN: 2453-6083, p. 43 – 48, DOI: 10.17846/AMN.2016.2.2.43-48

[2] Varga, M.: Úvod do diferenciálneho počtu, UKF Nitra, 2015, 143 s.

[3] https://brilliant.org/discussions/thread/proof-of-the-arithmetic-mean-geometric-mean/ (cit. 15. 3. 2018)

[4] Berkolajko S.: Integral pomogajet dokazať neravenstvo Koši. *Kvant* č. 8/1979, ISSN 0130-2221, s. 26

[5] Pinter L., Chegedyš J.: Uporjadočennyje nabory čisel i neravenstva, *Kvant* č. 12/1985, ISSN 0130-2221, s. 14 – 16.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 1, p. 19 – 23
ISSN 2453-6083

Note to Ivory's Theorem

Dusan Vallo 1[a]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 24 April 2018; received in revised form 30 April 2018; accepted 1 May 2018

Abstract

In this paper we present a simple proof of the Ivory's Theorem for 2-dimensional case in Euclidean geometry.

Keywords: confocal conics, elliptical coordinates, Ivory's Theorem.

Classification: G10, R20

Introduction

Ivory's Theorem is one of the famous statements with wide applications in Physics and due to exist many generalizations, tabular referred in [1]. We concerned with proof of the simplest 2-dimensional version. To prove it, we use an elliptical coordinate system [2]. From this point of view, in this paper the problem is analyzed like a didactical note to conics and their attractive properties.

Confocal conics

Confocal conics are conics sharing the focuses. The set of confocal conics (ellipse, hyperbola) is states by equation

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}=1, \tag{1}$$

where a is the semimajor axis, b is the semiminor axis and $\lambda \in R$ is parameter. We can suppose that $b^2 < a^2$. It holds true that

a) for $-\infty < \lambda < b^2$ the equation (1) represents an ellipse,

b) for $b^2 < \lambda < a^2$ the equation (1) represents a hyperbola.

Short history of the Ivory's Theorem

The original version of this theorem deals with confocal quadrics. British mathematician James Ivory (1765-1842) computed the gravitational field created by a solid homogenous ellipsoid. In particular, French mathematician Michel F. Chasles (1793-1880) formulated the statement what is now famous like the Ivory's Theorem. [3]

Theorem

The diagonals of a quadrilateral made by arcs of confocal ellipses and hyperbolas are equal.

*Corresponding author: dvallo@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.19-23

Proof. Let us consider two confocal ellipses

$$k_1 := \frac{x^2}{a^2 - \lambda_1} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_1} = 1, \quad k_3 := \frac{x^2}{a^2 - \lambda_3} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_3} = 1, \tag{2}$$

for $0 < b < a, -\infty < \lambda_1 < b^2, -\infty < \lambda_3 < b^2, \ \lambda_1 \neq \lambda_3$.

The confocal hyperbolas corresponding to the focuses of the ellipses (2) have equations

$$k_2 := \frac{x^2}{a^2 - \lambda_2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_2} = 1, \quad k_4 := \frac{x^2}{a^2 - \lambda_4} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_4} = 1, \tag{3}$$

for $b^2 < \lambda_2 < a^2, b^2 < \lambda_4 < a^2, \ \lambda_2 \neq \lambda_4$.

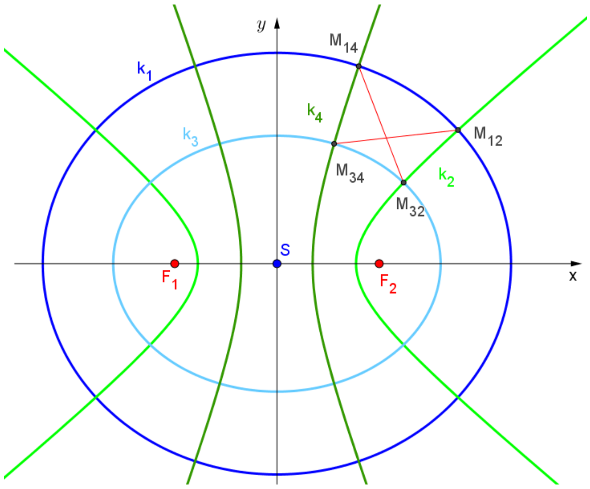


Fig. 1a

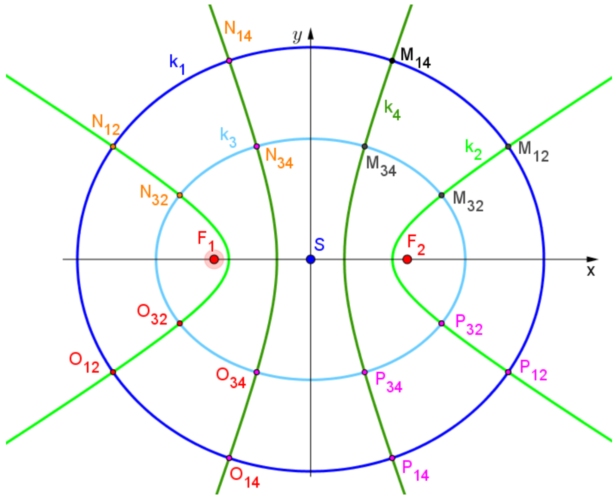


Fig. 1b

Let us fix the intersection points

$M_{12} = k_1 \cap k_2, M_{14} = k_1 \cap k_4, \ M_{32} = k_2 \cap k_3, \ M_{34} = k_3 \cap k_4$ in the 1st quadrant (see *Fig. 1a*). Their coordinates are in the form

$$M_{ij}[x_{ij}, y_{ij}] = M_{ij}\left[\sqrt{\frac{(a^2-\lambda_i)(a^2-\lambda_j)}{a^2-b^2}}, \sqrt{\frac{(b^2-\lambda_i)(b^2-\lambda_j)}{b^2-a^2}}\right]. \tag{4}$$

The labels of the coordinates of the points M_{ij} in (4) will be **fixed** for the purpose of the following computing.

1) At first we prove that $|M_{12}M_{34}|^2 = |M_{14}M_{32}|^2$. Let us calculate

$$|M_{12}M_{34}|^2 = (x_{12} - x_{34})^2 + (y_{12} - y_{34})^2$$

$$|M_{12}M_{34}|^2 = x_{12}^2 + x_{34}^2 + y_{12}^2 + y_{34}^2 - 2(x_{12}x_{34} + y_{12}y_{34})$$

$$\vdots$$

$$|M_{12}M_{34}|^2 = 2(a^2 + b^2) - \sum_{i=1}^{4} \lambda_i - 2\left(\frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(a^2 - \lambda_i)}}{|a^2 - b^2|} + \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(b^2 - \lambda_i)}}{|b^2 - a^2|}\right)$$

And finally we obtain

$$|M_{12}M_{34}|^2 = 2(a^2+b^2) - \sum_{i=1}^{4}\lambda_i - \frac{2}{a^2-b^2}\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(a^2-\lambda_i)} + \sqrt{\prod_{i=1}^{4}(b^2-\lambda_i)}\right) \qquad (5)$$

The result is symmetrical in permutation of indices. It implies that $|M_{12}M_{34}|^2 = |M_{14}M_{32}|^2$.

2) The restriction for the curved quadrilateral $M_{12}M_{14}M_{34}M_{32}$ is not necessary.

Another curved quadrilaterals can be considered, e.g. $M_{12}N_{14}N_{34}M_{32}$, $M_{12}O_{14}O_{34}M_{32}$ and $M_{12}P_{14}P_{34}M_{32}$ (see *Fig. 2a, b, c*). We compute the square of the lengths in these cases.

Remark. Visually, in Fig. 2 we fix the curved side $M_{12}M_{32}$ and the point M_{14} resp. M_{34} "move along" the ellipse k_1, resp. ellipse k_2 to the corresponding intersections points.

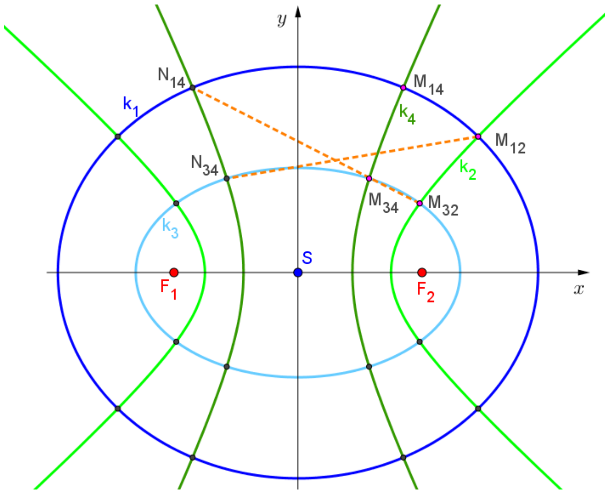


Fig. 2a

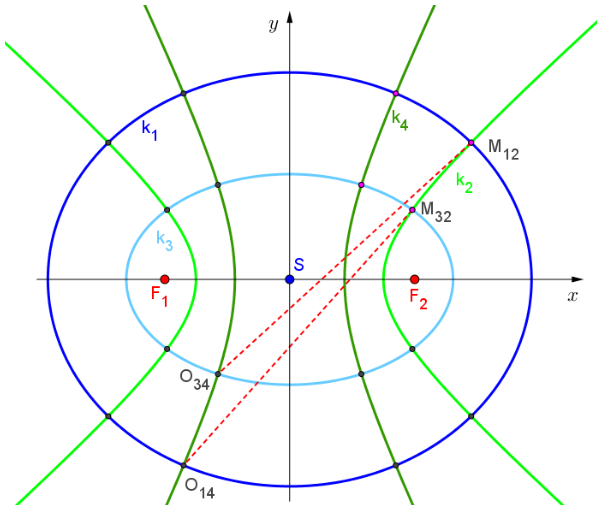


Fig. 2b

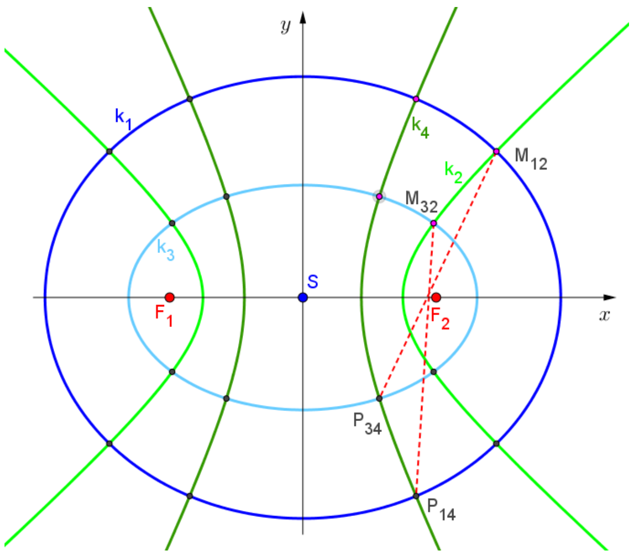


Fig. 2c

In previous notation and in usage of axial symmetry of conics, we derive that $N_{14}[-x_{14}, y_{14}]$, $N_{34}[-x_{34}, y_{34}]$. Holds

$$|M_{12}N_{34}|^2 = (x_{12}+x_{34})^2 + (y_{12}-y_{34})^2$$
$$|M_{12}N_{34}|^2 = x_{12}^2 + x_{34}^2 + y_{12}^2 + y_{34}^2 + 2(x_{12}x_{34} - y_{12}y_{34})$$
$$\vdots$$
$$|M_{12}N_{34}|^2 = 2(a^2+b^2) - \sum_{i=1}^{4}\lambda_i + \frac{2}{a^2-b^2}\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(a^2-\lambda_i)} - \sqrt{\prod_{i=1}^{4}(b^2-\lambda_i)}\right) \tag{6}$$

By analogy, the result is symmetrical in permutation of indices. It implies that
$$|M_{12}N_{34}|^2 = |N_{14}M_{32}|^2.$$

Following the ideas, we obtain $O_{14}[-x_{14}, -y_{14}]$, $O_{34}[-x_{34}, -y_{34}]$ and holds
$$|M_{12}O_{34}|^2 = (x_{12}+x_{34})^2 + (y_{12}+y_{34})^2$$
$$\vdots$$
$$|M_{12}N_{34}|^2 = 2(a^2+b^2) - \sum_{i=1}^{4}\lambda_i + \frac{2}{a^2-b^2}\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(a^2-\lambda_i)} + \sqrt{\prod_{i=1}^{4}(b^2-\lambda_i)}\right) \tag{7}$$
It also implies that
$$|M_{12}O_{34}|^2 = |O_{14}M_{32}|^2.$$
Finally, for the points $P_{14}[x_{14}, -y_{14}]$, $P_{34}[x_{34}, -y_{34}]$ we derive
$$|M_{12}P_{34}|^2 = (x_{12}-x_{34})^2 + (y_{12}+y_{34})^2$$
$$\vdots$$
$$|M_{12}P_{34}|^2 = 2(a^2+b^2) - \sum_{i=1}^{4}\lambda_i + \frac{2}{a^2-b^2}\left(-\sqrt{\prod_{i=1}^{4}(a^2-\lambda_i)} + \sqrt{\prod_{i=1}^{4}(b^2-\lambda_i)}\right) \tag{8}$$
We obtain that
$$|M_{12}P_{34}|^2 = |P_{14}M_{32}|^2.$$

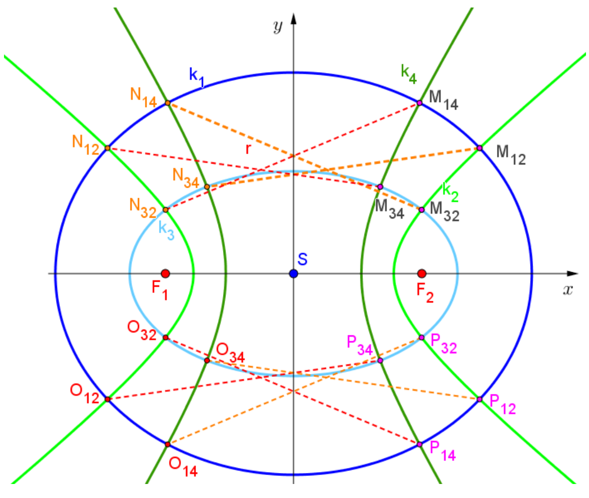


Fig. 3a

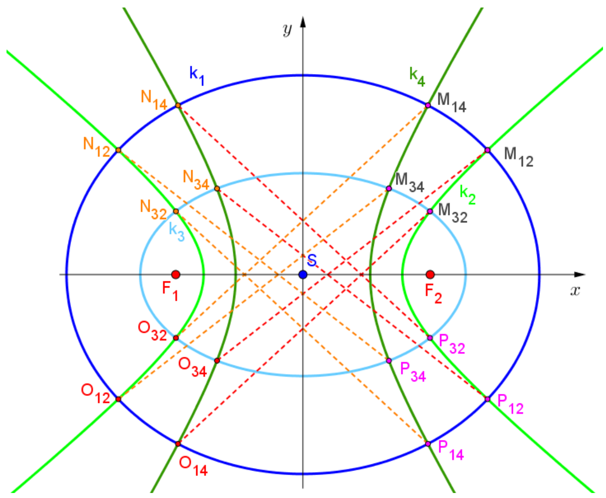


Fig. 3b

3) If we apply the axial symmetry of the conics, then we construct another curved

quadrilaterals which corresponding diagonals have equal lengths. In *Fig. 3a-c,* the situations related to fundamental positions of diagonals in *Fig. 2a-c* are drawn. The reader can verify that in all cases we obtain the one of the formulas in form (5) – (8). ■

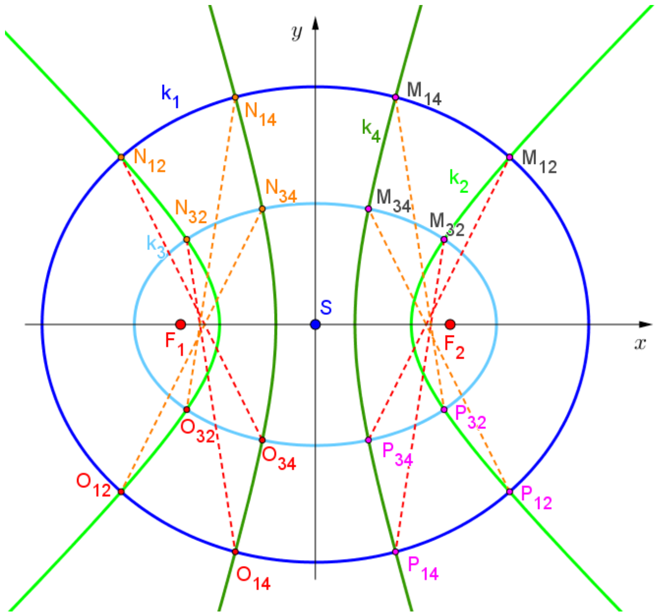


Fig. 3c

Conclusion

We proved the planar version of the famous Ivory's Theorem in Euclidean plane by using the confocal elliptical coordinates. The classical result for curved quadrilateral lying in the 1^{st} quadrant was extended. We derived the formulas for square of the lengths of the diagonals of the fundamental quadrilaterals, too. Application of axial symmetries of the conics allows us to demonstrate that there exist only four different values of the lengths of the diagonals.

References

[1] Izmestiev Ivan, Tabachnikov Serge. Ivory's theorem revisited, *Journal of Integrable Systems*, Volume 2, Issue 1, 1 January 2017, xyx006. Available at: https://academic.oup.com/integrablesystems/article/2/1/xyx006/3939821

[2] Pírko Zdeňek; *O souřadnicích v rovine*. JČMF v Praze, Cesta k vědení, 15. sv., 1942

[3] Izmestiev Ivan. Spherical and hyperbolic conics. Available at: https://arxiv.org/abs/1702.06860.

[4] Weisstein, Eric W. "Confocal Ellipsoidal Coordinates." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/ConfocalEllipsoidalCoordinates.html

AM Nitriensia

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 4, No. 1, p. 24 – 38
ISSN 2453-6083

Niekoľko poznámok o aspektoch vizualizácie v matematickom vzdelávaní

Some Remarks on Aspects of Visualization in Mathematics Education

Jozef Fulier [a*]

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 19 April 2018; received in revised form 9 May 2018; accepted 15 May 2018

Abstract

In this article we discuss the importance of visual thinking development and visual competence of students in mathematics education. We used few examples of graphical form of representation as evidence from history to demonstrate its positive influence on mathematical analysis and mathematics education.

Keywords: mathematics education, visualization, mathematical analysis, history of mathematics

Classification: C30, D30, A30

Úvod

Dnes žijeme v dobe, k názvu ktorej môžeme bez nadsádzky pridať i prívlastok v*izuálna.* Obrazy v televízii, na internete, najmä vo forme reklám či šotov, ale aj v klasických printových médiách (novinách, časopisoch a knihách) majú spravidla dokonalý dizajn, aby nás zaujali vizuálne. Nikdy predtým nebol vplyv vizuálnych obrazov pre manipulovanie a zámerné ovplyvňovanie ľudí tak veľký ako dnes. O sile pôsobenia vizuálnych obrazov, o sile myslenia v obrazoch svedčí aj skutočnosť, že hoci sú niektoré obrazy celkom jednoduché až triviálne, vystihujú a vyjadrujú hlboké a komplexné myšlienky. Preto je iste veľmi dôležité rozvíjať u každého človeka schopnosť *vizuálneho myslenia*.

Väčšina z nás sa narodila s darom vizuálnej inteligencie. Spomeňme si, ako nás v predškolskom veku bavilo maľovať, kresliť či modelovať. Bohužiaľ, pokiaľ túto schopnosť myslieť vizuálne cielene ďalej nerozvíjame, s pribúdajúcim vekom ju postupne strácame, na čom má nemalý podiel aj súčasné vzdelávanie, ktoré kladie akcent viac na slová a čísla. To je iste na škodu veci, pretože vizuálne (obrazovo-názorné) myslenie je účinným nástrojom pre riešenie nielen *praktických manipulatívnych problémov,* ale aj *abstraktných problémov, vrátane problémov matematických*.

V tomto článku nás bude najviac zaujímať problematika *vizualizácie* a *vizuálneho myslenia,* resp. *vizuálno-priestorového myslenia. Arcavi* vymedzil pojem vizualizáciu v práci (*Arcavi*, 2003). nasledovne:

> *„Vizualizácia je schopnosť, proces a produkt tvorenia, interpretácie, používania a reflexie obrazov, predstáv, schém v našich mysliach, na papieri alebo s použitím technologických nástrojov, s cieľom opisovať a komunikovať*

*Corresponding author: jfulier@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2018.4.1.24-38

informácie, myslieť a rozvíjať doposiaľ neznáme myšlienky a nasledujúce pochopenia.“

Podľa Gardnera (*Gardner*, 1999) sú jadrom *vizuálno - priestorovej inteligencie* schopnosti, ktoré zaisťujú presné vnímanie vizuálneho sveta, umožňujú transformovať a modifikovať pôvodné vnemy a vytvárajú z vlastných vizuálnych skúseností myšlienkové predstavy, aj keď už žiadne vonkajšie podnety nepôsobia. Vďaka týmto schopnostiam môžeme konštruovať rôzne tvary alebo s nimi manipulovať. Medzi charakteristické črty priestorovej inteligencie sa zaraďuje presné zrakové vnímanie, kreslenie (grafické znázornenie) a manipulovanie s imaginárnymi objektmi.

Pojem *vizualizácie* spravidla chápeme vo viacerých zmysloch: je to výsledok (produkt), aj samotný proces tvorby vizualizácie a je to tiež i interpretácia existujúcich obrázkov, kresieb a ich reflexia (zrkadlenie) obrazmi v našej mysli, či interpretácia vizuálnych predstáv vytvorených iba našou mysľou samotnou.

Hoci tieto tri polohy (*objekt vizualizácie, introspektívna vizualizácia a interpretácia vizualizácie*) zjednodušujú diskusiu, súčasne vnášajú do diskusie o vizualizácii rôzne hľadiská a neraz celú problematiku dosť komplikujú. *Nákonečný* (2004) upozorňuje, že *vizualizácia* sa môže opierať nielen o predstavy konkrétnych objektov a pohybov, ale aj o predstavované *schémy* a *štruktúrované diagramy*, ktoré reprezentujú *predstavy vzťahov medzi skúmanými objektmi*. *Mentálne operácie s obrazmi* môžu byť doplňované skutočnými manipuláciami a spravidla do konkrétnej manipulácie aj vyúsťujú. Skutočnosť reprezentujú najmä *štrukturálne vzťahy* a *funkčné vzťahy*, pričom oba môžu byť reprezentované *predstavami*: v mysli môžeme mať nielen *obraz* danej situácie a súčasne si môžeme predstaviť, čo sa stane, ak sa v danej situácii niečo zmení.

V uvedenej súvislosti je vhodné poznamenať, že napriek tomu, že existujú aj nenázorné spôsoby myslenia, transformácia abstraktného na názorné pomáha pochopiť abstraktné. *Vizualizácia* patrí k základným kognitívnym stratégiám v tvorivosti, objavovaní, vynaliezavosti a schopnosti riešiť problémy. Z ľudskej schopnosti vidieť (predstaviť si) veci a javy vyplýva aj schopnosť induktívne myslieť. Obrazy sú pre *tvorivé myslenie* podstatné, pretože veľká časť našej inšpirácie sa deje v obrazoch.

Význam vizualizácie potvrdzuje zistenie, že najväčšia časť mozgovej kôry je zameraná práve na *videnie* a *vizuálnu analýzu*. Koniec-koncov dokumentujú to i všeobecne známe príslovia: *„Lepšie raz vidieť, ako tisíckrát počuť.“,. „Jeden obraz povie viac ako tisíc slov.“ a pod.* Mnohé z našich myšlienok sú transformované do obrazov a pravdepodobne sú aj takto zakódované. Napríklad, keď si spomíname na dej románu, ktorý sme čítali v minulosti, zápletku deja si vybavujeme spravidla skôr ako sled obrazov, než ako reťazec slov použitých autorom.

Má vizualizácia význam aj pre vysoko abstraktné a exaktné vedy, medzi ktoré patrí v prvom rade matematika?

Je vhodné si uvedomiť, že vizualizácia a vizuálne myslenie ďaleko prekračuje rámec fyziologického zraku človeka. Krásnym, i keď smutným príkladom, je osud *Leonharda Eulera* (1707 - 1783), jedného z najväčších matematikov v histórii ľudstva. *L. Euler* najprv oslepol na jedno oko a neskoršie úplne. Napriek tomuto hendikepu dokázal vytvoriť celý rad vynikajúcich a rozsiahlych diel. Novším prípadom bol osud ruského matematika *L. S. Pontriagina* (1908 - 1988), ktorý oslepol už v štrnástich rokoch pri výbuchu petrolejového variča. Avšak, stal sa vynikajúcim matematikom. Predovšetkým vďaka pomoci jeho matky, ktorá mu čítala matematické články. Je teda viac ako zrejmé, že vytvoriť také úžasné diela, aké nám zanechali len títo dvaja matematici, je s absenciou pokročilých vizualizácií a rozvinutého vizuálneho myslenia určite nemožné. Hoci už z týchto príkladov sa dá odpoveď na položenú otázku tušiť, nechajme ešte prehovoriť niekoľkých význačných matematikov, resp. teoretických fyzikov, ktorí sa k tejto problematike vyjadrili.

Podľa francúzskeho matematika *Jacquesa Hadamarda* (1863 - 1965) vizuálne myslenie je veľmi dôležitou súčasťou myslenia matematikov. Vo svojej knihe (*Hadamard, 1945)* cituje list od *Alberta Einsteina* (1879-1955), v ktorom *Einstein* píše, že *podstatou jeho myslenia sú obrazy*. *Einstein* sa v uvedenom liste vyjadruje takto:

> *„Slová prirodzeného jazyka, v písanej či hovorenej forme, ako sa zdá, nehrajú žiadnu rolu v mechanizme môjho myslenia. Psychické entity, ktoré sú podľa všetkého prvkami myslenia, sú isté znaky a viac-menej jasné obrazy, ktoré môžu byť ľubovoľne reprodukované a kombinované. Je tu samozrejme aj isté spojenie medzi tými prvkami a relevantnými matematickými pojmami. Je tiež jasné, že želanie dosiahnuť nakoniec logicky spojené pojmy je emocionálna báza tejto trochu nejasnej hry so spomenutými prvkami. Vyššie zmienené prvky sú v mojom prípade vizuálneho a niekedy muskulárneho typu. Ak zoberieme túto kombinatórnu hru z psychologického hľadiska, zdá sa, že je základnou vlastnosťou produktívneho myslenia... Konvenčné slová či iné znaky musia byť prácne vyhľadávané až v druhej fáze, až keď zmienená asociačná hra je ukončená a dostatočne upevnená, ktorú potom môžeme ľubovoľne reprodukovať.“*

Poznamenajme tiež, že silu a dôležitosť vizualizácie dokazujú už formulácie, resp. zadania rozličných hlavolamov a problémov s reálnym kontextom, ktoré spravidla obsahujú *obrazy, vizualizáciu problémovej situácie,* ako prirodzené a určite veľmi dôležité prostriedky pre hľadanie ich riešení. Dobrým príkladom je napríklad úloha *„riešiť labyrint*“. Jeho slovný opis môže byť totiž tak ťažkopádny, že potencionálny riešiteľ problému by mal veľké problémy situácii vôbec porozumieť, nieto ešte uvažovať o jeho riešení. Inak povedané, v mnohých prípadoch je *obrazotvornosť* (schopnosť predstavovať si veci a deje vo forme vizuálnych predstáv a myšlienok) oveľa výhodnejšia a efektívnejšia ako *verbálne uvažovanie*.

Hoci z teoretického hľadiska sú *lingvistika* a *obrazotvornosť* rovnako produktívne, v praxi jednoznačne vyhráva *obrazotvornosť*. Pravdepodobne je to spôsobené tým, že k hlavným výhodám obrazotvornosti vo vzťahu k lingvistike sa dajú identifikovať minimálne tri zjavné atribúty: *paralelizmus, rýchlosť* a *mnohorozmernosť*.

Paralelizmus tkvie v tom, že lingvistické deje sa totiž spravidla odohrávajú *v časovej následnosti*, na rozdiel od obrazu - napríklad pri sledovaní filmu, kde naraz vnímame gestá či pohyby, resp. interakciu dvoch, troch či viacerých osôb. Tento atribút je prirodzene hmatateľný aj pri *vizuálnom vnímaní* štruktúrovaného matematického diagramu, či grafu funkčnej závislosti nejakej veličiny od iných veličín, ktoré nám spravidla odhalí aj ďalšie, dovtedy skryté súvislosti. *Rýchlosť* súvisí s tým, že obraz znázorňujúci isté matematické vzťahy a súvislosti pochopíme oveľa rýchlejšie a komplexnejšie ako pri lingvistickom uvažovaní - často *jedným pohľadom*. *Mnohorozmernosť* súvisí s tým, že vizuálna obrazotvornosť je médiom, ktorá nám umožňuje videnie v dvojrozmernom či v trojrozmernom priestore, čím myšlienke poskytuje nové dimenzie, nový „priestor".

Problematika vizualizácie (názornosti) v matematickom bádaní je považovaná za jednu z najdôležitejších v rozvoji matematického myslenia. Významný nemecký matematik *David Hilbert* (1862-1943) (*Hilbert - Vossena*, 1932) sa o problematike názornosti v matematike, špeciálne v geometrii, ktorú je možné považovať za základný zdroj názorných predstáv matematických pojmov i teórií - vyjadril nasledovne:

> *„V matematike sa stretávame, podobne ako v iných oblastiach bádania, s dvoma tendenciami: s tendenciou k abstrakcii a s tendenciou k názornosti. Tendenciou k abstrakcii sa snažíme na základe logiky oboru jednotlivé disciplíny systematicky usporiadať. Názornosť vychádza skôr zo živého nazerania a ich obsahových vzťahov. V geometrii viedli abstraktné princípy k veľkolepým systematickým stavbám, akými sú napr. algebrická a Riemannova geometria a topológia. V nich sa podarilo široko aplikovať abstraktné uvažovanie, symboliku a kalkuly. Napriek tomu však názornosť zohráva dodnes významnú úlohu v geometrii, a to nielen ako podnecujúca sila v bádaní, ale aj z hľadiska chápania a posudzovania výsledkov vedeckého bádania."*

Všeobecné poznámky k významu vizualizácie pre vyučovanie školskej matematiky

Za dôležitý míľnik v pestovaní vizuálnej kultúry je možné považovať dielo významného českého pedagóga J*. A. Komenského* (1592 – 1670) s názvom *Orbis Pictus*, ktoré prvýkrát vyšlo v roku 1658. Zdalo by sa, že o dôležitosti názornosti a význame rozvoja vizuálneho myslenia pre vedu i pre samotné vyučovanie a učenie sa matematike dnes už nikto nepochybuje. Nie je to však celkom tak. Napriek veľkému množstvu prác (či práve preto), ktoré sa zaoberajú vizualizáciou vo vede a vo vzdelávaní, vrátane matematiky, vznikla vo vede o vzdelávaní zaujímavá situácia. Kým vo všeobecnosti vedecká komunita zaoberajúca sa vzdelávaním priznáva užitočnosť a účinnosť vizualizácie vo vzdelávaní, vedecká komunita pre matematické vzdelávanie sa k tomuto problému stavia pomerne vlažne.

Konkrétne, dvojica *G. Hanna* a *N. Sidoli* v práci (*Hanna. – Sidoli*, 2007) rozdeľuje súčasných matematikov a didaktikov matematiky - podľa ich názorov na postavenie vizualizáciu v matematike a jej vzdelávaní - do troch základných skupín.
Prvá skupina akceptuje vizualizáciu ako doplnok dôkazu, druhá považuje vizualizáciu za základnú a dôležitú (nie však postačujúcu) časť dôkazu a tretia skupina matematikov tvrdí, že vizuálnu reprezentáciu je možné akceptovať ako dôkaz matematického tvrdenia. Uvedení autori sa prikláňajú k názoru, že väčšina súčasných matematikov je presvedčená o tom, že vizuálne obrazy a vizuálne reprezentácie zohrávajú síce dôležitú, ale predsa len obmedzenú úlohu v dôkazoch.

Na druhej strane *B. Casselman* (2000) tvrdí, že

> *„...napriek odporcom...obrázky – dokonca aj keď sú iba v psychike človeka – často hrajú kľúčovú rolu v logických dôkazoch“* a môžu *„v sebe niesť informácie, niekedy celé dôkazy.“*

J. Borwein a *L. Jörgenson* si tiež kladú otázku, či môže obrázok slúžiť ako forma *„vizuálneho dôkazu“*. Aj keď ich odpoveď je kladná, trvajú na tom, že takýto *„vizuálny dôkaz“* by mal spĺňať minimálne tri základné podmienky (ktoré však nepovažujú za úplné):

- *spoľahlivosť* – prostriedky vedúce k dôkazu majú byť spoľahlivé;
- *zhoda* – prostriedky a výsledok dôkazu musia byť v zhode s ostatnými známymi faktami a dôkazmi;
- *opakovateľnosť* – dôkaz by mal byť jednoducho znovu demonštrovateľný inému pozorovateľovi.

Títo dvaja matematici pripisujú vizuálnemu dôvodeniu a argumentácii v matematike veľkú dôležitosť. Dokonca tvrdia, že niektoré *vizuálne reprezentácie* je možné považovať za úplný dôkaz daného tvrdenia.
Na druhej strane (čo je pravdepodobne spôsobené, už vyššie uvedeným, vlažným až odmietavým postojom nemalej skupiny „ortodoxných“ matematikov k vizualizácii), nie je možno celkom prekvapujúce. Ide o to, že vizuálne metódy riešenia problémov, vrátane osvetľovania matematickej argumentácie prostredníctvom *geometrickej analógie* sú, napriek svojej vysokej účinnosti, pomerne zriedkavé v učebniciach matematiky. Potvrdzuje to i výrok súčasného matematika a významného didaktika matematiky *Iana Stewarta:*

> *„Obrazy prenášajú omnoho viac informácií než slová. Mnoho rokov sme odvykali žiakov používať obrázky, pretože „nie sú presné“. To je smutné nedorozumenie. Áno, obrázky nie sú presné, ale pomáhajú myslieť, a takouto pomocou by sme nemali opovrhovať.“*

Vizualizácia je prirodzeným a veľmi dôležitým prvkom matematického myslenia, ktorá hrá veľkú úlohu pri objavovaní vzťahov a súvislostí medzi matematickými objektmi v prenose a komunikácii v matematike. Pekne to vystihol aj významný český matematik *P. Vopěnka* (1935 - 2015):

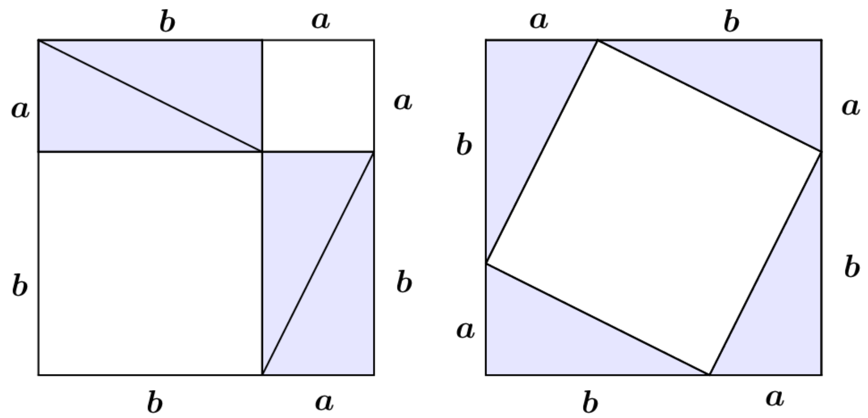
> *„Neuznávání obrázků a náčrtků za plnohodnotný způsob sdělování matematických poznatků, to je důsledné trvání na úplných slovních popisech sdělovaných poznatků, výrazně umrtvuje dynamiku matematického poznávání.“* (*Vopěnka*, 2004)

Spomeňme tiež, že aj známy popularizátor matematiky *Martin Gardner* (1914 – 2010) zdôrazňoval, že strohý a pre niekoho i „nudný“ dôkaz matematickej vety môže byť často doplnený jednoduchými a krásnymi geometrickými analógiami, z ktorých je pravdivosť vety zrejmá hneď na prvý pohľad (*Gardner*, 1973).

O tom, že je to naozaj možné, presvedčuje väčšinu z nás aj kniha *„Proofs without word: Excercises i Visual Thinkings“ od R. Nelsona* (*Nelson,* 1993), kde je možné nájsť veľa podnetných vizualizácií, z ktorých pravdivosť daného tvrdenia (najčastejšie v tvare rovnosti či nerovnosti) je úplne zrejmá. Tieto obrázky (vrátane nevyhnutného minima vzťahov a súvislosti vo forme symbolických zápisov pre lepšie pochopenie, príp. slovné pomenovania tam vystupujúcich objektov) poskytujú, aj podľa nášho názoru, vizuálne potvrdenie skúmaného tvrdenia, ktoré je možné považovať aj za jeho matematický dôkaz.

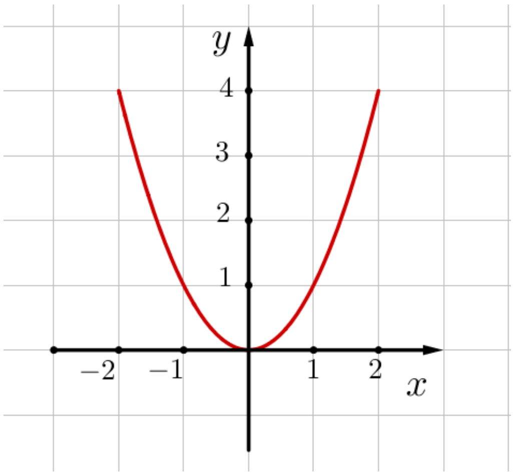
Zdá sa, že situácia je oveľa jednoduchšia, ak sa obmedzíme na vyučovanie *geometrie* na základných a stredných, či dokonca aj na vysokých školách. *Vizualizácia* je prirodzeným a veľmi dôležitým prvkom matematického myslenia v geometrii, ktorá hrá veľkú úlohu pri objavovaní vzťahov a súvislostí medzi matematickými objektmi v prenose a komunikácii v matematike. Na začiatku poznávacieho procesu je priame zmyslové poznanie skutočnosti (zmyslová skúsenosť), potom sa tvoria predstavy, a až potom pojmy. Zmyslová skúsenosť je základom a tvorí prameň poznávania skutočnosti. Pre priblíženie uveďme *zdôvodnenie platnosti* („*dôkaz*“) *Pytagorovej vety*, ktoré je reprezentované dvojicou zhodných štvorcov (pozri obr. 1). V tomto prípade totiž *nemusíme nič počítať*. Stačí si iba uvedomiť, že obsahy vyšrafovaných častí (pozostávajúce zo štyroch zhodných trojuholníkov) oboch štvorcov (majúcich rovnaký obsah) sa rovnajú, preto sa prirodzene rovnajú aj obsahy nevyšrafovaných častí oboch štvorcov, čo však znamená, že platí $a^2 + b^2 = c^2$. Samozrejme, že môžu vzniknúť pochybnosti, či toto je možné naozaj považovať za korektný dôkaz *Pytagorovej vety*.

Treba si však uvedomiť, že v geometrii existuje veľmi dlhá tradícia používania diagramov pri jej vyučovaní, preto po odstránení (doplnení) určite nie celkom triviálnych námietok, je možné uvedený diagram za školský dôkaz tejto vety uznať. Na druhej strane je zrejmé, že „*vidieť*“ v uvedenej dvojici diagramov dôkaz nejakého matematického tvrdenia, nie je možné bez predchádzajúcej skúsenosti. Umeniu *vidieť v danej vizualizácii* identifikovať na obrázku, resp. v mentálnej predstave, istú matematickú štruktúru, resp. objaviť a vidieť určité vzájomné súvislosti a relačné vzťahy medzi nejakými kvantitami, ktoré sú prítomné v danej vizualizácii, sa musíme *tiež naučiť*.

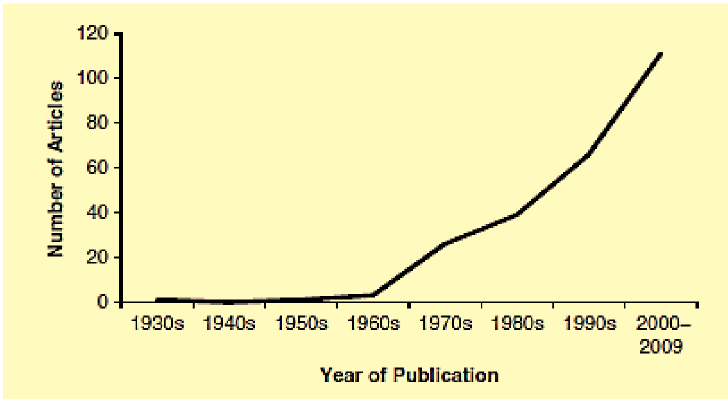


Obrázok 1. Dôkaz *Pytagorovej vety*

Z hľadiska akceptácie vizualizácie ako podporného prostriedku pre zdôvodňovanie záverov je o čosi zložitejšia situácia v ostatných matematických disciplínach, napríklad v matematickej analýze a algebre. V elementárnej matematickej analýze k základným objektom vizualizácie patrí *graf funkcie.* Pripomeňme si, že zavedenie a skúmanie funkčnej závislosti ako matematického objektu spolu s jeho grafickým znázornením patrí k významným, ale neskorším míľnikom vývoja matematiky. Hoci prvé začiatky znázornenia grafu funkčnej závislosti nachádzame už v dielach *N. Oresmeho* (1323 - 1382) a *R. Descartesa* (1596 -1650), zakladateľa analytickej geometrie, k úplnému rozvinutiu učeniu o funkciách dochádza až v 18. a 19. storočí v dielach *I. Newtona* (1643 – 1727), *G. W. Leibniza* (1646 – 1716), *L. Eulera* (1707 – 1783), *A. Cauchyho* (1789 – 1857) a *K. Weierstrassa* (1815 -1897). Poznamenajme, že kreslenie a interpretáciu grafov funkcie je jedno najbežnejších využití vizualizácie v školskej matematike. Jednoduchý rovinný graf je geometrickou reprezentácia vzťahu medzi dvoma premennými.



Obrázok 2. Graf funkcie $f: y = x^2$



Obrázok 3. Počty publikovaných článkoch o vizualizácii v období 1930-2009 (zdroj:Philips-Norris-Macnab, 2010)

Na obr. 2 je znázornená časť grafu funkcie $f: y = x^2, x \in \mathbb{R}$, ktorou sa zaoberal už *Galileo Galilei* pri štúdiu voľného pádu telesa. Od študentov stredných škôl sa očakáva, že pochopia že funkcia f zadaná rovnicou $y = x^2$ a graf tejto funkcie $G(f) = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$ kódujú tie isté matematické informácie. Teda jej symbolická reprezentácia v tvare formuly a aj jej grafická reprezentácia predstavujú dve stránky toho istého objektu.

Táto *dualita pojmu funkcia* stavia pred tvorcov učebných osnov a autorov učebníc dôležitú otázku. Čo bude pri štúdiu funkcií na strednej škole východiskovým pojmom? Bude to funkčný predpis $f: y = f(x)$ a jej graf bude len pomôckou pre štúdium jej vlastností, alebo prioritným pojmom bude graf funkcie a funkčný vzťah bude iba doplnkom pre štúdium vlastností príslušnej funkcie?

Vzhľadom na to, že v súčasnosti je možné prostredníctvom dostupných počítačových softvérov bez problémov vytvárať vizualizácie matematických objektov, teda aj grafy funkcií, zdá sa, že sa postupne presadzuje skôr druhá alternatíva. Samozrejme, že príklon k tejto alternatíve je úplne jednoznačný pri funkčných závislostiach získaných z empirických či štatistických údajov, ktoré boli odpozorované v reálnej praxe, príp. boli získané v laboratórnych podmienkach alebo zberom a spracovaním štatistických údajov. V tomto prípade analytické vyjadrenie v tvare rovnice príslušnej funkčnej závislosti spravidla absentuje (ak neberieme do úvahy možné približné aproximácie takýchto funkcií) a je k dispozícií iba jej grafická reprezentácia.

Na obr. 3 je znázornený graf takejto konkrétnej funkčnej závislosti, ktorý vyjadruje počty publikovaných článkoch o vizualizácii v závislosti od času pre obdobie rokov 1930 až 2009. Pri prvom priblížení sa zdá, že cieľom vizualizácie je poskytnúť *reálne zobrazenia sveta*. Bližší pohľad na tento problém však poodhaľuje, že zámerom a ani úlohou vizualizácie vôbec nie je *realistické zobrazenie* nejakej situácie, či konfigurácie. V skutočnosti vizualizácie správne fungujú práve preto, že sú v našej mysli podrobené procesu *idealizáci*e a *abstrakcie,* ktoré v nemálo prípadoch umožňujú s minimom vynaloženej energie získavať maximum kľúčových informácií o skúmanom objekte alebo jave. Už na takom jednoduchom objekte, akým je graf na obr. 3, je možné demonštrovať jednu z charakteristických vlastností vizualizácie, o ktorej hovorí *Arcavi*: *„Vizualizácia zviditeľňuje neviditeľné."*

Totiž graf tejto funkcie, ktorý je vizuálnou reprezentáciou uvedenej závislosti, prináša nielen súbor štatistických údajov o počte publikovaných článkoch v danom časovom období (tie by bolo možné reprodukovať aj slovne), ale už *jediný pohľad,* resp. niekoľko málo opakovaných pohľadov na tento graf, nám prináša *celý príbeh* o publikovaní článkov (o vizualizácii) v uvedenom období. Súčasťou tohto príbehu sú, okrem jednoduchých kvantitatívnych charakteristík uvedeného procesu, aj jeho *kvalitatívne stránky.* Napríklad, v ktorých rokoch počet článkov najrýchlejšie rástol, v ktorých rokoch bol rast iba pozvoľný, prípadne stagnoval a pod.

Naviac, z *aspektu vzdelávania* je nemalou výhodou aj to, že organické prepojenie vizuálnej reprezentáciou uvedenej závislosti s dôležitými kvantitatívnymi s kvalitatívnymi stránkami daného javu, umožňuje ľahšie a spravidla i trvácnejšie uloženie kľúčových informácií o tejto závislosti do dlhodobej pamäti vzdelávaných subjektov (žiakov).

Niekoľko poznámok k významu vizualizácie pre vyučovanie matematickej analýzy v učiteľskom štúdiu

V tomto druhu vysokoškolského štúdia sa za najdôležitejšie považuje, aby študenti dostatočne hlboko pochopili *kľúčové koncepty* základných pojmov matematickej analýzy: *funkcia, limita funkcie, spojitosť funkcie v bode a množine, derivácia funkcie, neurčitý a určitý integrál.* Preto je veľká pozornosť venovaná *genéze vzniku* týchto pojmov a určovaniu (niekedy hovoríme o dôkaze) vyššie spomínaných charakteristík danej funkcie na základe definícií týchto charakteristík (*Heineho*, resp. *Cauchyho* definícia limity funkcie v bode, definície spojitosti a derivácie funkcie v danom bode či na množine a pod.). Veľmi dôležitou častou tejto fázy vyučovania základov matematickej analýzy sú pôsobivé a účinné geometrické interpretácie uvedených kľúčových pojmov. Tieto geometrické reprezentácie základných pojmov sú spravidla dopĺňané geometrickými interpretáciami dôležitých tvrdení diferenciálneho počtu (viet o *strednej hodnote* funkcie: vety *Rolleovej*, *Lagrangeovej* či *Cauchyho*; *Taylorovej vety*, vety o vzťahu znamienka prvej derivácie (resp. druhej derivácie) funkcie a jej monotónnosti (resp. jej konvexnosti či konkávnosti)), ale aj geometrickými interpretáciami základných viet integrálneho počtu, ktoré sú spravidla doplnené o pôsobivé vizualizácie jednotlivých aplikácií integrálneho počtu.

Ak sa na problematiku vizualizácie bližšie pozrieme prostredníctvom príslušných *učebníc* štandardných matematických disciplín v učiteľskom štúdiu matematiky, tak z hľadiska frekvencie výskytu vizuálnych reprezentácií, obrázkov, diagramov a grafov funkcií v týchto učebniciach je možné zistiť prekvapivý jav: zo všetkých klasických matematických disciplín (geometria, algebra, matematická analýza, matematická štatistika atď.) obsahujú učebnice matematickej analýzy najviac rôznorodých vizuálnych reprezentácií (možno okrem niekoľkých učebníc geometrie).

Pravdepodobne to súvisí s tým, že v počiatočných fázach štúdia na univerzite najväčšie problémy študentom spôsobuje štúdium elementárnej matematickej analýzy. Väčšinou totiž ide o vizualizácie (ako sme už konštatovali vyššie), ktoré uľahčujú pochopenie pojmov a obsahu tvrdení jednotlivých tvrdení matematickej analýzy. Z tohto hľadiska je možné považovať tieto geometrické interpretácie za veľmi významné. Táto skutočnosť je o to zaujímavejšia, že väčšina učiteľov matematickej analýzy patrí k tej skupine matematikov, ktorí neuznávajú *vizuálny dôkaz* a požadujú *dôkaz analytický*.

V súčasnosti sa vo vyučovaní matematickej analýzy nemusíme obmedzovať iba na statické obrázky, ktorými sú ilustrované pojmy a dôležité tvrdenia tejto matematickej disciplíny v učebniciach. Dnes sú dostupné v triedach a prednáškových miestnostiach rôznorodé *informačné a komunikačné technológie:* počítače, tablety, vybavené interaktívne bohatým edukačným softvérom, ku ktorým patria programy dynamickej geometrie (napríklad GeoGebra), ako aj komplexné počítačové systémy typu CAS (napríklad *Mathematica, MathLab, Maple* a pod).

Informačné technológie umožňujú vytvoriť primeraný a dostatočne presvedčivý vizuálny obraz matematickej situácie na monitore počítača a to nielen vo forme statického obrázku daného javu, ale aj vo forme *dynamickej simulácie* (napríklad, využitím *Java apletov*). Tieto nám do príslušnej vizuálnej prezentácie vnášajú *pohyb a dynamiku* procesov spojených s danou matematickou situáciou, ktoré proces pochopenia i samotný proces osvojovania nových poznatkov posúva kvalitatívne na oveľa vyššiu úroveň.

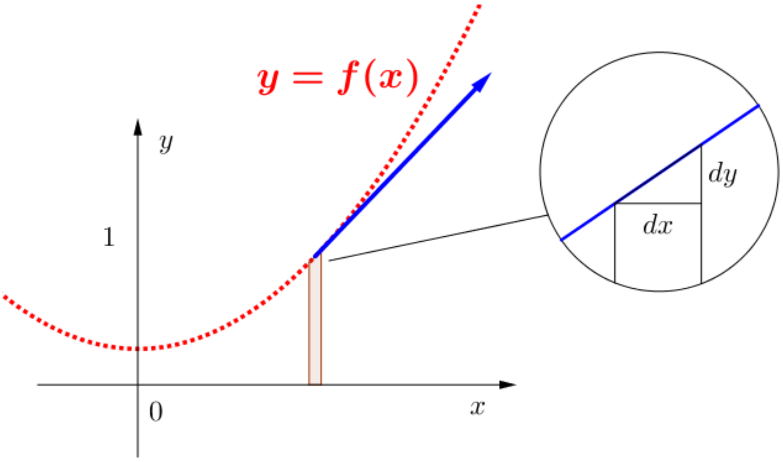
Na druhej strane treba priznať, že medzi vizuálnymi reprezentáciami, s ktorými sa bežne oboznamujú študenti pri vyučovaní matematickej analýzy, je pomerne veľa aj takých, ktoré zdanlivo do matematickej analýzy nepatria. Napríklad geometrická interpretácia *A-G nerovnosti, t.j.* vzťahu medzi aritmetickým a geometrickým priemerom*;* či aritmetické vzťahy potrebné pri výpočtoch *Riemannovho integrálu* pomocou integrálnych súčtov konkrétnych funkcií. Ide o rôzne vzťahy (dokazované matematickou indukciou), akými sú

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \qquad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=[1+2+\cdots+n]^2.$$

K tradičným a nemenej dôležitým *grafickým formám reprezentácie* v matematike zaraďujeme aj *symboliku* diferenciálneho a integrálneho počtu. V základných rysoch ju zaviedli jeho zakladatelia - *G. W. Leibniz* (1646 – 1716), *I. Newton* (1643 - 1727), a ktorú do dnešnej podoby vyprofilovali ich nasledovníci (*Euler, Lagrange, Cauchy, Wieerstrass* a ďalší).

V spomínaných začiatkoch infinitezimálneho počtu bol v tvorbe matematickej symboliky úspešný najmä *G. W. Leibniz.* Podľa *Leibniza* by *matematická symbolika* mala odrážať vnútornú podstatu označovaných objektov, čím môže napomáhať k objavovaniu súvislostí medzi uvedenými objektmi. To, že tieto požiadavky *Leibniz* splnil, môžeme ilustrovať vizualizáciou tzv. *charakteristického trojuholníka* (pozri obr. 4), ktorý určuje vzťah

medzi *diferenciálmi* $dx, dy, ds.$ Pomocou nich bolo možné zaviesť aj súčasný pojem *derivácie funkcie* ako podiel diferenciálov $\mathrm{d}y, \mathrm{d}x$, t.j. $f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
Určite stojí za zmienku, že táto symbolika umožňuje anticipovať platnosť významných viet diferenciálneho počtu: napríklad *vety o derivácii zloženej funkcie, vety o derivácii inverznej funkcie a vety o derivácii funkcie zadanej parametrickými rovnicami*, ktoré pri splnení istých podmienok môžeme zapísať rovnosťami, ktoré pripomínajú štandardné pravidlá pre počítanie s klasickými zlomkami: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$.



Obrázok 4. Idea *charakteristického trojuholníka* zloženého z *diferenciálov dx, dy, ds*

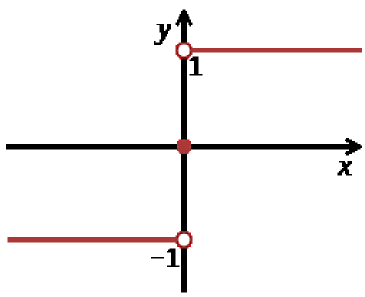
Realistické znázornenie versus nerealistické znázornenie objektu

Budúci učitelia matematiky pri konštrukcii hlbších poznatkov z matematickej analýzy vo svojich mysliach by sa určite mali naučiť konštruovať funkcie s vopred zadanými vlastnosťami. V matematickej analýze sa v prevažnej miere pracujeme najmä s funkciami *elementárnymi*, čo je iste celkom prirodzené, keďže táto trieda funkcií je postačujúca pre väčšinu bežných úloh a aplikácií.

Avšak už študenti prvého ročníka učiteľského štúdia sa stretnú aj s funkciami, ktoré *nie sú elementárne*. Jednou z nich je funkcia *signum*, ktorú zaviedol nemecký matematik *L. Kronecker* (1823 – 1891). Ide o funkciu, ktorú je možné bez problémov zaviesť už na strednej škole.

Dôvod je zrejmý – jej definícia i graf funkcie $y = sgn\, x$ sú pomerne jednoduché:

$$y = sgn\, x = \begin{cases} 1, & ak\ x > 0, \\ 0, & ak\ x = 0, \\ -1, & ak\ x < 0. \end{cases}$$



Obrázok 5 Graf funkcie funkcie $y = sgn\, x$

Táto funkcia *nie je elementárnou funkciou*, pretože je definovaná v bode (konkrétne v bode $x = 0$), v ktorom nie je spojitá. Žiadna elementárna funkcia takúto vlastnosť nemá, každá z nich je totiž spojitá vo svojom definičnom obore. Poznamenajme, že druhou *nie elementárnou* funkciou, s ktorou sa (ešte v nedávnej minulosti) mohli žiaci strednej školy „stretnúť" je tzv. *celá časť čísla* x, označovaná symbolom $[x]$.

Študenti učiteľského štúdia sa v úvodnom kurze matematickej analýzy sú oboznámení s ďalšou nie elementárnou funkciou, *funkciou* χ, ktorú v roku 1828 prvýkrát uverejnil nemecký matematik a významný priekopník rozvoja všeobecného pojmu funkcia *Peter L. Dirichlet* (1805-1859). Táto funkcia (neskoršie nazvaná na jeho počesť *Dirichletovou funkciou*) je definovaná nasledovne:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & ak\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ak\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

kde symbol $\mathbb{Q}$ označuje množinu všetkých racionálnych čísel a množinový rozdiel $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ označuje množinu všetkých iracionálnych čísel.

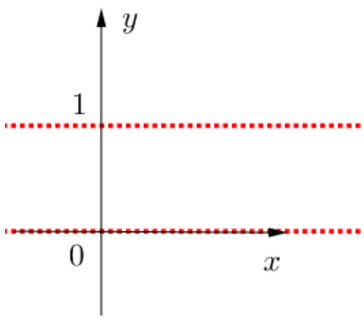
Poznamenajme, že neskoršie sa ukázalo, že *Dirichletovu funkciu* je možné vyjadriť analyticky jedinou rovnicou $\chi(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} cos^{2k}(n!\,\pi x)$.

Dirichletova funkcia χ má významné postavenie v matematickej analýze, pretože má celý rad *neštandardných vlastností.* Jej *neštandardnosť* spočíva v tom, že je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$, avšak nemá v žiadnom bode limitu, *v žiadnom bode nie je spojitá, nie je diferencovateľná, na žiadnom intervale nie je monotónna, nie je riemannovsky a ani newtonovsky integrovateľná na žiadnom podintervale množiny* $\mathbb{R}$, a teda neexistuje ani jej *Fourierov rad.* Z tohto dôvodu ju v začiatkoch *nepovažoval za funkciu* ani samotný *Dirichlet* (až neskoršie sa dokázalo, že táto funkcia je tiež integrovateľná, prirodzene vo všeobecnejšom zmysle*).

Práve vyššie uvedené neštandardné vlastnosti umožňujú využívať *Dirichletovu funkciu* v úlohe radu *protipríkladov* v matematickej analýze. Samozrejme, že táto funkcia má aj niekoľko *štandardných vlastností*: je *ohraničená a* v ľubovoľnom podintervale svojho definičného oboru nadobúda *svoje maximum* a *minimum*.

Z aspektu vizualizácie, ktorej sa v tejto práci venujeme je pre nás dôležité, že *graf tejto funkcie nedokážeme znázorniť*! Realistický graf tejto funkcie (vygenerovaný vhodným počítačovým kresličom grafov funkcií) totiž zdanlivo pozostáva z dvoch priamok: $y = 0, y = 1$, v ktorých sú však *komplementárne „diery"*. Tie však určite *nie je možné vidieť*.

* Existuje napr. *Lebesgueov*, príp. *Kurzweilov integrál* Dirichletovej funkcie na ľubovoľnom uzavretom intervale.



Obrázok 6. Schematické znázornenie grafu Dirichletovej funkcie χ

Dôvodom je jedna zo kľúčových vlastností množiny všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$: *medzi každými dvomi reálnymi číslami je aspoň jedno racionálne číslo a aspoň jedno iracionálne číslo*. Z toho dôvodu nepoužijeme *realistické zobrazenie vizualizácie*, ale použijeme iba istú formu *schematického znázornenia*, ktorá je určite veľmi nepresná a iba približne (skôr ideovo, v myšlienkovej idealizácii) zodpovedá grafu *Dirichletovej funkcie*.

Napriek tomu - rešpektovaním informácie o doplnkových dierach v uvedených priamkach - môžeme s využitím *abstrakcie* a *idealizácie* - *schematicky znázorniť graf* tejto funkcie (pozri obr. 6). Definícia *Dirichletovej funkcie* nám ponúka niekoľko možných zovšeobecnení, ktoré budeme pracovne nazývať *„funkciami dirichletovského typu"*.
Zvoľme dve funkcie $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a definujme dve funkcie F, H takto:

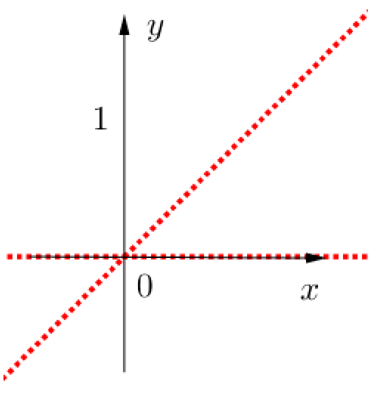
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & ak\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ak\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} f(x), & ak\ x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & ak\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

Ľahko nahliadneme, že funkcie F, H môžeme pomocou *Dirichletovej funkcie* χ zapísať jedinou rovnicou nasledovne:

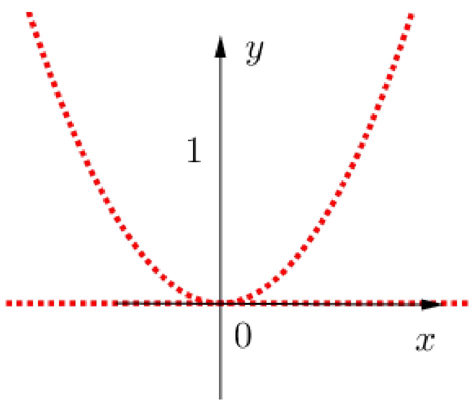
$$F: F(x) = f(x) \cdot \chi(x), \qquad H: H(x) = g(x) + \chi(x)[f(x) - g(x)].$$

Vhodnom voľbou funkcie f, resp. funkcií f a g, môžeme dostať funkcie so skutočne pozoruhodnými (neštandardnými) vlastnosťami. Napríklad:

a) Funkcia F_1: $F_1(x) = x\chi(x), x \in \mathbb{R}$ (resp. funkcia F_2: $F_2(x) = x^2\chi(x)$, $x \in \mathbb{R}$) je definovaná na $\mathbb{R}$, ale iba v jedinom bode (v bode $x = 0$) má limitu a je spojitá (resp.je diferencovateľná) iba v tomto jedinom bode.



Obrázok 7. Schematické znázornenie grafu funkcie $F_1: y = x\chi(x)$



Obrázok 8. Schematické znázornenie grafu funkcie $F_2: y = x^2\chi(x)$

b) Nech pričom $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú dané, navzájom rôzne reálne čísla. Potom funkcia F_3: $F_3(x) = P_n(x).\chi(x), x \in \mathbb{R}$ (resp. funkcia F_4: $F_4(x) = P_n{}^{k+1}(x).\chi(x), k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$), kde $P_n(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$, je príkladom funkcie, ktorá je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$, ale je *spojitá* (resp. *k-krát diferencovateľná*) iba v bodoch $a_1, a_2, \dots, a_n$.

c) Funkcia F_5: $F_5(x) = e^{-x}.\chi(x), x \in \mathbb{R}$ (resp. funkcia F_6: $F_6(x) = e^{-x^2}.\chi(x), x \in \mathbb{R}$ je príkladom funkcie, ktorá má limitu iba v bode ∞ (resp. iba v bodoch - ∞, ∞).

d) Funkcia H_1: $H_1(x) = 1 + [\cos(2\pi x) - 1].\chi(x), x \in \mathbb{R}$ je definovaná na celej množine $\mathbb{R}$, ale má limitu, je spojitá a diferencovateľná iba v bodoch *množiny všetkých celých čísel* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

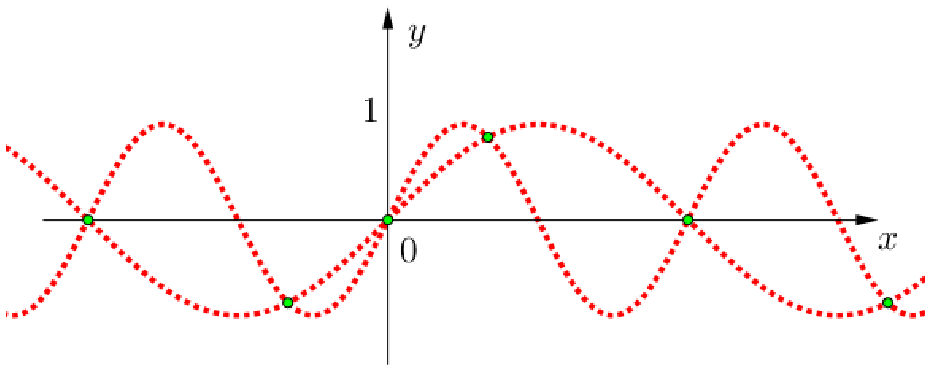
Nech $H: H(x) = g(x) + \chi(x)[f(x) - g(x)]$. Potom bezprostredným využitím našej nerealistickej vizualizácie ľahko nahliadneme, že platí:

1. Ak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$, potom aj $\lim\limits_{x \to x_0} H(x) = b$.
2. Analogické tvrdenie platia aj pre jednostranné limity.
3. Nech funkcie f, g sú spojité v bode x_0. Ak naviac $f(x_0) = g(x_0)$, potom funkcia H je spojitá v bode x_0. Ak $f(x_0) \neq g(x_0)$, potom funkcia H nie je spojitá v bode x_0.
4. Ak funkcie f, g majú derivácie $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ v bode x_0, a ak naviac $f'(x_0) = g'(x_0) = A$, potom existuje aj derivácia $H'(x_0)$ a platí $H'(x_0) = A$. Vtedy zrejme tiež musí platiť $f(x_0) = g(x_0)$.

Príklad 1. Určte všetky body, v ktorých je funkcia

H_2: $H_2(x) = \sin 2x + [\sin x - \sin 2x].\chi(x), x \in \mathbb{R}$ spojitá a diferencovateľná.

Riešenie. Využitím grafov funkcií $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ získame schematický graf funkcie $y = H_2(x)$. Riešením rovnice $\sin x = sin2x$ určíme priesečníky grafov týchto funkcií. Využitím predchádzajúcich tvrdení o funkcii H ľahko dokážeme, že funkcia H_2 *je spojitá* iba v bodoch množiny $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\mp\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, ktoré zodpovedajú priesečníkom *grafov funkcií* $y = \sin x$, $y = \sin 2x$.



Obrázok 9. Schematický graf funkcie $y = H_2(x)$.

Vzhľadom na to, že funkcia $y = H_2(x)$ môže byť *diferencovateľná* iba v tých bodoch, v ktorých sa grafy uvedených funkcií *pretínajú a súčasne* v týchto bodoch majú spoločnú dotyčnicu, je zrejmé, že funkcia H_2 nie je diferencovateľná ani v jednom bode svojho definičného oboru.

Záver

V súčasnosti v teórii vyučovania matematiky silnejú tendencie pre uznanie relevantnosti procesu vizualizácie pre vzdelávanie v matematike. Na druhej strane, v spojitosti s vizualizáciou si nemožno si nevšimnúť aj istý druh nedôvery, ktorá má korene v silnom vplyve vedeckej matematickej praxe na prax pedagogickú.

Je vhodné si totiž uvedomiť, že hoci vizualizácia hrá skutočne iba podradnú či doplnkovú úlohu vo vedeckej produkcii matematických článkov (vrátane príslušných dôkazov nových matematických viet akceptovateľných matematickou komunitou), toto určite neplatí pre matematické vzdelávanie, pretože proces vizualizácie predstavuje účinný alternatívny spôsob získavania matematických vedomostí. Porozumenie a osvojenie matematických konceptov si vyžaduje spravidla viacero reprezentácii, pričom vizuálna reprezentácia môže uľahčiť pochopenie týchto konceptov sama osebe. Vizualizácia je integrálnou súčasťou matematickej aktivity a je účinným spôsobom riešenia problémov vo vyučovaní a učení sa v matematike. I keď pravdou je, že v matematike ako vede, matematický dôkaz je považovaný za jedinú oficiálnu cestu k pravde, určite nie je nevyhnutné, a ani žiaduce, aby sa tento spôsob prenášal do vyučovania matematiky na všetkých školských úrovniach.

Naše skúsenosti s vyučovaním matematiky jednoznačne potvrdzujú, že *vizuálne potvrdenie* platnosti matematického tvrdenia v rámci vyučovacieho procesu vedie nielen k trvalejším vedomostiam študentov, ale vedie k zvyšovaniu sebadôvery vo svoje matematické schopnosti. Platí to najmä pre študentov, ktorým chýbajú dostatočné skúsenosti so *separovanými modelmi príslušných matematických objektov a situácií.*

Je vhodné si uvedomiť, že v procese vzdelávania v matematike má využívanie *abstraktného, ale aj názorného* prístupu nezastupiteľné miesto. Vizualizácia umožňuje žiakom a študentom ľahšie a trvácnejšie osvojovať si poznatky z matematiky. Prehnaným zdôrazňovaním a permanentnou aplikáciou *abstraktného prístupu* sa pre žiakov a študentov *vzdelávací proces* môže stať nudný a nezaujímavý, čo v konečnom dôsledku znamená jeho neúčinnosť a neefektívnosť.

Na druhej strane treba priznať, že nekritické argumentácie a úvahy, ktoré sa opierajú iba o geometrický názor, či zjednodušenú vizualizáciu daného matematického tvrdenia, môže u študentov *potlačiť potrebu analytického matematického dôkazu* daného tvrdenia: keďže z obrázku je to *„zrejmé a jasné“*. Akceptáciou tohto prístupu by si študenti mohli ľahko zvyknúť na povrchné myslenie typu *„vidím, teda verím“*, ktoré je už v príprave budúcich učiteľov matematiky, cudzie a neprípustné.

Literatúra

[1] Arcavi, A. 2003. *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics*. In Educational Studies in Mathematics. 2003, roč. 3, č. 52,

[2] BARWISE, J. – ETCHEMENDY, J. 1992. *Hyperproof: Logical Reasoning with Diagrams*. In *Proceedings of the 1992 AAAI Spring Symposium on Diagrammatic*, Stanford: AAAI, 1992, 80-84.

[3] Fisher, R. – Malle, G. 1992. *Človek a matematika*. Bratislava, SPN 1992. ISBN 80-08-01309-5

[4] Fulier, J. 2001. *Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy*. FPV Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Nitra 2001, 176 strán, ISBN – 80-8050-418-0

[5] Fulier, J. 2006. *Informačné technológie a aspekt vizualizácie vo vzdelávaní v matematike*. In: Acta Mathematica 9, Nitra: UKF Nitra 2006, s.51 -66, ISBN 80-8094-036-3

[6] Fulier, J. 2008. *Prvky konštruktivizmu vo vyučovaní matematickej analýzy*. In: Acta Mathematica 11, Nitra: UKF Nitra 2008, s.31 - 38, ISBN 978-80-8094-396-7

[7] Fulier, J. – Ďuriš, V. – Frantová, P. 2007. *Systémy počítačovej algebry (CAS) vo vyučovaní matematiky*. Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Nitra 2007, 284 s.

[8] Fulier, J. – Šedivý, O. 2001. *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky.* Nitra, UKF Nitra 2001.

[9] Gardner, M. 1994. *My Best Mathematical and Logic Puzzles*, Dover; 1994,

[10] Guzmán, M. 2002. *The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2002. 24 p.

[11] Hadamard, J. 1996. *The Mathematician's Mind: The psychology of invention in the mathematical field.* Princeton University Press 1996.

[12] Hanna, G. – Sidoli, N. 2007. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. In *Mathematics Education* [online]. 2007, vol. 39

[13] Hejný, M. a kol. 1989. *Teória vyučovania matematiky* 2. SPN Bratislava 1989

[14] Hejný, M. - Kuřina, F. 2001. *Dítě, škola a matematika*. Praha, Portál, 2001,ISBN 80-7178-581-4

[15] Nákonečný, M. 2004. *Základy psychológie*. Praha, Academia Praha 2004.

[16] Nelsen, R. B. 1993. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking. USA:* The Mathematical Association of America, 1993.

[17] Kuřina, F. 2002. *O matematice a jejím vyučování*. In: Obzory matematiky, fyziky a informatiky. 2002, roč.31, č.1, s.1 – 8.

[18] Kuřina, F. 2010. *Vizuální gramotnost jako složka kultury*. In: MATEMATIKA - FYZIKA - INFORMATIKA. Prometheus Praha, ročník XIX (2009-2010), č.1, s.1-15.

[19] Vopěnka, P. 1989. Rozpravy s geometrií. Panorama, Praha 1989.

[20] Vopěnka, P. 2004. *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Práh, Praha 2004.

[21] Philips, L. M.- Norris, S.P. - Macnab, J.S. 2010. *Visualisation in Mathematics, reading and Science* Education, Springer 2010.

Poďakovanie

Článok bol podporený grantom **KEGA 020KU – 4/2018** s názvom *Osobnosti slovenskej matematiky- životné vzory pre budúce generácie*.