Vol. 3, No. 2, 2017

# Acta Mathematica Nitriensia

free electronic journal

AM Nitriensia

ISSN: 2453-6083

**Názov / Title**
Acta Mathematica Nitriensia

**Všeobecne o časopise**
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup

**General information**
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access

**Pokyny pre autorov**
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

**Guidelines for authors**
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

**Recenzné konanie**
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.

**Review process**
The journal carries out a double -blind peer review evaluation of drafts of contributions.

**Dostupnosť**
www.amn.fpv.ukf.sk

**Available from**
www.amn.fpv.ukf.sk

**Vydavateľ**
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

**Publisher**
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia



**Údaje k aktuálnemu číslu**
Ročník: 3
Číslo: 2
Rok: 2017
Dátum vydania: 25. 10. 2017

**Information to current issue**
Volume: 3
No.: 2
Year: 2017
Publication date: October 25, 2017

**Obsah**



**Content**

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 2, p. 1 – 6
ISSN 2453-6083

# O rôznych typoch indukcií v matematike

## On Various Types of Inductions in Mathematics

Peter Vrábel[*a]

*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 29 September 2017; received in revised form 12 October 2017; accepted 12 October 2017

**Abstract**

Three principles of inductions hold in mathematics: mathematical induction, ordinal induction and induction in continuum. There are two equivalent principles of the mathematical induction. Didactic aspects the application of these equivalent principles are examined in the paper.

**Keywords**: mathematical induction, continuum, equivalent principle.

**Classification**: 00A35; 97C50; 97D50

## Úvod

V matematike platia tri princípy indukcií. Je to princíp matematickej indukcie, princíp transfinitnej indukcie a princíp indukcie v kontinuu (Šalát $[1]$, 1986). Na tieto princípy potom prirodzene nadväzujú po rade metóda dôkazu matematickou indukciou (známa aj zo strednej školy), transfinitná indukcia a metóda dôkazu indukciou v kontinuu. Princíp transfinitnej indukcie platí v dobre usporiadaných množinách a princíp indukcie v kontinuu platí v husto a spojito usporiadaných množinách bez najmenšieho a najväčšieho prvku. Keďže žiadna usporiadaná množina nemôže byť súčasne dobre aj husto usporiadaná, tak tieto princípy vo všeobecnosti nesúvisia. Množina prirodzených čísel $\mathbb{N}$ resp. $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, s obvyklým usporiadaním sú dobre usporiadané množiny, preto princíp matematickej indukcie je špeciálnym prípadom princípu transfinitnej indukcie. Na druhej strane pri exaktnom (nie intuitívnom) dôkaze toho, že množina $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná množina, sa nevyhneme použitiu princípu matematickej indukcie. V tomto príspevku sa budeme zaoberať predovšetkým didaktickými aspektmi používania metódy dôkazu matematickou indukciou, predovšetkým použiteľnosťou jej dvoch variant.

## Teoretické východiská

Nech $\mathbb{Z}$ označuje množinu všetkých celých čísel a $\mathbb{Z}_k = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq k\}$, kde $k$ je nejaké pevné celé číslo. Uveďme teraz používané princípy indukcie v matematike.

**PMI 1.** Nech $M \subseteq \mathbb{Z}_k$, pričom platí:

(1) $k \in M$;
(2) Ak $n \in M$, potom aj $n + 1 \in M$.

Potom $M = \mathbb{Z}_k$.

---

*Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.1-6

**PMI 2.** Nech $M \subseteq \mathbb{Z}_k$, pričom platí:

(3) $k \in M$;
(4) Ak $n \in \mathbb{Z}_k$ a $m \in M$ pre každé $m \in \mathbb{Z}_k,\ m < n$, tak aj $n \in M$.

Potom $M = \mathbb{Z}_k$.

*Poznámka 1.* Princípy PMI 1 a PMI 2 sú ekvivalentné. Pre každú množinu $M$, $M \subseteq \mathbb{Z}_k$, podmienky (1) , (2) platia práve vtedy, keď platia podmienky (3), (4). Zrejme z platnosti (3), (4) vyplýva platnosť (1), (2). Platí aj naopak. Ak by výrok (4) neplatil, tak by existovalo také celé číslo $n,\ k < n$, že $m \in M$ pre každé $m < n$, ale $n \notin M$. Vezmime zo $\mathbb{Z}_k$ najmenšie číslo s takouto vlastnosťou. Nech je to $n_0$. Potom $n_0 - 1 \in M$ a $n_0 \notin M$, teda neplatí (2).

**PTI.** Nech $A$ je dobre usporiadaná množina a $\emptyset \neq M \subseteq A$, pričom platí:

(5) Najmenší prvok množiny $A$ patrí do množiny M.
(6) Ak $y \in A$ a $x \in M$ pre každé $x \in A, x < y$, tak aj $y \in M$.

Potom $M = A$.

*Poznámka 2.* Všimnime si, že predpoklad (3) v PMI 2 ((5) v PTI) vyplýva z predpokladu (4) ((6)). Totiž ak napríklad v (4) za $n$ zvolíme $k$, tak triviálne platí $m \in M$ pre každé $m < k$, pretože $\{m \in \mathbb{Z}_k; m < k\} = \emptyset$. Podobne to je v prípade predpokladu (5) v PTI. Iná je situácia v prípade použitia uvedených viet. Vtedy platnosť (3) resp. (5) treba overiť, pretože obyčajne sa inak postupuje pri overení (4) resp. (6) pre ostatné prvky množiny $\mathbb{Z}_k$ resp. $A$.

**PIK.** Nech $K$ je kontinuum a $M \subseteq K$. Nech platí:

(7) Existuje také $\alpha \in K$, že $\xi \in M$ pre každé $\xi \in K$ , $\xi < \alpha$.
(8) Ak $\beta \in K$ a $\xi \in M$ pre každé $\xi \in K, \xi < \beta$ , tak existuje také $\gamma \in K, \gamma > \beta$, že $\xi \in M$ pre každé $\xi \in K, \xi < \gamma$.

Potom $M = K$.

Dôkazy všetkých uvedených princípov indukcií možno nájsť napríklad v publikácii Šalát [1]. Dôležitým príkladom kontinua je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$ s obvyklým usporiadaním.

Z uvedených princípov vyplývajú prirodzeným spôsobom metódy dôkazov pomocou uvedených indukcií. Jedná sa o dôkazy tvrdení v tvare všeobecného výroku $\forall x \in X\ \mathcal{V}(x)$, kde $\mathcal{V}(x)$ je výroková funkcia definovaná na množine $X$, pričom $X$ je množina $\mathbb{Z}_k$ alebo dobre usporiadaná množina $A$, prípadne kontinuum $K$. Stačí potom dokázať, že množina $M$, určená rovnosťou

$$M = \{x \in X;\ \mathcal{V}(x)\},$$

má v prípade $X = \mathbb{Z}_k$ vlastnosti (1), (2) alebo vlastnosti (3), (4); v prípade $X = A$ vlastnosti (5), (6) alebo nakoniec v prípade $X = K$ má vlastnosti (7), (8). Aplikácie metódy dôkazu indukciou v kontinuu sú smerované predovšetkým do matematickej analýzy (Vrábel [2], 2002).

**Veta 1.** Nech $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ . Označme $M_\varepsilon = (-\infty, \varepsilon) \cap M$ pre ľubovoľné $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Nech výroková funkcia $\mathcal{V}(x)$ definovaná na množine $M$ má tieto vlastnosti:

(9) Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, že $M_\alpha \neq \emptyset$ a pre každé $x \in M_\alpha$ platí $\mathcal{V}(x)$.
(10) Ak pre každé $x \in M_\beta$ platí $\mathcal{V}(x)$ pre nejaké $\beta \in \mathbb{R}$, tak existuje také $\gamma \in \mathbb{R}$, že $\beta < \gamma$ a pre každé $x \in M_\gamma$ platí $\mathcal{V}(x)$.

Potom pre každé $x \in M$ platí $\mathcal{V}(x)$.

*Dôkaz.* Prevedieme nepriamo. Nech by existoval taký prvok $x_0 \in M$, že by výrok $\mathcal{V}(x_0)$ bol nepravdivý. Potom množina $B$, $B = \{x \in M;\ \mathcal{V}(x)\text{je nepravdivý výrok}\}$, by bola neprázdna. Z predpokladu (9) vyplýva, že množina $B$ je zdola ohraničená, teda existuje infimum tejto množiny, označme ho $\beta$. Potom pre každé $\xi \in M_\beta$ platí $\mathcal{V}(\xi)$. Z predpokladu (10) vyplýva, že existuje také $\gamma \in \mathbb{R}$, že $\beta < \gamma$ a pre každé $x \in M_\gamma$ platí $\mathcal{V}(x)$. Potom ale $\inf B \geq \gamma > \beta$, čo je spor.

*Poznámka 3.* Ak vo vete 1 za množinu $M$ vezmeme množinu $\mathbb{Z}_k$, tak dostávame matematickú indukciu ako dôsledok vety1 a teda aj dôsledok PIK, pretože princíp PIK je ekvivalentný so spojitým usporiadaním množiny $\mathbb{R}$ (Vrábel [2], 2002).

**Didaktické aspekty metódy dôkazu matematickou indukciou**

Predovšetkým si treba uvedomiť, že nie každé tvrdenie tvaru $\forall x \in \mathbb{Z}_k\ \mathcal{V}(x)$ je vhodné alebo možné dokazovať matematickou indukciou. Uveďme na to príklady.

**Problém 1.** Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n$ platí:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} < 2.$$

*Riešenie.* Matematickou indukciou to nepôjde. Použijeme metódu teleskopického súčtu. Takým je totiž súčet $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$, pretože pre každé prirodzené číslo $k$ platí:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\,.$$

Potom po dosadení dostávame:

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$
$$= 2 - \frac{1}{(n+1)!} < 2.$$

**Problém 2.** Dokážte, že každé prirodzené číslo $n$ má nenulový násobok, ktorého dekadický zápis obsahuje len cifry 0, 9.

*Riešenie.* Dôkaz matematickou indukciou ani v tomto prípade nefunguje. Uvažujme pre prirodzené číslo $n$ čísla 1, 10, $10^2$, … , $10^n$. Medzi týmito $n+1$ číslami existujú aspoň dve, ktoré majú po delení číslom $n$ rovnaký zvyšok. Ak sú to čísla $10^r$, $10^s$, $r > s$, tak $10^r = na + k$, $10^s = nb + k$, $a > b$, $0 \leq k < n$. Potom $10^r - 10^s = n(a-b)$ a $10^r - 10^s$ je požadovaného tvaru.

**Problém 3.** Dokážte, že ľubovoľná $(n+1)$ – prvková podmnožina množiny $\{1,2,\dots,2n\}$ obsahuje dve nesúdeliteľné prirodzené čísla.

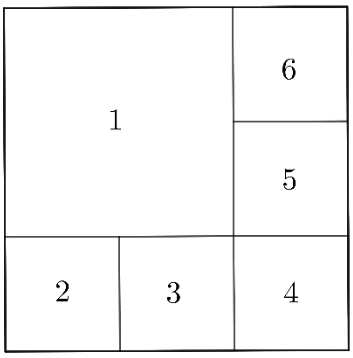
*Riešenie.* Pre každé prirodzené číslo $k$ platí, že čísla $k, k+1$ sú nesúdeliteľné. Ukážeme, že ľubovoľná $(n+1)$ – prvková podmnožina množiny $\{1,2,\dots,2n\}$ obsahuje aspoň jednu dvojicu po sebe idúcich čísel (tvrdenie A). Využijeme Dirichletov princíp. Dva prvky z $(n+1)$ – prvkovej podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ padnú do niektorej z $n$ množín $\{1,2\}, \{3,4\}, \cdots$, $\{2n-1, 2n\}$. To ale znamená, že sú to po sebe idúce prirodzené čísla $2k-1, 2k$.

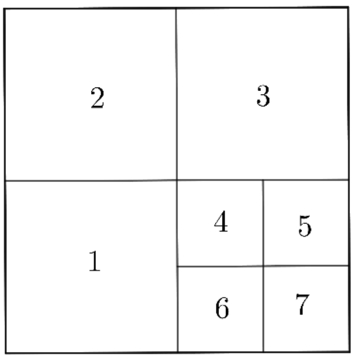
*Poznámka 4.* Pri riešení problému 3 sme použili stratégiu predposledného kroku, teda sme dokázali tvrdenie A, z ktorého už priamo vyplýva to, čo sme mali dokázať. Pravda tento predposledný krok možno čiastočne previesť aj matematickou indukciou. Pre $n = 1$ tvrdenie A platí, pretože dvojprvková podmnožina množiny $\{1, 2\}$ je práve táto množina. Nech A platí pre nejaké prirodzené číslo $n$. Vezmime ľubovoľnú $(n + 2)$ – prvkovú podmnožinu $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, a_{n+2}\}$ množiny $\{1,2, \dots, 2n,\ 2n + 1, 2n + 2\}$. Predpokladajme už, že $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} < a_{n+2}$. Ak $\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ je podmnožinou množiny $\{1,2, \dots, 2n\}$, tak využijeme indukčný predpoklad. V opačnom prípade $a_{n+1} = 2n + 1$ a následne $a_{n+2} = 2n + 2$. Teda tvrdenie A platí aj pre $n + 1$.

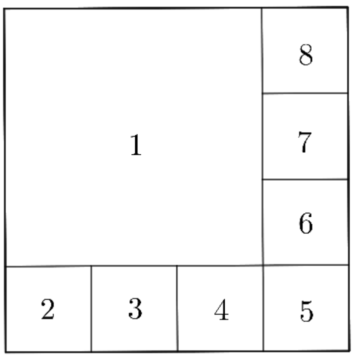
Je viacero iných problémov, ktoré sa riešia použitím Dirichletovho princípu namiesto matematickej indukcie i keď sa zdanlivo zdá, že by sa mohla použiť. Napríklad je to aj nasledujúci problém: Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n$ ľubovoľná $(n + 1)$ – prvková podmnožina množiny $\{1,2, \dots, 2n\}$ obsahuje dve čísla, z ktorých jedno delí druhé (riešenie možno nájsť aj v publikácii Vrábel [3], 2005).

**Problém 4.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n$, $n \geq 6$, platí, že ľubovoľný štvorec môžeme rozrezať na $n$ štvorcov, z ktorých niektoré môžu mať rovnaké dĺžky strán.

*Riešenie.* Indukčný predpoklad, že pre pevné prirodzené číslo $n$, $n \geq 6$, možno ľubovoľný štvorec rozrezať na $n$ štvorcov, nedáva žiaden návod ani východisko na dôkaz podobného tvrdenia pre prirodzené číslo $n + 1$. Totiž minimálny počet štvorcov, na ktorý je možno rozrezať ľubovoľný štvorec, je štyri. To ale už dáva istý návod, ako by sme mohli postupovať. Ak vieme rozrezať štvorec na $n$ štvorcov, tak ho vieme rozrezať na $n + 3$ štvorcov. Stačí jeden z $n$ štvorcov nahradiť štyrmi rovnakými štvorcami, na ktoré ho rozrežeme. Potom však vieme rozrezať štvorec aj na $n + 6$, $n + 9$, všeobecne na $n + 3k$, $k$ je ľubovoľné nezáporné celé číslo (to už ľahko dokážeme pomocou PMI1 vzhľadom na $k$). Teraz si uvedomme, že každé prirodzené číslo $n$, $n \geq 6$, sa dá jednoznačne vyjadriť v jednom z tvarov $6 + 3k$, $7 + 3k$, $8 + 3k$, kde $k$ je nejaké nezáporné celé číslo. Totiž $n = 6 + (n - 6)$, $n - 6 = 3k + r$, $r \in \{0,1,2\}$. Ak $r = 0$, tak $n = 6 + 3k$; ak $r = 1$, tak $n = 7 + 3k$; nakoniec ak $r = 2$, tak $n = 8 + 3k$. Na základe predchádzajúcej úvahy stačí teda dokázať tvrdenie pre $n \in \{6,7,8\}$. Rozrezanie štvorcov požadovaným spôsobom v týchto prípadoch je na nasledujúcom obrázku.








Porovnajme teraz účinnosť dôkazu matematickou indukciou na základe princípov PMI 1 a PMI 2. Tieto princípy sú síce ekvivalentné ale matematická indukcia na základe PMI 2 je univerzálnejšia. Teda existujú situácie, keď napríklad výrok $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \mathcal{V}(n)$ dokážeme pomocou PMI 2, ale pomocou PMI 1 to nejde alebo je to komplikovanejšie. Uveďme na to príklady.

**Problém 5.** Každé prirodzené číslo väčšie ako 1 možno vyjadriť v tvare súčinu nejakých prvočísel.

*Riešenie.* Pre $n = 2$ tvrdenie platí, pretože jedno prvočíslo pokladáme tiež za súčin prvočísel. Nech každé prirodzené číslo menšie ako nejaké pevné prirodzené číslo $n$ $(n \geq 3)$ možno vyjadriť v tvare súčinu niektorých prvočísel. Dokážeme, že aj číslo $n$ možno takto vyjadriť. Stačí uvažovať, že číslo $n$ je zložené. Potom $n = ab$, $1 < a < n$, $1 < b < n$. Na čísla $a, b$ sa už vzťahuje indukčný predpoklad, teda $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, $b = p_{k+1} \cdot p_{k+2} \cdot \dots \cdot p_m$, $k < m$, $p_1, p_2, \dots, p_m$ sú prvočísla. Potom $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m$.

*Poznámka 5.* Dokázať tvrdenie v probléme 5 pomocou PMI 1 sa nedá. Uvedené tvrdenie je čiastočným výsledkom vety, ktorá sa v minulosti nazývala základná veta aritmetiky: Každé prirodzené číslo $n$ väčšie ako 1 sa dá jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

kde $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ sú prvočísla a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sú prirodzené čísla. Jednoznačnosť uvedeného vyjadrenia sa nedokazuje matematickou indukciou.

**Problém 6.** Nech $z$ je prirodzené číslo väčšie ako jedna. Každé prirodzené číslo možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare

$$a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0 \,, \tag{11}$$

kde $k$, $a_k$, $a_{k-1}$, … , $a_0$ sú celé nezáporné čísla, $a_k \neq 0$, $0 \leq a_i < z$, $i = 0, 1, \dots, k$.

*Riešenie.* Obe časti dôkazu tvrdenia (existencia aj jednoznačnosť) je výhodnejšie urobiť pomocou PMI 2. Najskôr teda dokážeme, že každé prirodzené číslo možno v tvare (11) vyjadriť. Pre $n = 1$ tvrdenie platí: $a_0 = 1$, $k = 0$. Predpokladajme, že každé prirodzené číslo menšie ako nejaké pevné prirodzené číslo $n$ $(n \geq 2)$ sa dá vyjadriť v tvare (11). Dokážeme, že aj číslo $n$ sa dá vyjadriť v tvare (11). Zo známej vety o delení so zvyškom vyplýva existencia takých nezáporných celých čísel $b, c$, že $n = zb + c$, $0 \leq c < z$. Ak $b = 0$, tak $n = c$ a teda $k = 0$, $a_0 = n$. Ak $b \neq 0$, tak číslo $b$ je prirodzené číslo menšie ako $n$ a na základe indukčného predpokladu ho možno vyjadriť v tvare

$$b = d_k z^k + d_{k-1} z^{k-1} + \dots + d_1 z + d_0,\, d_k \neq 0,\, 0 \leq d_i < z,\, i = 0, 1, \dots, k.$$

Potom $n = zb + c = d_k z^{k+1} + d_{k-1} z^k + \dots + d_1 z^2 + d_0 z + c$. Stačí položiť $a_0 = c$, $a_1 = d_0$, $a_2 = d_1$, … , $a_k = d_{k-1}$, $a_{k+1} = d_k$.
Teraz dokážeme jednoznačnosť vyjadrenia (11). Pre $n = 1$ tvrdenie platí, pretože okrem vyjadrenia $a_0 = 1$, $k = 0$, iné neexistuje. Nech jednoznačnosť vyjadrenia platí pre každé prirodzené číslo menšie ako nejaké prirodzené číslo $n$ $(n \geq 2)$. Dokážeme, že aj $n$ sa dá v tvare (11) vyjadriť jediným spôsobom. Nech

$$n = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_1 z + a_0 = b_s z^s + b_{s-1} z^{s-1} + \dots + b_1 z + b_0,$$

kde $a_i$, $b_j$ vyhovujú daným podmienkam vyjadrenia (11). Z vety o delení so zvyškom vyplýva, že

$$n = z(a_k z^{k-1} + a_{k-1} z^{k-2} + \dots + a_1) + a_0 = zA + a_0,\, 0 \leq a_0 < z,$$

$$n = z(b_s z^{s-1} + b_{s-1} z^{s-2} + \dots + b_1) + b_0 = zB + b_0,\, 0 \leq b_0 < z.$$

Vyjadrenie $n = zq + r$, $0 \leq r < z$, je možné iba jediným spôsobom, preto $A = B$ a $a_0 = b_0$. Ale $A < n$ a preto ho z indukčného predpokladu už možno jediným spôsobom vyjadriť v tvare (11). Preto $k = s$ a $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Odtiaľ už vyplýva, že aj pre $n$ existuje jediné vyjadrenie v tvare (11).

*Poznámka 6.* Tvrdenie v probléme 6 je kľúčové pre jednoznačné vyjadrenie každého prirodzeného čísla v tzv. $z$-adickej pozičnej sústave.

**Záver**

Predovšetkým vo výučbe matematiky sa kvôli jednoduchšej indukčnej podmienke častejšie využíva dôkaz matematickou indukciou založený na princípe PMI 1 ako ten, ktorý je založený na PMI 2. Z hľadiska univerzálnosti je však PMI 2 účinnejší. Pri zachovaní predpokladu (3) môžeme podmienku (4) ekvivalentne nahradiť nasledujúcou podmienkou: ak $n \in \mathbb{Z}_k$ a $m \in M$ pre každé $m \in \mathbb{Z}_k$, $m \leq n$, tak aj $n + 1 \in M$.

**Literatúra**

[1] Šalát, T. – Smítal, J. 1986. *Teória množín.* Bratislava: Alfa, 1986.

[2] Vrábel, P. 2002. *O dôkazovej technike v elementárnej analýze využívajúcej princíp indukcie v kontinuu.* In: Acta Math. 5, FPV UKF, Nitra, 2002, 91-97, ISBN 80-8050-562-4.

[3] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: FPV UKF, Edícia Prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050- 840-2.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 2, p. 7 – 14
ISSN 2453-6083

# Analýza žiackych riešení vybraných úloh zameraných na zlomky

## An Analysis of The Pupils´ Solutions of Selected Tasks Focused on Fractions

**Lucia Klimentová**[a*]

[a*] *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 4 October 2017; received in revised form 9 October 2017; accepted 11 October 2017

**Abstract**

In our article we focused on selected tasks from specially developed fraction test which authors are Marilena Pantziara and George Philippou. These tasks are focused on measure subconstruct of fractions together with the notions of equivalence, comparison and addition of fractions. The aim of the article was to analyze the pupils´ solutions in the light of the correct solutions. We found out that the most problematic tasks was the tasks focused on measure subconstruct of fractions. It implies that the teaching the fractions through the number line probably absent in Slovak schools. The research was realized in May and June 2017. The research sample consist of 930 ninth graders from 35 lower secondary schools in Slovakia, mostly from Nitra, Lučenec and Nové Zámky.

**Keywords**: fractions, measure subconstruct, order and equivalence of fractions, addition of fractions

**Classification**: C30, F40

## Úvod

Zlomky patria k jednému z najproblematickejších tematických celkov vo vyučovaní matematiky. Dokazujú to aj mnohé slovenské, české, ale aj zahraničné štúdie, ktoré poukazujú na problémy s porozumením pojmu zlomok. Čo je však príčinou nízkeho porozumenia zlomkov žiakmi zostáva otázne.

V praxi sa často stretávame s tým, že napriek tomu, že žiaci ovládajú pravidlá pre počítanie so zlomkami, pri úlohe, ktorá obsahuje neštandardnú situáciu zostávajú bezradní. Znamená to, že poznatky sú uložené iba ako pamäťové stopy bez vzťahu k už vytvorenej štruktúre vedomostí. Hejný a kol. (1987) uvádza, že vo vyučovaní zrejme nedošlo k rozvoju žiakovho myslenia a vybudovanie predstavy o zlomku. Poznanie, ku ktorému žiak dospel, je verbálne a formálne.

Metódou poznávania je porozumenie, ktoré znamená obsiahnutie súvislostí, vzťahov, zmyslu a podstaty problému. (Hartl, Hartlová, 2010)

*Corresponding author: lucia.klimentova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.7-14

V práci sme sa zamerali práve na analýzu porozumenia zlomku ako miery, relácií usporiadania a rovnosti zlomkov a operácie sčítania zlomkov u žiakov 9. ročníka základných škôl. Taktiež sme analyzovali žiacke riešenia z pohľadu ich správnosti.

**Špeciálne zostavený test zameraný na zlomky**

Autormi špeciálne vyvinutého testu, ktorý je zameraný na zlomky a prepojený so Sfardovej teóriou reifikácie sú cyperskí výskumníci Marilena Pantziara a George Phillipou (2012). Tento test sme preložili do slovenského jazyka a podľa výsledkov predvýskumu sme ho prispôsobili podmienkam slovenských základných škôl. Test pozostáva z 21 úloh, ktoré sú usporiadané v siedmych skupinách označených číslami 1,2,3,4,5,6,7, ktoré postupne predstavujú rôzne interpretácie pojmu zlomok a v troch stĺpcoch označených písmenami A, B, C, ktoré predstavujú jednotlivé štádiá Sfardovej teórie reifikácie (napr. úloha B2 znamená že ide o úlohu zameranú na zlomok ako časť celku na úrovni štádia kondenzácie).

Podľa Sfardovej teórie reifikácie, môžeme vnímanie zlomku klasifikovať na troch úrovniach konceptualizácie poznatkov o zlomku.

Prvou úrovňou je štádium interiorizácie, kde ide o vykonávanie matematických úkonov na nižšej úrovni. Práve to umožňuje spomenúť si na matematické úkony aj bez ich aktuálneho pôsobenia.

Druhou úrovňou je štádium kondenzácie, v ktorom ide o využívanie komplikovanejších postupov, utvrdzovanie učiva ako celku, žiaci majú vytvorené vlastné schémy a myšlienkové postupy, majú nejakú predstavu o koncepte.

Poslednou, treťou, úrovňou je štádium reifikácie (zhmotnenia), ktoré odzrkadľuje schopnosť vytvoriť si plnohodnotnú predstavu, ide o porozumenie na základe vlastných možností a spozorovanie vzťahov medzi reprezentáciami (Sfard, 1991).

Sfardová tiež uvádza, že v teórii reifikácie jednotlivé štádiá na seba nadväzujú, t.j. bez predchádzajúceho dosiahnutia nižšieho štádia nie je možné dosiahnuť vyššie štádium.

Prvé tri trojice úloh v teste sú zamerané na porozumenie zlomku ako časti celku. Štvrtá trojica úloh je zameraná na zistenie úrovne porozumenia pri ponímaní zlomku ako miery. V piatej, šiestej a siedmej trojici úloh sa stretávame s reláciami rovnosť a porovnávanie zlomkov a s operáciou sčítania zlomkov v tomto poradí.

Niektoré úlohy sú založené na postupoch krok za krokom, čo znamená vykonať v istom poradí počtové operácie a určiť zlomok. Iné sú založené na konceptuálnom ale aj procedurálnom porozumení danému pojmu (Pantziara, Philippou, 2012).

Pre potreby nášho výskumu sme sa zamerali iba na položky v riadkoch 4 – 7.

### *Popis jednotlivých testových položiek*

Trojica úloha (A4 , B4, C4) (viď obr. 1) je zameraná na porozumenie zlomku ako miere.


*Obr.: 1 Trojica úloh zameraná na pochopenie zlomku ako miery*

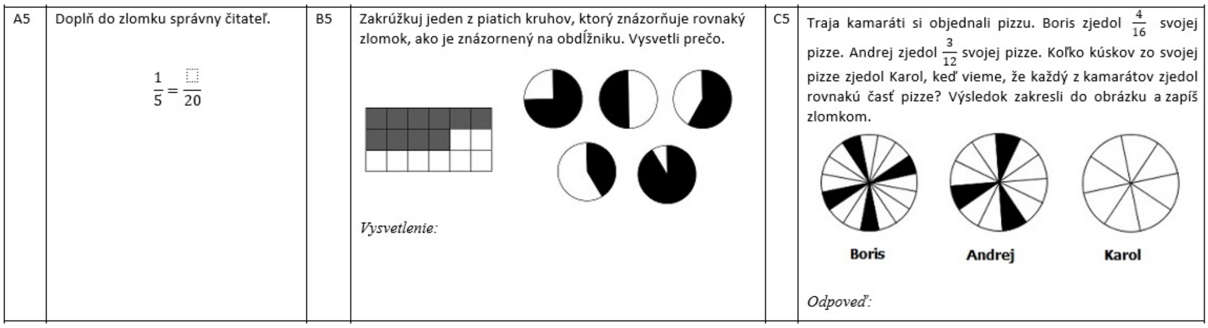
Úloha A4 (Hannula, 2003) bola navrhnutá na zistenie porozumenia zlomku ako miery. Táto úloha je charakteristická pre štádium interiorizácie, „riešenie môže byť vykonané prostredníctvom mentálnych reprezentácií" a číselná os je reprezentantom mentálnych objektov korešpondujúcich s mentálnymi operáciami (Ni, 2001). Úlohou žiakov je zaznačenie daného zlomku $\left(\frac{3}{5}\right)$ buď ako číslo alebo prostredníctvom intervalu na predtlačenej číselnej osi. Žiaci si musia uvedomiť, že číselná os je rozdelená na 5 častí, pretože hľadáme pätiny, a že jeden dielik na číselnej osi predstavuje vzdialenosť $\frac{1}{5}$ od počiatočného bodu, teda od 0. Tiež si musia uvedomiť, že číslo 1 môžu zapísať v tvare $\frac{5}{5}$.

Úloha B4 je zameraná na zistenie schopnosti žiakov kombinovať rôzne myšlienkové procesy a prechádzať z jednej reprezentácie zlomku do inej, čo je typické pre štádium kondenzácie (Pantziara, Philippou, 2012). Žiaci musia najskôr zistiť z modelu zlomku o aký zlomok ide. Táto úloha má dve správne riešenia. Prvé správne riešenie je, ak žiaci určia zlomok $\frac{3}{4}$, druhým správnym riešením je zlomok $\frac{1}{4}$ , keďže nebolo určené, ktorá časť, šedá alebo biela, reprezentuje zlomok. Následne na to majú žiaci zaznačiť tento zlomok na predtlačenej číselnej osi, buď prostredníctvom čísla alebo intervalu. Znázornenie zlomku na predtlačenej číselnej osi je však náročnejšie, pretože daná os je rozdelené na 8 dielikov a majú znázorniť „štvrtiny". Musia si teda uvedomiť, aký je vzťah medzi osminami a štvrtinami.

Úspešnosť riešenia úlohy C4 závisí od toho, či žiaci vnímajú zlomok ako objekt, t.j. statickú štruktúru, ktorú vedia oddeliť od ostatných procesov a súčasne majú osvojené vlastnosti rovnosť, hustota, usporiadanie a veľkosť zlomkov. Ide o štádium reifikácie (Pantziara, Philippou, 2012).

Žiaci majú do vyznačeného okienka na predtlačenej číselnej osi napísať správny zlomok. Táto úloha je však zložitejšia, nakoľko daný interval nepredstavuje rozpätie od 0 po 1 ale od 0 po ½. Jediným riešením tejto úlohy je $\frac{1}{6}$. Žiaci by mohli danú úlohu riešiť dvomi spôsobmi. Prvým spôsobom by si uvedomili, rovnosť $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Druhým spôsobom by bola úvaha, že daný interval by si rozdelili na tri časti a vykonali nasledovnú úpravu $\frac{1}{2} : 3 = 6$ .

Ďalšia trojica úloh (A5, B5, C5) (viď obr. 2) je zameraná na porozumenie relácii rovnosť zlomkov.




*Obr.: 2 Trojica úloh zameraná na reláciu rovnosť zlomkov*

Úloha A5 sa zaoberá rovnosťou zlomkov a vyžaduje iba jednoduchú aplikáciu rutinného postupu (Pantziara, Philippou, 2012). Ide o rozšírenie zlomku číslom 4.

V úlohe B5 musia žiaci porovnať medzi dvomi rôznymi reprezentáciami zlomku a uvažovať o rovnosti zlomkov, čo je charakteristické pre štádium kondenzácie. (Pantziara, Philippou, 2012) Najskôr určia zlomok, ktorý je znázornený tzv. čokoládovým modelom zlomku, následne na to musia nájsť rovnaký zlomok, ktorý je znázornený tzv. koláčovým modelom zlomku, ktorý však nie je vopred rozdelený na časti. Dôležitú úlohu tu zohráva aj vizuálne vnímanie a odhad.

Úloha C5 je zameraná na rovnosť zlomkov a pôvodne vyžadovala, aby žiaci vedeli použiť premennú $x$ v kontexte danej úlohy (Pantziara, Philippou, 2012). Modelovanie prostredníctvom premennej $x$ sa pre žiakov základných škôl ukázalo ako príliš náročné, preto sme danú úlohu pozmenili tak, že žiak musel zapísať zlomkom a vyznačiť na predtlačený obrázok, akú časť pizze zjedol Karol.

Ďalšia trojica úloh (A6, B6, C6) (viď obr. 3) je zameraná na porozumenie relácii porovnávanie zlomkov.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A6 | Zakrúžkuj väčší zlomok.<br>$\frac{5}{9}$ $\frac{2}{9}$ | B6 | Vysvetli, prečo je zlomok $\frac{4}{7}$ je väčší ako $\frac{3}{14}$.<br>*Vysvetlenie:* | C6 | Napíš zlomok, ktorý je väčší ako $\frac{1}{7}$ a menší ako $\frac{1}{6}$. Vysvetli.<br>*Vysvetlenie:* |

*Obr.: 3 Trojica úloh zameraná na reláciu porovnávanie zlomkov*

Úloha A6 je zameraná na porovnanie dvoch zlomkov s rovnakým menovateľom použitím rutinných postupov (Pantziara, Philippou, 2012).

Úloha B6 pôvodne zahŕňala porovnanie dvoch zlomkov s rôznymi menovateľmi použitím dvoch rôznych spôsobov (Pantziara, Philippou, 2012). Táto úloha sa však v predvýskume ukázala ako problematická, nakoľko danú úlohu vyriešilo iba 0,6% študentov a faktorová záťaž tejto úlohy bola 5,30. Za problém sme považovali formuláciu zadanie tejto úlohy, a preto sme zadanie preformulovali nasledovne: „Vysvetli, prečo je zlomok $\frac{4}{7}$ väčší ako $\frac{3}{14}$". Sledovali sme, akým spôsobom budú žiaci porovnávať dané zlomky. Veríme, že flexibilita použitá v prístupoch začína v štádiu kondenzácie.

Úloha C6 je zameraná na nájdenie zlomku medzi dvomi kmeňovými zlomkami s po sebe idúcimi menovateľmi. Úspešnosť pri riešení tejto úlohy závisí od toho, či sú žiaci schopní pochopiť každý zo zlomkov ako objekt, a či každý chápe pojmu hustota usporiadania racionálnych čísel (Pantziara, Philippou, 2012).

Posledná trojica úloh (A7, B7, C7) (obr. 3) je zameraná na porozumenie operácii sčítanie zlomkov.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A7 | Sčítaj zlomky a výsledok zapíš v základnom tvare.<br>$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=$<br>*Základný tvar*: $\boxed{\phantom{x}}$ | B7 | Sčítaj zlomky.<br>$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=$ | C7 | Súrodenci Janka a Miško dostali balíček cukríkov. Janka zjedla $\frac{1}{3}$ zo všetkých cukríkov a Miško zjedol $\frac{3}{5}$ zo všetkých cukríkov. a) Akú časť zo všetkých cukríkov zjedli spolu?<br>b) Aká časť cukríkov zostala v balíčku?<br>a) Spolu zjedli ...... cukríkov.<br>b) V balíčku zostalo ...... cukríkov. |

*Obr.: 4 Trojica úloh zameraná na operáciu sčítanie zlomkov*

Úloha A7 je zameraná na súčet dvoch zlomkov s rovnakým menovateľom (Pantziara, Philippou, 2012).

Úloha B7 je zameraná na súčet dvoch zlomkov s rôznymi menovateľmi. Táto úloha je charakteristická pre štádium kondenzácie, pretože žiaci musia vykonať postup úpravy na spoločného menovateľa, teda nejde o priamočiaru operáciu. To zahŕňa porozumenie pojmu zlomok a kombináciu rôznych procesov ako je napr. rovnosť zlomkov. Iné štúdie ukázali, že žiaci môžu použiť pri riešení tejto úlohy aj konceptuálny prístup (Pantziara, Philippou, 2012).

Úloha C7 pôvodne pozostávala z troch čiastkových úloh. Prvá úloha bola spojená so sčítaním zlomkov s rôznymi menovateľmi, v druhej časti mali žiaci nakresliť (graficky znázorniť – vymodelovať) tento proces sčítavania zlomkov a v poslednom kroku majú žiaci vymyslieť slovnú úlohu, ktorá by obsahovala sčítanie dvoch daných zlomkov. Tieto tri časti úlohy C7 preverujú schopnosť žiakov riešiť úlohy na sčítavanie zlomkov dvojakým spôsobom – ako numerický proces (algoritmus sčítania) a ako prácu s objektmi – znázorňovanie procesu sčítania na modeloch a vyjadrenie procesu sčítania slovnou formuláciou a vzťahmi medzi objektmi. (Pantziara, Philippou, 2012)

Pri overovaní testov u žiakov siedmeho a ôsmeho ročníka sme zistili, že žiaden zo žiakov nevedel vymyslieť slovnú úlohu. Jedným z dôvodov je aj to, že na slovenských základných školách sa nekladie dôraz na tvorenie slovných úloh, ale na ich riešenie. Žiaci teda nie sú zvyknutí tvoriť slovné úlohy, a preto sme sa rozhodli toto zadanie pozmeniť. Sformulovali sme slovnú úlohu, ktorú mali žiaci vyriešiť. Taktiež tu ide o vyjadrenie procesu sčítania slovnou formuláciou a vzťahmi medzi objektmi.

## Metodológia

Vo februári a v marci 2016 sme realizovali predvýskum, v ktorom sme chceli overiť, či je daný test vhodný použiť v podmienkach slovenských škôl. Na základe použitia rôznych štatistických metód sme zistili, že daný test zameraný na zlomky môžeme považovať za dostatočne dôveryhodný nástroj a s malými úpravami ho môžeme použiť aj v podmienkach slovenských škôl. (Švecová et al., 2017)

Ďalším krokom bolo overenie úspešnosti riešenia jednotlivých úloh na základných školách a s tým súvisiaci výber výskumnej vzorky.

Tematický celok *Zlomky, počtové výkony so zlomkami, kladné racionálne čísla* je podľa Štátneho vzdelávacieho programu zaradený do siedmeho ročníka základných škôl. Vzhľadom na to sme si ako výskumnú vzorku zvolili žiakov siedmeho ročníka základných škôl.

Daný test sme na základe výsledkov predvýskumu upravili a overili v apríli 2017 na výskumnej vzorke žiakov siedmeho ročníka ZŠ Bernolákova v Šuranoch. Podľa výsledkov testu a následnej diskusie sme zistili, že žiaci siedmeho ročníka ešte nemajú upevnené učivo o zlomkoch, pretože v teste zlyhávali aj v najľahších úlohách. V diskusii uviedli, že zlomky sa učili už v priebehu októbra a novembra a zabudli ako ich počítať.

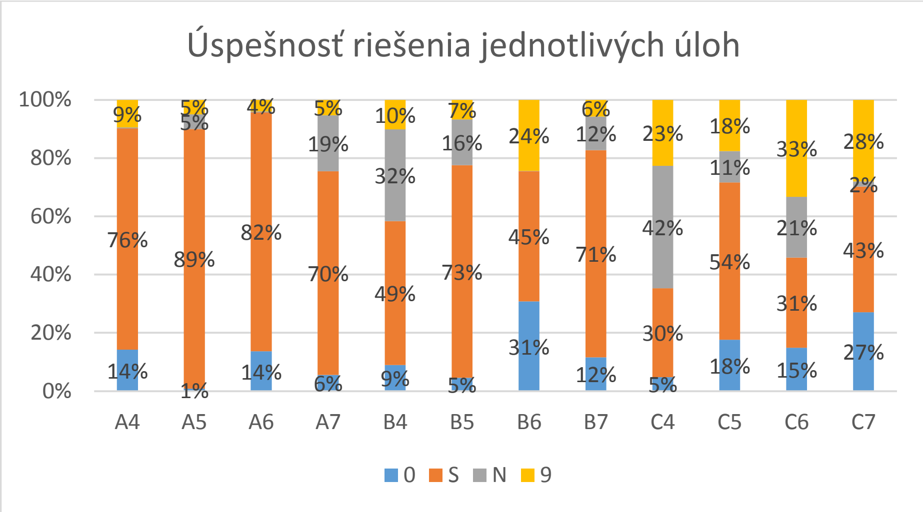
Následne na to sme daný test overovali aj u žiakov ôsmeho ročníka ZŠ Bernolákova v Šuranoch, nakoľko žiaci v ôsmom ročníku si opakujú a upevňujú už nadobudnuté vedomosti o zlomkoch. Zistili sme, že síce žiaci ôsmeho ročníka dosahovali o niečo lepšie výsledky ako žiaci siedmeho ročníka, stále nemajú úplne utvrdené vedomosti o zlomkoch, keďže jadrom učiva matematiky ôsmeho ročníka sú záporné čísla.

Vzhľadom na to sme si aj po diskusii s učiteľmi z praxe ako základný súbor zvolili žiakov deviateho ročníka základnej školy. Výskum sme realizovali v máji - júli 2017, teda v čase, keď žiaci deviateho ročníka mali absolvované Testovanie 9 a absolvované prijímacie pohovory na strednú školu. Nakoľko sa žiaci na Testovanie 9 pripravujú zopakovaním učiva druhého stupňa základnej školy, môžeme očakávať, že títo žiaci budú mať zopakované, osvojené a zapamätané poznatky o zlomkoch a racionálnych číslach, a tak môžeme skúmať závislosti vyplývajúce z výskumných otázok. Testu sa nakoniec zúčastnilo 35 z 39 oslovených základných škôl z Nových Zámkov, Šurian, Nitry, Lučenca, Trenčianskej Turnej, Trenčianskeho Jastrabia, Žiliny, Zlatých Moraviec, Palárikova, Liptovského Mikuláša, Bánova, Lazian, Branču, Haligoviec, Alekšiniec a Čeľadíc. Výskumnú vzorku tvorí spolu 930 žiakov 9. ročníka základných škôl v uvedených mestách.

**Interpretácia výsledkov**

Základné informácie o úspešnosti riešenia jednotlivých úloh sú uvedené v grafe 1. Riešenia jednotlivých úloh sme kódovali nasledovným spôsobom. Ak sa žiaci pokúšali danú úlohu vyriešiť, ale nedospeli k žiadnemu výsledku, pridelili sme kód 0, v prípade správnej odpovede sme pridelili kód S, v prípade nesprávnej odpovede sme pridelili kód N a v prípade, že žiak danú úlohu neriešil, pridelili sme kód 9.

Z uvedeného grafu 1 vyplýva, že medzi najmenej náročné úlohy patria úlohy A5, A6, nakoľko majú najlepšiu percentuálnu úspešnosť správnych odpovedí. Postupne sa percentuálna úspešnosť správnych odpovedí znižuje a zvyšuje sa percentuálne zastúpenia nesprávnych odpovedí a odpovedí, v ktorých sa žiaci nedopracovali k žiadnemu výsledku. Ide hlavne o úlohy A4, A7, B5, B7. Úlohy B4, B6, C5 a C7 vyriešilo približne iba 50% žiakov. Najťažšími úlohami boli úlohy C4 a C6, ktoré vyriešilo približne iba 30% žiakov. Zaujímavý je aj postreh, že medzi úlohy, ktoré žiaci najčastejšie neriešili patria úlohy B6, C4, C5, C6 a C7. S výnimkou úlohy B6 ide o úlohy na úrovni štádia reifikácie, čo znamená, že by mali byť najzložitejšie. Vo všetkých úlohách museli žiaci využiť hlbšie poznatky o zlomkoch, nešlo o úlohy, v ktorých sa využije iba naučené pravidlo. Dôvodom nižšej úspešnosti riešenia úloh C5 a C7 mohol byť aj fakt, že dané úlohy mali dlhšie slovné zadanie. Pri úlohách B6 a C6 mohol problém nastať preto, lebo od žiakov sme žiadali aj vysvetlenie riešenia.




Graf 1: Úspešnosť riešenia jednotlivých úloh

**Záver**

V článku sme sa zamerali analýzu porozumenia zlomku ako miery, relácií usporiadania a rovnosti zlomkov a operácie sčítania zlomkov u žiakov 9. ročníka základných škôl. Taktiež sme analyzovali žiacke riešenia z pohľadu ich správnosti.

Zistili sme, že úlohy A5 a A6 boli pre žiakov príliš jednoduché (úspešnosť vyššia ako 80%). Ide o úlohy na úrovni štádia interiorizácie, teda by mali byť najmenej náročné.

Ďalšiu skupinu o niečo náročnejších úloh, ktoré vyriešilo približne 70% žiakov tvoria úlohy A4, A7, B5 a B7. Ide o úlohy na úrovni štádia interiorizácie a kondenzácie.

Tretiu skupinu úloh, ktoré vyriešilo približne 50% žiakov tvoria úlohy B4, B6, C5 a C7. Ide o úlohy na úrovni štádia interiorizácie a reifikácie.

Ako najťažšie sa ukázali úlohy C4 a C6 na úrovni štádia reifikácie. Predpokladá sa, že tieto úlohy boli pre žiakov zložité, pretože nejde o štandardné školské úlohy vyskytujúce sa v učebniciach a v pracovných zošitoch, ktoré žiaci používajú v škole.

Zaujímavé je aj zoskupenie jednotlivých úloh. Výskum Švecová (et al., 2017) ukázal, že niektoré úlohy tvoria akési štádium prechodu medzi jednotlivými štádiami. Predpokladáme, že z toho dôvodu môžeme pozorovať medzistupne po sebe idúcich úrovní aj na našej výskumnej vzorke.

Za významné považujeme aj zistenia, že medzi úlohy, ktoré študenti najčastejšie neriešili patria úlohy B6, C4, C5, C6 a C7, ktoré sú s výnimkou úlohy B6 všetky na úrovni štádia reifikácie. Príčiny prečo žiaci dané úlohy neriešili mohli byť napr. to, že zadanie bolo príliš dlhé, v úlohe sme žiadali riešenie zdôvodniť a pod. Problém mohol byť aj v prístupe vyučujúceho k vypĺňaniu daného testu, ale aj v prístupe žiakov, ktorý test ignorovali, alebo vypĺňali iba úlohy, nad ktorými sa nemuseli hlbšie zamýšľať.

Taktiež z percentuálnej úspešnosti riešení jednotlivých úloh môžeme vidieť, že najviac nesprávnych odpovedí uviedli žiaci v úlohách B4 a C4, ktoré predstavujú umiestnenie zlomku na číselnej osi.

Práca s číselnou osou v súvislosti so zlomkami v podmienkach slovenských škôl zrejme absentuje. Číselná os by však mala byť zahrnutá do vyučovacieho procesu, nakoľko ide o jednu z interpretácií zlomku. Žiaci by si teda mohli vytvoriť komplexnejší obraz o zlomkoch a racionálnych číslach, čím by sa prispelo ku skvalitneniu vyučovania daných konštruktov.

**Poďakovanie**

Tento príspevok vznikol s podporou projektov UGA -> VII/9/2017 - *Diagnostika vzťahu osobnej potreby štruktúry a riešenia úloh so zlomkami* a VEGA: *Vplyv osobnej potreby štruktúry a psychodidaktických aspektov na rozvoj matematických kompetencií.*

**Literatúra**

Hannula, M. S. (2003). Locating Fraction On a Number Line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Honolulu, s. 17–24. ISSN: 0771-100X

Hartl, P., Hartlová, H. (2010). Velký psychologický slovník. Praha: Portál.

Hejný, M. (1987). Teória vyučovania matematiky 2. Bratislava: SPN.

Ni, Y. (2001). Semantic Domains Of Rational Numbers And The Acquisition Of Fraction Equivalence. Contemporary Educational Psychology, roč. 26, s. 400–417. ISSN 0361-476X

Pantziara M.C. Philippou G. (2012). Levels Of Students' "Conception" Of Fractions. Educational Studies in Mathematics, roč. 79, s. 61–83. ISSN: 1573-0816

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics, roč. 22, s. 1–36. ISSN: 1573-0816

Švecová , V., Pavlovičová G., Rybanský Ľ., Klimentová L. (2017). Reifikácia zlomkov vo vzťahu k osobnej potrebe štruktúry. Wolters Kluwer: Praha.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 2, p. 15 – 23
ISSN 2453-6083

# Analýza žákovských postojů k matematice na 1. stupni ZŠ

## Analysis of Pupils' Attitudes Towards Mathematics at the Primary School

Vlastimil Chytrý[a*]- Roman Kroufek[a]- Jindřich Polák[b]

[a] *Department of Preschol and Primary Education, Faculty of Education, Univerzity of Jan Evangelista Purkyně in Ústí nad Labem, Pasteurova 1, Pasteurova 3544/1, 400 96 CZ*
[b] *Faculty of Education, Univerzity of Jan Evangelista Purkyně in Ústí nad Labem, Pasteurova 1, Pasteurova 3544/1, 400 96 CZ*

Received 27 September 2017; received in revised form 10 October 2017; accepted 12 October 2017

**Abstract**

The article deals with the relationship of the fourth and fifth grade pupils to the subject of mathematics at the primary school. The partial objectives were: to analyze the current state of the problem solved on a global and domestic scale; the establishment of an appropriate research tool, its administration and the statistical processing of the data obtained to verify hypotheses. Additional goals were to determine the influence of gender, grade, age, education of the parents, and school location on pupil attitudes towards mathematics. A questionnaire was used as a research tool with a 5-point scaled Likert-type items, which was administered to 225 pupils of four primary schools.

**Keywords**: attitudinal analysis, student attitudes, perception of mathematics

**Classification**: B10

## Úvod

Dlouhodobý trend naznařuje pokles v úrovni matematických znalostí a matematického myšlení studentů středních i vysokých škol. Není možné na základě úspěšnosti v daném předmětu automaticky usuzovat na fakt, že daný předmět bude pro žáka oblíbený. Například Nicolaidou, Philipou (2003) odhalili, že ačkoliv japonští studenti předčí v matematice studenty z jiných zemí, mají často negativní postoj k matematice. Oproti tomu McCleod (1992) a Hammouri (2004) našli pozitivní vztah mezi mezi postoji a úspěchem v matematice. Oproti tomu výsledky žáků 4. ročníků v matematice (TIMMS 2015) byly lehce nadprůměrné. V matematice dosáhlo 9 zemí EU lepšího výsledku než ČR a čtyři země měly výsledek srovnatelný. Z dlouhodobého hlediska (1995 – 2007) byl zaznamenán statisticky významný pokles výsledků žáků v matematice. Pozitivní trend ve smyslu mírného zlepšení nastal v roce 2007, přesto však v roce 2015, byly zaznamenány horší výsledky než v roce 1995. Je příjemné konstatovat, že za posledních 8 let došlo u českých žáků k největšímu zlepšení ve zkoumaných oblastech matematiky ze všech 18 zemí, které se do šetření TIMMS 2007 a 2015 zapojily. Nepříjemným zjištěním je, že čeští žáci mají podprůměrnou motivaci učit se matematiku, mají malou důvěru ve své schopnosti, a také zájem žáků o studium matematiky poklesl. S tímto

* Corresponding author; email: vlchytry@gmail.com
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.15-23

souvisí výzkum Pavelkové a Hrabala (2012) jež zahrnoval 3108 žáků (151 tříd 25 základních škol) 6. až 9. ročníku. Výzkumníci hodnotili postoje žáků ke školním předmětům pomocí šesti uzavřených škálových položek s přihlédnutím ke známce na posledním vysvědčení. Zaměřili se na oblibu předmětu, obtížnost, přisuzovaný význam a sebehodnocení žáka v daném předmětu. Autoři tvrdí, že matematika je českými žáky považována za jeden z nejméně oblíbených a nejobtížnějších předmětů. Chvál (2003) metodou sémantického diferenciálu na vzorku 4351 žáků z 53 škol z 230 tříd od čtvrté třídy základní školy, po konečné ročníky škol středních, zjistil, že postoje českých žáků k matematice, se během školní docházky zhoršují. Děti zpravidla začínají školní docházku s pozitivním postojem k matematice (Ma & Kishor, 1997) a výrazný posun směrem k negativnímu postoji, se objevuje na počátku druhého stupně základní školy. Samotným přechodem na střední školu, se tento vztah v průměru nemění, ale uvedený pokles nadále pokračuje. Neopomenutelný není ani fakt, že řada výzkumů není věkově dostatečně vyhraněna (Ruffel a kol., 1998). Na základě šetření Cheung (1988) jež popisuje věk 11-13 let jako kritický z hlediska postoje žáka k matematice bude nadále v článku analyzována právě tato věková skupina.

## Analýza žákovských postojů a možnosti jejich měření

Vznik postojů bývá rozmanitý, zpravidla se však utváří jako následek vlastních osobních zkušeností, či v důsledku velmi závažného a silného prožitku (např. velkého citového otřesu), nebo převzetím hotových postojů od jiných osob velmi blízkých, respektovaných nebo milovaných (Vacínová, Trpišovská, Farková, 2008). Čím je postoj extrémnější, tím více bývá intenzivní a mnohem obtížněji ovlivnitelný (Vágnerová, 1997). V pedagogické praxi je však úplná znalost funkce postoje téměř nemožná, proto se snažíme postihnout funkce nejdůležitější a na ně se zaměřit (Paulík, 2003). Heider (1958) zastává názor, že lidé usilují o dosažení tzv. kognitivní rovnováhy. Disonance mezi postoji, vede ke stavu kognitivní nerovnováhy, která představuje pro jedince, jež ji prožívá, stresor. Kognitivní disonance je jedním z hlavních faktorů, které vedou ke změně postojů.

Vlastní postoje jsou složité psychické struktury nemohou být měřeny přímo. Na postoje lze pouze usuzovat z různých typů činností člověka (Kohoutek, 2004). Nejčastěji používanou metodou měření postojů, bývají dotazníková šetření, která využívají celou řadu škál, jakými jsou i) Likertova škála, ii) Guttmanova škála, iii) stupnice sémantického diferenciálu. (Vlčková, 2013).

## Vlastní výzkumné šetření

Výzkumný vzorek byl tvořen 225 žáky čtyř základních škol. Chlapci tvořili 52 % výzkumného vzorku (n = 117). Do výzkumného šetření byli zahrnuti žáci třetího, čtvrtého a pátého ročníku základních škol. Průměrný věk respondentů byl 9,61 roků a pohyboval se v rozmezí od 8 do 12 let. Zastoupení respondentů v jednotlivých ročnících bylo následující:
3. ročník – 61 respondentů, 4. ročník – 97 respondentů, 5. ročník – 67 respondentů. Podle oblíbeného předmětu lze žáky rozdělit do dvou skupin: první tvoří žáci, kteří jako svůj oblíbený předmět označili matematiku (n = 70), druhou část pak tvoří studenti s jiným oblíbeným předmětem než matematikou (n = 154).

Použitý výzkumný nástroj byl již v českém prostředí validizován v rámci výzkumu Prokopa a Komorníkové (2007). Pro zjišťování reliability použitých škál a jejich subškál byly použity standardní metody užívané v pedagogickém výzkumu. U nástrojů využívajících pro odpovědi respondentů pětistupňových Likertových škál (Likert, 1932) byl spočítán koeficient Cronbach $\alpha$ (Cronbach, 1951; McGartland Rubio, 2005). Zjištěná hodnota je v tomto případě

$\alpha$=0,89. Vzhledem ke skutečnosti, že obecně akceptovatelné hodnoty koeficientu jsou mezi 0,7 a 0,95 (Tavakol & Dennick, 2011) je možné nástroj použít. Vzhledem k jeho struktuře je možné jej rozdělit na tři části: **i)** demografické údaje (část A), **ii)** žákovské postoje k matematice (část B), **iii)** faktor spokojenosti žáka s jeho vlastním životem (část C). Poslední ze zmíňovaných faktorů je, vzhledem ke zkoumanému, spíše okrajový a proto mu nebude nadále věnována větší pozornost. K účelům vlastní analýzy dat byly formulovány hypotézy, které jsou zmíněny vždy u příslušné kapitoly. Z důvodu maximální přehlednosti je dále v textu věnována pozornost vždy nejdříve deskriptivní a následně induktivní analýze dat pro každou hypotézu zvlášť. Statistické veličiny uvedené v této části textu jsou používány ve shodě s odbornou statistickou literaturou (Hendl, 2012): **N** - četnost, **Ø** - průměr, průměrná hodnota, **Me** - medián, **Mod** - modus, **Min** - minimum, **Max** - maximum. Pokud došlo k identifikaci odlehlé hodnoty například pomocí kvantilového grafu, je vhodnější (než použití ne příliš rigorózních statistických metod) zkoumat, proč vůbec odlehlé hodnoty vznikly (to nelze ničím ekvivalentně nahradit). Pokud byla odlehlá hodnota identifikována, šetřili jsme, zda se nejedná o chybu v měření. Vzhledem k rozsahu souboru lze očekávat, že se vždy najde hodnota, která je odlehlá. Při odstraňování odlehlých nebo extrémních hodnot není možné postupovat mechanicky. Pro některé množiny dat jsou odlehlé hodnoty typickým jevem, což je nutné zohlednit (Hendl, 2012). Detekce odlehlých hodnot proběhla metodou vnitřních hradeb a ověřena Grubbsovým (využívá se za předpokladu normálního rozdělení dat) a Dean-Dixonovým testem (testování malých* souborů nebo souborů s neznámým rozdělením). Vlastní výzkumný nástroj tvořil 5-stupňový škálovaný dotazník Likertova typu obsahující 35 položek, kdy odpovědi se sčítaly. Bylo tak možné dosahnout hodnot v intervalu 35-175.

### *Vliv pohlaví na postoje k matematice*

| | B (postoj) | |
|---|---|---|
| | Chlapci | Dívky |
| N | 117 | 108 |
| Ø | 133,54 | 124,56 |
| Med | 134,00 | 122,00 |
| Mod | 122,00 | 113,00 |
| Min | 80,00 | 76,00 |
| Max | 168,00 | 167,00 |

**Tab. 1**: Vliv pohlaví na postoje k matematice

Neprojevil se velký rozdíl mezi chlapci a dívkami vzhledem k rozložení dat. Maxima i minima jsou přibližně srovnatelná. Rozdíly začínají být patrné ve chvíli, kdy pracujeme s ukazateli charakterizujícími míru (medián, průměr, modus). Na základě těchto hodnot je možné se domnívat, že mezi skupinami bude statisticky významný rozdíl, což budeme nadále ověřovat pomocí induktivní analýzy. Vzhledem k charakteru dat (porovnáváme dvě metrické hodnoty) je nejdříve nutné ověřit jejich normalitu. Testování normality dat probíhalo pomocí Shapiro-Wilkova testu normality (Shapiro & Wilk, 1965), kdy testujeme proti nulové hypotéze, že posuzovaná data mají normální rozdělení. Vzhledem k hodnotě p-level příslušného testu (p=0,010) dochází k zamítnutí $H_0$ o normalitě dat, využijeme pro srovnání mediánů hodnot u chlapců a dívek Mann-Whitney test (Mann & Whitney, 1947). Testuje se nulová hypotéza

* Za malé soubory jsou považovány soubory o četnostech 3-10 pozorování (viz např. Meloun & Militký, 2012).

říkající, že mediány hodnot chlapců a dívek jsou si rovny. Protože zjištěná hodnota p-level daného testu je menší než 0,05 (p=0,0001) zamítáme nulovou hypotézu a tvrdíme, že mezi chlapci a děvčaty je statisticky významný rozdíl v postojích k matematice. Vzhledem k hodnotám uvedeným v tab. 1 je zřejmé, že chlapci mají k matematice lepší postoje, jak dívky.

***Vliv věku na postoje žáka k matematice***

| B (postoj) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 8 let | 9 let | 10 let | 11 let |
| N | 24 | 81 | 80 | 37 |
| Ø | 134,75 | 129,23 | 128,14 | 128,05 |
| Med | 139,50 | 132,00 | 127,00 | 124,00 |
| Mod | 102,00 | 132,00 | 113,00 | 153,00 |
| Min | 102,00 | 76,00 | 77,00 | 83,00 |
| Max | 167,00 | 168,00 | 168,00 | 163,00 |

**Tab. 2**: Vliv věku na postoje žáka k matematice

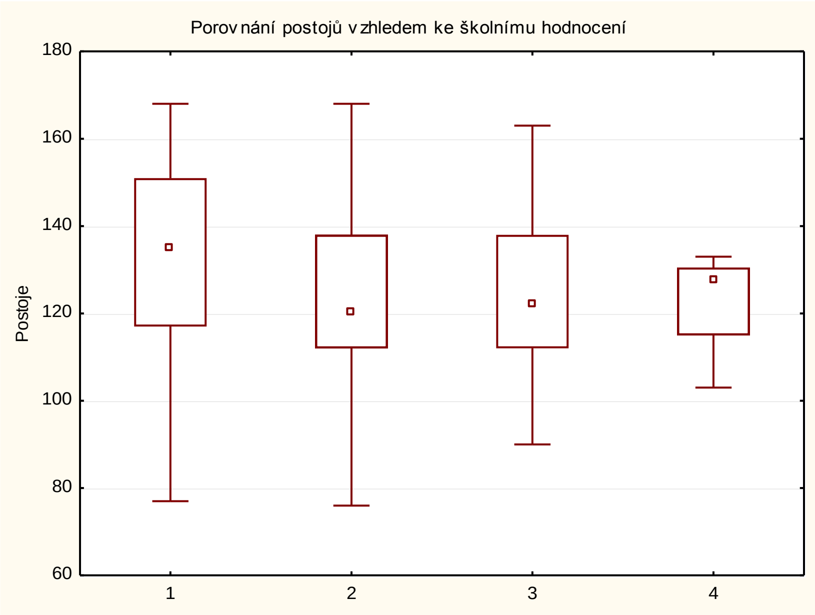
Patrný je mírný pokles hodnot v rámci ukazatelů charakterizujících míru polohy (medián, aritmetický průměr). Tato poloha mediánu vůči průměru, zřejmě indikuje zešikmení hodnot. Na základě tohoto poklesu lze předpokládat, že s přibývajícím věkem žáků, může klesat obliba matematiky, což se nadále ověří pomocí induktivní statistiky. Tuto situaci jsme se snažili ověřit tak, že jsme zjistili, zda jsou rozdílné postoje žáků vzhledem k věkovým skupinám. Vzhledem k nenormalitě (p<0,01 pro Shapiro-Wilkův test) dat byl pro toto šetření použit Kruskal-Wallisův test (Kruskal & Wallis, 1952). Testovala se nulová hypotéza říkající, že mediány hodnot jsou si rovny vzhledem k věku respondenta. Vzhledem k hodnotě p-level (p=0,72) není možné zamítnout nulovou hypotézu a vycházíme tak z předpokladu, že žáci v rozmezí věku 8 – 11 let mají stejné postoje k matematice.

***Vliv školního hodnocení z matematiky na postoje žáka k matematice***

| | B (postoj) | | |
|---|---|---|---|
| | Výborně | Chvalitebně | Dobře |
| N | 115 | 70 | 21 |
| Ø | 133,86 | 121,99 | 124,86 |
| Med | 135,00 | 120,50 | 122,00 |
| Mod | 99,00 | 138,00 | 104,00 |
| Min | 77,00 | 76,00 | 90,00 |
| Max | 168,00 | 168,00 | 163,00 |

**Tab. 3**: Vliv školního hodnocení z matematiky na postoje žáka k matematice

Je zřejmý zajímavý pokles hodnot pokud se zaměříme na ukazatele míry polohy (medián a průměr) mezi žáky, kteří obdrželi na vysvědčení výbornou známku, oproti zbývajícím žákům. Proti této skutečnosti stojí ukazatele variability, kde hodnoty dosahují stejných nebo téměř stejných hodnot. Pokud se podíváme na minima, dochází ke značnému rozdílu hodnot, mezi žáky s výborným a chvalitebným hodnocením oproti žákům, kteří mají na vysvědčení matematiku hodnocenou dobře. Maxima jsou téměř stejná. Z tabulky byly vyřazeny hodnoty 4 respondentů, kteří v dotazníku uvedli známku z matematiky dostatečnou, a 1 respondenta s hodnocením z matematiky nedostatečně. Tuto hypotézu jsme se snažili ověřit tak, že jsme zjistili, zda jsou rozdílné postoje žáků vzhledem k jejich školnímu hodnocení (konkrétněji známce z matematiky na posledním vysvědčení). Vzhledem k nenormalitě dat byl pro toto šetření použit Kruskal-Wallisův test. Testovala se nulová hypotéza říkající, že mediány hodnot značící postoj žáka k matematice jsou si rovny vzhledem ke školnímu hodnocení z matematiky. Na základě hodnoty p-level (p=0,002) je možné zamítnout nulovou hypotézu a tvrdit, že je rozdíl v postojích vzhledem ke školnímu hodnocení. Bližší informace je možné vidět z kvartilového grafu.




**Obr. 1**: Kvartilový graf porovnávající postoje žáků vzhledem ke známce z matematiky

Z grafu je na první pohled patrný významný rozdíl středních hodnot v postojích žáků s hodnocením výborně z matematiky, oproti zbývajícím kategoriím. Žáci s hodnocením chvalitebným, dobrým, či dostatečným, již vykazují více negativní postoje vůči matematice oproti výborným žákům. Žáci s hodnocením nedostatečným, nejsou vzhledem k nízkému počtu respondentů (jeden žák), součástí analýzy. Také žáků s hodnocením dosatatečně bylo velmi málo a do grafu jsou uvedeny pouze pro přehled.

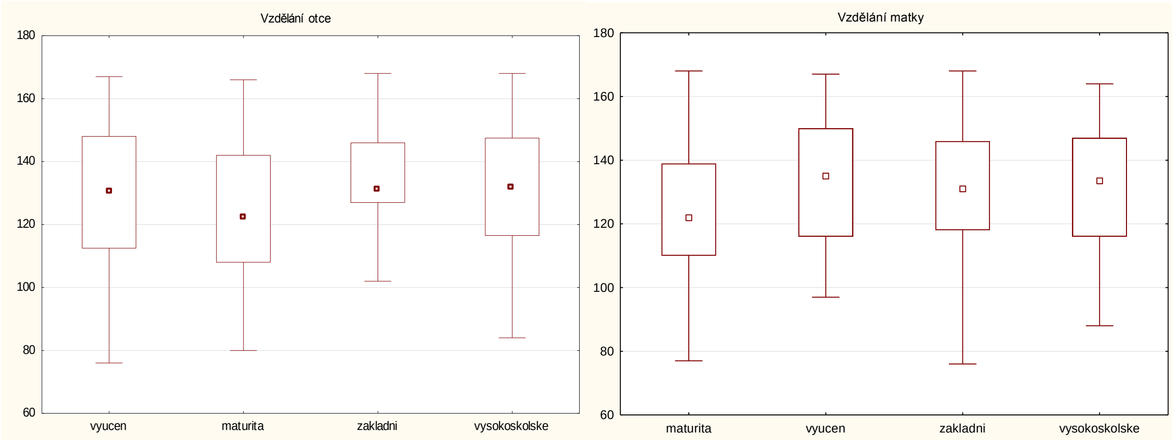
### *Vliv vzdělání rodičů na postoje žáka k matematice*

V tabulce jsou uvedeny následující zkraty: ZŠ – základní škola, VL – střední škola s výučním listem, SŠ – střední škola s maturitou, VŠ – vysoká škola.

| Vzdělání otce | Postoje | | | | Vzdělání matky | Postoje | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ZŠ | VL | SŠ | VŠ | | ZŠ | VL | SŠ | VŠ |
| N | 21 | 72 | 74 | 52 | N | 33 | 60 | 83 | 42 |
| Ø | 134 | 130 | 125 | 132 | Ø | 130 | 134 | 124 | 132 |
| Med | 131 | 131 | 123 | 132 | Med | 131 | 135 | 122 | 134 |
| Mod | 130 | 147 | 123 | 132 | Mod | 130 | 158 | 99 | 128 |
| Min | 102 | 76 | 80 | 84 | Min | 76 | 97 | 77 | 88 |
| Max | 168 | 167 | 166 | 168 | Max | 168 | 167 | 168 | 164 |

**Tab. 4**: Vliv vzdělání rodičů na postoje žáka k matematice

Na základě deskriptivní analýzy není možné dojít k jednoznačnému závěru a tak jsme přistoupi k induktivní analýze. Vzhledem k nenormalitě dat byl opro toto šetření použit Kruskal-Wallisův test. Testovala se nulová hypotéza říkající, že není statisticky významný rozdíl v postojích žáka vzhledem k dosaženému vzdělání otce či matky. Tuto situaci jsme rozdělili zvlášť pro otce a zvlášť pro matku. Vzhledem k testovým hodnotám p-level (p=0,0001 v případě vzdělání otce a p=0,0004 v případě vzdělání matky) dochází k zamítnutí $H_0$ pro obě tyto oblasti. Je tedy znatelný vliv vzdělání rodičů na postoje žáka k matematice. Blíže budeme celou situaci demonstrovat kvartilovým grafem.




**Obr. 2**: Kvartilový graf rozdílu v postojích žáků vzhledem ke vzdělání otce a matky

Z grafu je patrné, že žáci, jejichž otcové dosáhli základního a vysokoškolského vzdělání, vykazují kladnější postoje k matematice oproti zbývajícím kategoriím. Tato skutečnost byla patrna již z ukazatelů středních hodnot z tabulky č. 4 v deskriptivní části. Obecně však vzhledem k velikosti, rozložení a kolísavosti hodnot, nelze potvrdit hypotézu o pozitivním vlivu vzdělání otce na vztah žáka k matematice ve smyslu: čím větší vzdělání otce, tím lepší vztah žáka k matematice. V případě vzdělání matky je situace odlišná. Na základě kvartilového grafu je zřejmé, že žáci, jejichž matky dosáhly základního, středního odborného a vysokoškolského vzdělání, vykazují přibližně shodné postoje k matematice. Je zde však významný rozdíl těchto tří kategorií oproti žákům s matkami se středním odborným vzděláním s maturitou. Tito žáci vykazují méně pozitivní postoje k matematice oproti zbytku. Obecně však, vzhledem k velikosti, rozložení a kolísavosti hodnot docházíme (vzhledem k výše formulované hypotéze) ke stejnému závěru jako u otců. Vzdělání rodičů má v obou případech přibližně stejný vliv. Z obou grafů lze vysledovat statisticky významný pokles hodnot v postojích žáků, jejichž otcové či matky dosáhli středního odborného vzdělání s maturitou, oproti zbývajícím žákům.

## Závěr

Výzkumné šetření bylo zaměřeno na zjištění postojů žáků prvního stupně základních škol k vyučovacímu předmětu matematika. Kromě zjišťování celkové úrovně postojů žáků, byl také zjišťován vliv dílčích proměnných jako jsou pohlaví, ročník, věk a vzdělání rodičů. Z hodnot získaných během výzkumu, můžeme na zkoumaném vzorku tvrdit, že mezi chlapci a děvčaty je statisticky významný rozdíl v postojích k matematice. Přičemž chlapci v průměru dosáhli pozitivnějších postojů k matematice. Ke stejnému výsledku dospěli i Aiken (1976) a Betz (1978) taktéž tuto teorii potvrdili i Frost, Hyde, Fennema (1994). Ma & Kishor (1997) a Pajares & Graham (1999) ve svých studiích taktéž poukazují na kladnější postoje chlapců k matematice. Ukazuje se, že žáci ve věkovém rozmezí 8 – 12 let mají stejné postoje k matematice. Stejný závěr učinila ve své bakalářské práci Wolffová (2013), která použitím Tukeyova post-hoc testu potvrdila, že rozdíly mezi věkem a postojem k matematice nejsou statisticky významné. Tyto závěry jsou v rozporu s tvrzením Brusha (1980) a Meece (1981) jež zkoumali postoje k matematice u žáků z pohledu věku a zjistili, že postoj k matematice se s věkem zhoršuje. Stejného názoru je také Chvál (2013).

Z analýzy dat vyplynul významný rozdíl v postojích žáků s hodnocením výborně z matematiky, oproti zbývajícím kategoriím. Žáci s hodnocením chvalitebným, dobrým, či dostatečným, již vykazují více negativní postoje vůči matematice oproti výborným žákům. McCleod (1992) uvedl, že postoj žáka k matematice, má vliv na úspěch žáka v tomto předmětu. Hammouri (2004) ze svých výzkumů vyvodil závěr, že samotný postoj může mít vliv na úspěšnost v předmětu. V rozporu s prezentovanými výsledky je tvrzení Lindgrena, Silvy, Faraca a Da Rochy (1964), kteří tvrdí, že je mezi známkou a postojem k matematice sice pozitivní, ne však významný vztah.

Poslední zkouanou oblastí bylo vzdělání rodičů, které se ukázalo být, vzhledem k postoji žáka k matematice, diskutabilní. Dle Poffenbergera a Nortona (1959) rodiče ovlivňují postoj dětí třemi způsoby: 1. rodičovskými očekáváními úspěchu dítěte, 2. podporou rodičů, 3. vlastními postoji rodičů. Zjistili také, že postoje žáků jsou spíše pozitivně spojeny s vnímáním matematiky z pohledu otců. Mortimore a Blackstome (2002) nalezli významnou souvislost mezi povoláním rodiče a úspěchem v matematice. Zjistili větší průměrné skóre u žáků, jejichž otcové zastávali profesionální zaměstnání, oproti žákům, jejichž otcové zastávali funkci nekvalifikovaných manuálních pracovníků.

**Poděkování**

Výzkum byl proveden za přispění studentského grantu UJEP-SGS-172-03-01.

**Seznam literatury**

1. Aiken, L. (1978). Attitudes toward mathematics. *Review of educational research*. 40(4), 551-596
2. Betz, N. (1978). Prevalence, distribution, and correlates of math anxiety in college students. *Journal of Counseling Psychology,* 25(5), 441-448.
3. Cronbach, L. J. (1951). Coefficient Alpha and the Internal Structure of Tests. *Psychometrika, 16*(3): 297-334. DOI: 10.1007/BF02310555
4. Frost, L. A., Hyde, J. S., Fennema, E. (1994). Gender, mathematics performance, and mathematics related attitudes and affect: a meta-analytic synthesis. International Journal of Educational Research, 21(4), 373-385.
5. Hammouri, H. (2004). Attitudinal and motivational variables related to mathematics achievement in Jordan: findings from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS). *Educational Research* [online]. 46(3), 241-257 [cit. 2017-01-24]. DOI: 10.1080/0013188042000277313. ISSN 0013-1881. Dostupné z: http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0013188042000277313
6. Heider, F. (2008). *The psychology of interpersonal relations*, New York, Wiley, 1958
7. Hendl, J. (2012). *Přehled statistických metod.* Praha: Portál.
8. Cheung, K. C. (1988). Outcomes of Schooling: Mathematics Achievement and Attitudes towards Mathematics Learning in Hong Kong. *Mathematics Education and Culture* [online]. Dordrecht: Springer Netherlands, s. 209 [cit. 2017-01-24]. DOI:

10.1007/978-94-017-2209-4_6. ISBN 978-90-481-8457-6. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/978-94-017-2209-4_6
9. Chvál, M. (2013). Změna postojů českých žáků k matematice během školní docházky. *Orbis scholae*. 7(3), 49-71.
10. Kohoutek, R. (2004). *Sociální psychologie*. Brno: Institut mezioborových studií.
11. Kruskal, W. H. & Wallis, A. (1952). Use of Ranks in One-Criterion Variance Analysis. *Journal of the American Statistical Association, 47*(260): 583-621. DOI: 10.1080/01621459.1952.10483441
12. Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of psycholo*gy, 22, 5–55.
13. Lindgren, H. C., Silva, I., Faraco, I., Da Rocha, N. S. (1964). Attitudes toward problem solving as a function of success in arithmetic in Brazilian elementary schools. Journal of Educational Research, 58(4), 44-45
14. Ma, X.; Kishor, N. (1997) Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: A meta-analysis. *Journal for research in mathematics education*, 28 (1), 26-47.
15. Mann, H. B. & Whitney, D. R. (1947). On a Test of Whether One or Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. The Annals of Mathematical Statistics, 18(1): 50-60. DOI: 10.1214/aoms/1177730491
16. McGartland Rubio, D. (2005). Alpha Reliability. In Kempf-Leonard, K. [ed.] Encyclopedia of Social Measurement. Elsveir: 59-63. DOI: 10.1016/B0-12-369398-5/00395-9
17. McLeod, D.B. (1992) Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. In: Grows, D.A., Ed., Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing Company, New York, 575-596.
18. Meece, J. (1981). Individual differences in the affective reactions of middle and high school students to mathematics: A social cognitive perspective. Unpublished doctoral disertation, University of Michigan
19. Mortimore & Blackstone S. (2002) Mathematics and science achievement: effects of motivation, interest, and academic engagement. Journal of Educational Research, 95(6): 323–332.
20. Nicolaidou, M.; Philippou, G. (2003). Attitude towards mathematics, self-efficacy and achievement in problem-solving. Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG2/TG2_nicolaidou_cerme3.pdf
21. Pajares, F., & Graham, L. (1999). SE, motivation constructs, and mathematics performance of entering middle school students. Contemporary Educational Psychology, 24, 124-139. http://dx.doi.org/10.1006/ceps.1998.0991
22. Paulík, K. (2003). Nárys obecné psychologie. Vyd. 1. Ostrava: Ostravská univerzita.
23. Pavelková, I., & Hrabal, V. (2012). Mathematics in Perception of Pupils and Teachers. Orbis Scholae, 6(2), 119−132.
24. Poffenberger, T., Norton, D. A. (1959). Factors in the formation of attitudes towards mathematics. Journal of Educational Research, 52(5), 171-176.
25. Prokop, P., Komorníková, M. (2007). Postoje k prírodopisu u žiakov druhého stupňa základných škôl. Pedagogika , 57(1), 37–46.
26. Ruffell, M.; Mason, J.; Allen, B. (1998). Studying attitude to mathematics. Educational Studies in Mathematics.

27. Shapiro, S. S. & Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). Biometrika, 52(3 & 4): 591-6011. DOI: 10.1093/biomet/52.3-4.591
28. Tavakol, M. & Dennick, R. (2011). Making sense of Cronbach's alpha. International Journal of Medical Education, 2011(2): 53-55. DOI: 10.5116/ijme.4dfb.8dfd
29. Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). TIMSS 2007 International mathematics report. Chestnut Hill: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
30. Vacínová, M., Trpišovská, D., Farková, M. (2008). Psychologie. Praha: Univerzita Jana Amose Komenského
31. Vágnerová, M. (1997). Úvod do psychologie. Praha: Karolinum.
32. Vlčková, J. (2013), Přírodopis v očích žáků II. stupně základních škol, diplomová práce, 55. Str. Milun Kubiatko. Masarykova univerzita Pedagogická fakulta Katedra pedagogiky.
33. Wolffová, V. (2013). Vnímání matematiky žáky základních škol druhého stupně [online]. Brno, 2013 [cit. 2017-10-10]. Dostupné z: <http://is.muni.cz/th/327272/pedf_b/>. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Milan Kubiatko.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 2, p. 24 – 31
ISSN 2453-6083

# Vplyv IKT na trvácnosť žiackych vedomostí z geometrie – reflexia po roku

## The Influence of ICT on the Durability of Pupil´s Knowledge from Geometry – one-year Reflection

Renáta Vágová[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 14 September 2017 received in revised form 11 October 2017; accepted 16 October 2017

**Abstract**

In this article we concern with influence of ICT on the durability of pupil´s knowledge from Geometry based on recurrent experiment with examination of the pupil´s level of theoretical knowledge of axial and point symmetry and practical skills via GeoGebra software. The findings obtained from experimental control lesson are confronted with the conclusions of the other experts in this domain, too.

**Keywords**: DGS, Geometry, GeoGebra, axial symmetry, point symmetry

**Classification**: C73, Q73

### Úvod

Prítomnosť a vplyv informačných a komunikačných technológií (IKT) nemožno popierať a sú súčasťou nášho každodenného života. Vytvárajú technologickú kultúru, ktorá nás obklopuje a s ktorou sme nútení žiť, spolunažívať. Rozširujú naše mentálne i fyzické kapacity, ako aj možnosti sociálneho rozvíjania sa. (Graells, 2012)

V posledných rokoch je badateľný veľký rozvoj IKT, čo sa v súčasnosti prejavuje v každej oblasti ľudskej spoločnosti. Garza (2009) uvádza, že tvorba nových technológií formuje spoločnosť sústredenú na hľadanie, spracovávanie a využívanie informácií, čo sa odráža i v školskom prostredí. Cieľom moderného školstva je dosiahnuť integráciu technologických prostriedkov spojenú so vzdelávaním žiakov, študentov. Avšak so vzdelávaním, ktoré je v súlade s požiadavkami súčasného globalizovaného sveta. (Doria, 2014)

Dôležitým prvkom používania IKT v školskom prostredí je ich vplyv na edukačný proces. Preukázalo sa, že integrácia IK technológií spôsobila veľké zmeny rovnako vo forme komunikácie, ako aj vo forme vzdelávania a vzdelávania sa. Rozdiely medzi súčasným vyučovaním a vyučovaním na začiatku storočia prinútili učiteľov hľadať nové metódy, stratégie (didaktické, pedagogické, herné) s cieľom dosiahnuť čo najvyššiu kvalitu edukačného procesu. (Doria, 2014) Robová (2006) uvádza nasledovné pozitívne vplyvy IKT na vyučovací proces:

- názornosť vyučovania,

*Corresponding author; email: renata.vagova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.24-31

- aktivizácia študentov,
- obmedzenie práce mechanického charakteru,
- väčšia intenzita vyučovania,
- riešenie reálnych úloh,
- individuálny prístup k problémom a k žiakom.

Vyučovanie matematiky za pomoci IKT sa podľa Robovej (2006) v dnešnej dobe stáva takmer samozrejmosťou. Na druhej strane, využívanie modernej technológie vo vyučovacom procese závisí nielen od učiteľa, ale aj od technického vybavenia školy, schopností žiakov a pod.

S ohľadom na vyššie uvedené, tento článok sa venuje konkrétnej integrácii IKT do vyučovania matematiky na základnej škole, pričom nadväzuje na Škorecová (2015), Škorecová (2017). V uvedených prácach je detailne predstavený a experimentálne overený návrh cvičebnice pre žiakov 5. ročníka ZŠ. Experiment bol zameraný na výučbu pomocou dynamického geometrického softvéru GeoGebra a to za použitia moderných prostriedkov, akými boli tablety (nástroje pre žiakov) a interaktívna tabuľa (nástroj pre učiteľa). Vzhľadom na skutočnosť, že nebolo možné zabezpečiť väčšiu vzorku respondentov (participantov) a dlhodobejší zber údajov, vyhodnotenie experimentu bolo uvedené s kvalitatívnymi závermi o pozitívnom vplyve na motiváciu žiakov. Trvácnosť ich vedomostí overovaná nebola.

Podľa Žilkovej (2006) *„žiaci vzdelávaní prostredníctvom IKT vo vybraných celkoch matematiky dosahujú lepšie výsledky v riešení matematických úloh z hľadiska trvácnosti nadobudnutých poznatkov ako žiaci vzdelávaní tradičnou metódou (bez IKT)“.*

Nadväzujúc na uvedené tvrdenie sme zisťovali, akú trvácnosť majú vedomosti žiakov z experimentu popísaného v príspevku Škorecová (2017).

**Priebeh vyučovacej hodiny-experiment**

Overovacia (kontrolná) vyučovacia hodina bola zrealizovaná v septembri v školskom roku 2017/2018 presne po 1-ročnom časovom odstupe. V rámci kontrolnej vyučovacej hodiny sme chceli získať odpovede na nasledovné otázky:

a) Vedia žiaci zobrazovať útvary v osovej a stredovej súmernosti?

b) Vedia žiaci zobrazovať útvary v osovej a stredovej súmernosti v programe GeoGebra?

Experimentálna škola poskytla rovnaké podmienky ako pred 12 mesiacmi:

- vyučovanie sa uskutočnilo v rovnakej učebni, kde bola k dispozícii interaktívna tabuľa a školské tablety,
- žiaci boli rozdelení do tých istých dvojíc,
- každá dvojica mala pridelený tablet s rovnakým číslom ako počas experimentálneho vyučovania.

Učiteľka neinformovala žiakov o overovacej hodine, učivo si vopred nezopakovali a s tabletmi nepracovali na žiadnej vyučovacej hodine od skončenia experimentu.

Žiakom bol zadaný test, ktorý obsahoval jednu úlohu na osovú súmernosť a jednu úlohu na súmernosť stredovú.

**Testová úloha 1:** *Zostrojte ľubovoľný trojuholník ABC a zobrazte ho v osovej súmernosti, pričom os o leží mimo zostrojeného trojuholníka.*

**Testová úloha 2:** *Zostrojte ľubovoľný štvoruholník ABCD a zobrazte ho v stredovej súmernosti podľa stredu S, kde stred S je ľubovoľne zvolený.*

***Obrázok 1**: Žiaci 6. ročníka ZŠ počas overovacej vyučovacej hodiny .*

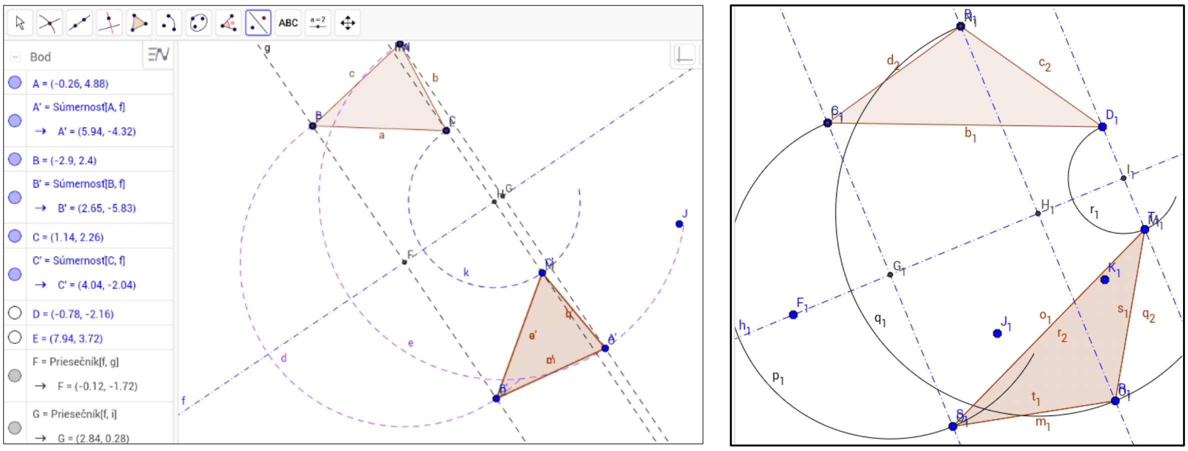
Úvodná časť vyučovacej hodiny bola zameraná na slovné zopakovanie si učiva. Žiakom boli položené nasledovné otázky:

- *Čo si predstavíme pod pojmom zobrazenie?*
- *Aké zobrazovania poznáme?*
- *Aký je rozdiel medzi osovou a stredovou súmernosťou?*
- *Ako sa nazýva dynamický softvér, v ktorom sme zobrazovali jednotlivé útvary?*
- *Pracovali ste s tabletmi počas vyučovacích hodín?*

Otázky boli kladené náhodne vybraným žiakom. Odpovede žiakov slúžili len ako „odrazový mostík“ pre ďalšie optimálne riadenie vyučovacieho procesu.

## Riešenie testových úloh

Nasledovalo riešenie 1. testovej úlohy. Každá dvojica si samostatne zostrojila ľubovoľný trojuholník ABC vo svojom tablete. Žiaci najskôr popísali jednotlivé kroky postupu konštrukcie a následne ich zostrojovali v programe GeoGebra. Z dôvodu, že žiaci pracovali v spomínanom dynamickom softvéri iba počas uvedeného experimentu, bolo potrebné vykonávať konštrukciu aj na interaktívnej tabuli. Avšak konštrukcia na interaktívnej tabuli neprebiehala simultánne so žiackymi konštrukciami. Najskôr žiaci popísali nasledujúci krok postupu konštrukcie, ďalej si spoločne povedali (zaspomínali), ako sa požadovaný útvar zostrojí v softvéri GeoGebra a následne ho skonštruovali vo svojich tabletoch.




***Obrázok 2:*** *Ukážky žiackych riešení testovej úlohy 1.*

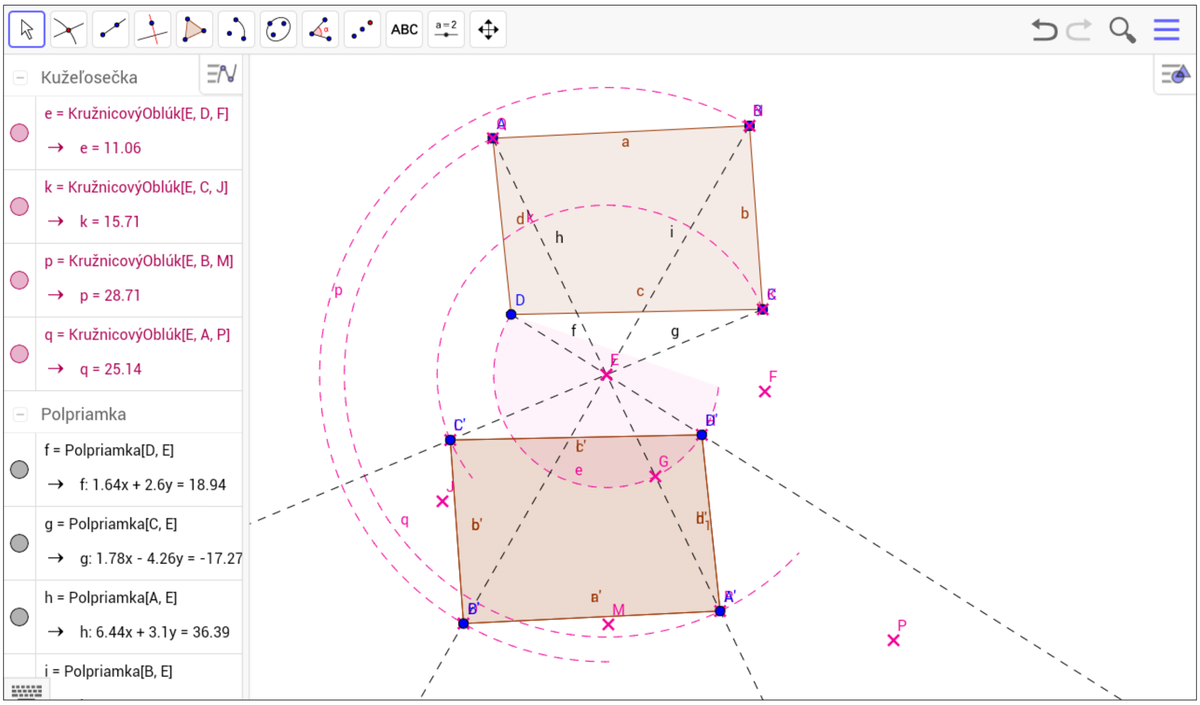
Konštrukcia požadovaného útvaru bola na interaktívnej tabuli prevedená až po vykonaní žiackych konštrukcií. Interaktívna tabuľa slúžila ako nástroj pre porovnanie učiteľových a žiackych konštrukcií, resp. ich prípadnú korekciu.

Na záver testovej úlohy, ak už žiaci zostrojili hľadaný obraz trojuholníka *ABC*, bolo potrebné vykonať skúšku správnosti, t. j. cez ikonu *Osová súmernosť*.

Ak obraz *A'B'C'* trojuholníka *ABC* splynul s obrazom zostrojeného cez ikonu osovej súmernosti, žiaci nadobudli presvedčenie, že konštrukciu vykonali správne (viď Obrázok 2).

Testová úloha 2 bola v porovnaní s prvou testovou úlohou riešená samostatnejšie. Žiaci si najskôr spoločne popísali jednotlivé kroky postupu konštrukcie, avšak samotnú konštrukciu už dvojice vykonávali samostatne. Obraz *A'B'C'D'* štvoruholníka *ABCD* nebol zostrojený na interaktívnej tabuli.

Ak žiaci nevedeli, ako postupovať pri konštrukcii obrazu útvaru v stredovej súmernosti alebo ako pracovať v programe GeoGebra, požiadali o pomoc učiteľa, resp. iných spolužiakov. Na záver opäť vykonali skúšku správnosti, tentokrát cez ikonu *Stredová súmernosť*.




***Obrázok 3:*** *Ukážky žiackych riešení testovej úlohy 2.*

**Vyhodnotenie vyučovacej hodiny**

Na základe pozorovania a záznamov z experimentu a analýzy žiackych riešení uvádzame závery v nasledujúcich tabuľkách.

Podľa údajov uvedených v Tabuľke 1 je možné považovať výsledky overovacej hodiny za dostatočne uspokojivé. Zaradenie tabletov do vzdelávacieho procesu umožnilo žiakom:

- pracovať vo dvojiciach, vzájomne spolupracovať, rešpektovať jeden druhého;
- pracovať vlastným tempom;
- nadobudnúť nové zážitky i skúsenosti;
- osvojiť si a zároveň rozvíjať zručnosti v dynamickom softvéri;
- možnosť tvoriť, realizovať sa a pod.

| | **Teoretické vedomosti** (počet žiakov) | **Praktické zručnosti v GeoGebre** (počet žiakov) |
|---|---|---|
| **Výborné** | 9 | 3 |
| **Priemerné** | 11 | 17 |
| **Podpriemerné** | 2 | 2 |

***Tabuľka 1:*** *Úroveň teoretických vedomostí a praktických zručností žiakov.*

K výsledkom v Tabuľke 1 pripájame komentár. Ukázalo sa, že viac ako polovica žiakov si pamätala postup konštrukcie na základe (farebného) vizuálneho zážitku. Žiaci si pamätali farebné odlišovanie hlavných a pomocných útvarov, rôzne grafické štýly znázorňovania priamok, farebné zvýraznenie dôležitých bodov, atď.

Uvádzame krátky citát jedného zo žiakov, ktorý popísal postup konštrukcie nasledovne:

> *„ Koľko bodov má ten útvar, tak toľko musíme spraviť aj priamok, aj kružníc, aj všetkého, aby sme dostali ten istý útvar na opačnej strane. A rysujeme to čiarkovane, aby sme vedeli, že to sú iba pomocné útvary.“*

V súlade so závermi Žilková (2006) sa aj my domnievame, že konkrétna integrácia tabletov a dynamického softvéru do vyučovacieho procesu mali pozitívny dopad na trvácnosť nadobudnutých poznatkov. Následne uvádzame kvalitatívne zhodnotenie riešení oboch testových úloh.

**Testová úloha 1**

| **Úspešnosť riešenia testovej úlohy 1** (počet žiakov) | | | |
|---|---|---|---|
| **Áno** | | **Nie** | |
| **Samostatná práca** | **Pomoc učiteľa (spolužiakov)** | **Technické problémy** | **Nedostatok vedomostí** |
| 3 | 13 | 4 | 2 |

***Tabuľka 2:*** *Súhrn výsledkov riešenia testovej úlohy 1.*

Komentár k výsledkom v Tabuľke 2:

- Obraz *A’B’C’* trojuholníka *ABC* sa podarilo zostrojiť 8 z 11 dvojíc.
- Dve dvojice mali technické problémy s prácou v dynamickom softvéri, avšak postup konštrukcie pri zobrazovaní trojuholníka *ABC* teoreticky ovládali.
- Jedna dvojica žiakov nemala dostatok teoretických vedomostí týkajúcich sa tematického celku a zručnosť pri práci v programe bola taktiež nedostatočná. Spomínaná dvojica mala rovnaké problémy aj počas experimentu realizovaného pred rokom.

**Testová úloha 2**

| **Úspešnosť riešenia testovej úlohy 2** (počet žiakov) | | | |
|---|---|---|---|
| **Áno** | | **Nie** | |
| **Samostatná práca** | **Pomoc učiteľa (spolužiakov)** | **Technické problémy** | **Nedostatok vedomostí** |
| 5 | 15 | 0 | 2 |

***Tabuľka 3:*** *Súhrn výsledkov riešenia testovej úlohy 2.*

K výsledkom v Tabuľke 3 pripájame komentár:

- Úlohu samostatne vyriešilo 5 žiakov z 22.
- Správne zostrojilo obraz požadovaného útvaru 10 z 11 dvojíc.
- Rozdiel medzi dvojicami bol iba v čase, za ktorý sa im podarilo zostrojiť obraz zadaného útvaru.

- Ak niektorá z dvojíc nevedela, ako postupovať pri konštrukcii obrazu štvoruholníka, mohli sa spýtať susednej dvojice. Prípadné technické nedostatky žiakom pomohli vyriešiť učitelia alebo opäť iná úspešná dvojica.
- Hľadaný obraz štvoruholníka sa nepodarilo zostrojiť tej istej dvojici, ktorá bola neúspešná v prvej testovej úlohe. V porovnaní s prvou testovou úlohou však boli žiaci úspešnejší a aj prácu so softvérom hodnotili ako technicky jednoduchšiu.

**Celkové zhodnotenie výsledkov**

Môžeme teda skonštatovať, že rozdiel výsledkov experimentu a aktuálnych výsledkov overovacej hodiny je minimálny. Žiaci, ktorí dosahovali nadpriemerné výsledky pred 12 mesiacmi, boli úspešní aj počas overovacej hodiny. Počas diskusie nám prezradili, že si program nainštalovali aj doma do svojich počítačov.

Taktiež zastávame názor, že za vysokým percentom úspešnosti sa skrýva nielen využitie programu doma, ale aj možnosť pracovať vo dvojiciach.

Ďalším možným faktorom ovplyvňujúcim výsledky bola aj pozitívna pracovná klíma v triede. Sami žiaci nám s odstupom času povedali: *„nemali sme pocit, že sa učíme matiku“*. Žiaci nadobudli pocit neformálneho učenia sa. Potešujúce bolo najmä zistenie, že si žiaci pamätali pred rokom zavedené *„pravidlo KPK“* (kolmica, priesečník, kružnica). Išlo/ide o mnemotechnickú pomôcku pri práci so softvérom. Poznamenávame, že toto pravidlo využívali najmä tí žiaci, ktorých celkové výsledky z matematiky boli na podpriemernej úrovni.

Objektívne treba uviesť, že problematickejšou časťou overovacej hodiny bola práca so samotným programom. Riešenie prvej testovej úlohy bolo náročnejšie v porovnaní s druhou testovou úlohou. Žiaci sa rozpamätávali, ako zostrojiť jednotlivé útvary v programe GeoGebra. Z údajov v Tabuľke 1 vidieť, že iba 3 žiaci by vedeli zostrojiť obraz jednotlivých útvarov aj bez úvodného opakovania. Napriek tomu sa domnievame, že vzhľadom na krátkosť zrealizovaného experimentu boli žiacke zručnosti viac než postačujúce.

**Záver**

> *"Neintegrovať digitálne technológie do oboch týchto rolí, do učenia aj učenia sa, znamená prehlbovať priepasť medzi školou a reálnym životom, a teda ďalej znižovať motiváciu a dôveru žiakov vo formálne vzdelávanie." (Kalaš, 2013)*

Súčasný digitálny svet si vyžaduje začlenenie IKT do všetkých odvetví nášho života. Je opodstatnené položiť si otázku, či moderný spôsob vyučovania (s IKT) prináša lepšie výsledky ako tradičný spôsob vyučovania (bez IKT). Vo svete sa realizovalo a stále realizuje množstvo výskumov, ktoré sa zaoberajú otázkou skvalitnenia vyučovacieho procesu za podpory informačných technológií. Je možné skonštatovať, že výsledky rôznych kvalitatívnych výskumov preukazujú zlepšenie v učení sa matematiky v rôznych aspektoch. (Vaníček, 2009)

Výsledky, ktoré sme získali aktívnym pozorovaním na overovacej vyučovacej hodine, sú v súlade s tvrdeniami vyššie spomínaných výskumov. Na základe spozorovaného dospievame k záveru, že využitie IKT malo pozitívny dopad na trvácnosť žiackych vedomostí u sledovaných žiakov. Komplexne si dovolíme konštatovať, že si žiaci po 12 mesačnom odstupe učivo pamätali a po krátkom opakovaní vedeli vykonávať konštrukcie v programe GeoGebra.

Ak jednotlivo porovnáme žiacke výsledky dosiahnuté počas experimentu a počas overovacej vyučovacej hodiny, rozdiely sú minimálne. Zohľadňujúc fakt, že žiaci po skončení experimentu nepracovali s tabletmi na žiadnej vyučovacej hodine, úroveň ich technických zručností bola viac než uspokojivá. Je dôležité poznamenať, že naším primárnym cieľom bolo žiakov naučiť zobrazovať útvary v osovej a stredovej súmernosti, t. j. nie ich naučiť pracovať s programom GeoGebra. Dynamický softvér slúžil ako nástroj pre lepšie a efektívnejšie osvojenie si poznatkov.

Ako uvádza Kalaš a kol. (2013), v súčasnom svete je dôležité integrovať digitálne technológie do procesu učenia a učenia sa. V opačnom prípade by to znamenalo oddeľovať školu od reálneho života. Technológie boli vytvorené so zámerom uľahčiť nám prácu, ale aj činnosti bežného života. Ak sa ich učitelia naučia využívať efektívne, vyučovacie hodiny budú pre žiakov motivujúce, tvorivé, zážitkové a je tu väčšia pravdepodobnosť trvalého osvojenia si poznatkov.

**Literatúra**

Graells, P. M. (2012). *Impacto de las TIC en la educación: funciones y limitaciones.* Alicante, España: Revista de investigación

Silveyra de la Garza, M. (2009). *La multimodalidad y las interacciones dentro del aula en distintas áreas del currículum aducativo mexicano: Un estudio comparativo con diferentes heramientas tecnológicas.* Monterrey, Nuevo León: Red de Investigación e Innovación en Educación del Noreste de México, Comité Regional Norte de Cooperación con la Unesco

Doria, C. A. H, Zermeño, M. G. G., Arredondo, M. B. (2014). *Inclusión de las tecnologías para facilitar los procesos de enseñanza – aprendizaje en ciencias naturales.* Revista electrónica: Actualidades Investigativas en Educación

Robová, J. (2006). Vliv ICT na školskou matematiku. In: *Zborník príspevkov z 3. žilinskej didaktickej konferencie s medzinárodnou účasťou „Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách*“. Žilina: FPV Žilinskej univerzity v Žiline. ISBN: 80-8070-557-7

Škorecová, R. (2015). *Výučba geometrie na ZŠ pomocou DGS Geogebra*. Nitra: FPV UKF v Nitre. str. 381 – 385. ISBN: 978-80-558-0791-1

Škorecová, R. (2017). *Výučba geometrie pomocou DGS na základnej škole* [Diplomová práca]. Nitra: FPV UKF v Nitre

Škorecová, R. (2017). *Vyučovanie osovej a stredovej súmernosti prostredníctvom softvéru GeoGebra*. Nitra: FPV UKF v Nitre. Str. 520 – 527. ISBN: 478-80-558-1174-1

Žilková, K. (2006). Výsledky verifikácie vplyvu IKT v matematickom vzdelávaní. In: *Zborník príspevkov z 3. žilinskej didaktickej konferencie s medzinárodnou účasťou „Nové trendy vo vyučovaní matematiky a informatiky na základných, stredných a vysokých školách*“. Žilina: FPV Žilinskej univerzity v Žiline. ISBN: 80-8070-557-7

Kalaš, I. a kol. (2013). *Premeny školy v digitálnom veku.* Bratislava: SPN – Mladé letá

Vaníček, J. (2009). *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.* Praha: PF UK v Prahe

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 2, p. 32 – 37
ISSN 2453-6083

# Krátky pohľad na historické riešenia starovekých geometrických úloh

## Brief Look at History of Solution of Geometric Problems of Antiquity

Timotej Šumný[a]

[a*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,*

Received 19 September 2017; received in revised form 5 October 2017; accepted 17 October 2017

**Abstract.** In history of Mathematics many examples and tasks have been occurred which motivate mathematician to progressive research and developing further mathematical branches. Through an analysis of literary sources published in the Czech and Slovak Republic over the past century this paper presents a brief look at this kind of tasks like are famous geometric problems of antiquity.

**Keywords**: Euclidean construction, angle trisection, circle squaring, cube duplication, constructible polygon

**Classification**: A20, A50

## Úvod

V histórií matematiky sa objavili mnohé geometrické problémy, ktoré svojou náročnosťou ovplyvnili rozvoj matematiky po mnohé staročia. K týmto úlohám patrili hlavne klasické úlohy, akými boli duplicita kocky, kvadratúra kruhu, trisekcia uhla, konštrukcia pravidelných mnohouholníkov a rektifikácia kružnicového oblúka. Ukázalo sa, že problém ich riešenia úzko súvisel s dovtedy zaužívanou geometrickou tradíciou, kde sa vyžadovalo zostrojiť riešenie ako čisto euklidovskú konštrukciu.

Poznamenávame, že pod euklidovskou konštrukciou sa rozumela (a rozumie) taká geometrická konštrukcia, ktorá sa dá realizovať len pomocou kružidla a lineára (pravítka bez vyznačenej mierky). Ukázalo sa, že technická prax bolo nútená uspokojiť s približnými konštrukciami. Hoci mnohé riešenia viedli k približnej konštrukcii, kde odchýlka v presnosti bola menšia ako hrúbka tuhy ceruzky, úlohy stále dávali podnet k ďalšiemu bádaniu a k hľadaniu iného, exaktnejšieho riešenia.

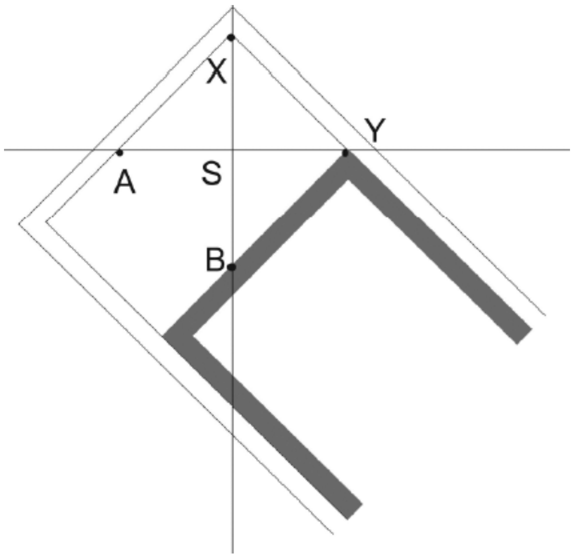
V tomto článku podáme stručný prehľad o domácej i zahraničnej literatúre, ktorá sa venuje riešeniu problematiky niektorých, vyššie uvedených, historických úloh.

### *Rôzne prístupy k riešeniu*

Ako sme už spomenuli, klasické grécke problémy (duplicita kocky, kvadratúra kruhu, trisekcii uhla, konštrukcia pravidelných *n*-uholníkov, rektifikácia kružnicového oblúka) sú úlohy historické. O ich didaktickom význame ako silnej motivácii pojednáva kniha (Hejný, 1989). Ide o čitateľovi najdostupnejšiu publikáciu, kde sa píše: *„Klasické problémy po mnohé staročia motivovali, usmerňovali a testovali rozvoj matematiky. Preto ich pomenujeme strategické. ...Strategický motív plní v žiakovej psychike dve funkcie: podnecuje záujem žiaka*

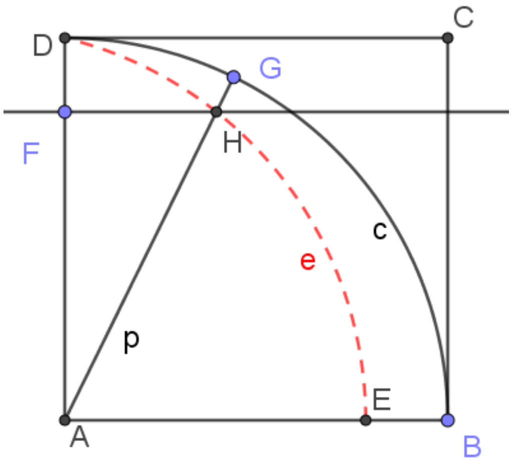
*Corresponding author; email: timotej.sumny@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.32-37

*a ukazuje mu smer*." Napríklad v uvedenej literatúre sa uvádza riešenie problému duplicity kocky pomocou dvoch špeciálnych, do seba zapadajúcich posuvných rámov, tzv. ***križiaka***.



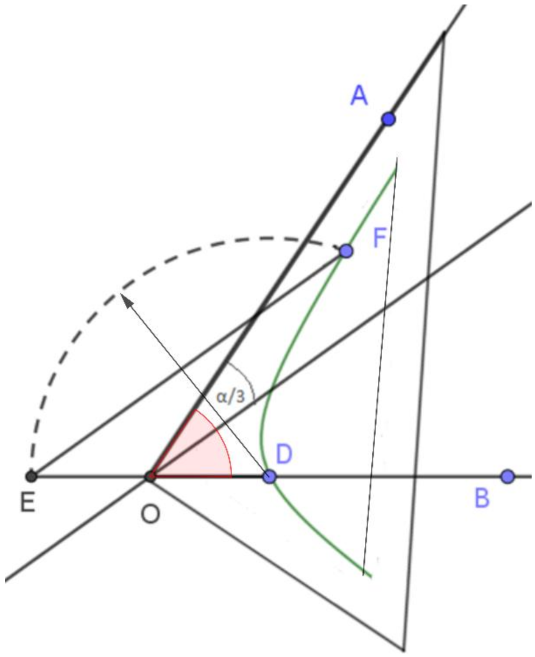

*Obrázok 1. Riešenie problému duplicity kocky pomocou križiaka podľa (Hejný, 1989]*

V uvedenej publikácii nájde čitateľ aj riešenie problému trisekcie uhla. Uvádza sa , že asi v 4. st. pred. n. l. Hippias navrhol krivku, tzv. kvadratix, pomocou ktorej je možné vykonať trisekciu uhla i kvadratúru kruhu.




*Obrázok 2. Kvadratix a jeho konštrukcia podľa Hippiasa*

Zaujímavé riešenie trisekcie uhla nájdeme v práci (Langr, 1912), v ktorej autor rieši trisekciu ostrého uhla pomocou špeciálneho pravítka. V tomto prípade pravítko (lineár) nahrádza trojuholníkovým pravítkom s uhlami $90°$ , $60°, 30°$ a špeciálnym výrezom, ktorý umožňuje konštrukciu rovnoosej hyperboly. V článku sa uvádza postup, ako je možné pomocou tohto špeciálneho pravítka uskutočniť trisekciu ľubovoľného uhla.




*Obrázok 3. Riešenie problému trisekcie ostrého uhla podľa (Langr, 1912)*

Zaujímavá je publikácia (Seifert, 1951), kde nájdeme riešenie problému trisekcie uhla α založené na algebraicko-geometrickej metóde. Riešením je zostrojenie úsečky, ktorej dĺžka je koreňom algebrickej rovnice 3. stupňa

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0, \text{ kde } tg\alpha = x, \; tg(3\alpha) = a$$

odvodeného cez vzorec

$$tg(3\alpha) = \frac{3tg\alpha - tg^2\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}. \frac{\alpha}{3}$$

História ukázala, že algebra má „silný nástroj“ na riešenie v podobe algebrizácie geometrickej úlohy. Samotná algebraicko-geometrická metóda je jednou zo štandardných metód riešenia geometrických úloh.

Historický pohľad na problém riešenia gréckych úloh algebraicko-geometrickou metódou nájde čitateľ v práci (Čižmár, 2009).

V práci (Kvazs, 2007) autor popisuje dôkazy neriešiteľnosti niektorých problémov v zmysle euklidovských konštrukcií a jeho postup korešponduje s historickým vývojom podobným tomu, ako Descartes postupoval v diele Geometria (Descartes, 1637 ).

Základná myšlienka vychádza z toho, že konštrukcia súčtu, rozdielu, súčinu a podielu dvoch úsečiek, ako aj konštrukcia odmocniny dĺžky známej úsečky tvorí algebrické pole. Samotný bod považujeme za konštruovateľný, ak vieme určiť obe jeho súradnice.

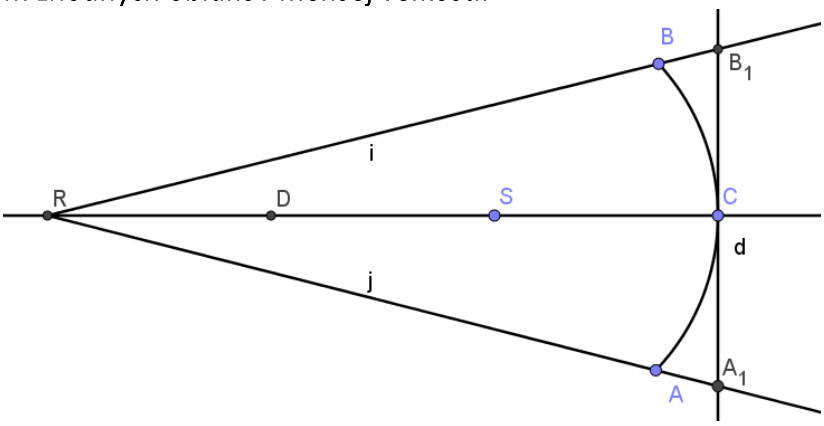
Ak pre prvky množiny $P_0 = \{A[0,0]\,, B[0,1]\}$ použijeme konečný počet konštrukcií akými sú zostrojenie priamky určenej dvoma bodmi, zostrojenie kružnice, určenej stredom a bodom, potom priesečníky všetkých kružníc a priamok pomocou sú tiež body konštruovateľné.

Z toho vyplýva, že geometrická konštrukcia je vlastne postupnosť rozširovania východzieho poľa. Ide o riešenie sústavy

$$ax + by = c$$
$$(x-d)^2 + (y-e)^2 = r^2.$$

Konštruovateľné body sú teda body, ktoré majú racionálne súradnice alebo sú kvadratickým rozšírením poľa racionálnych čísel.

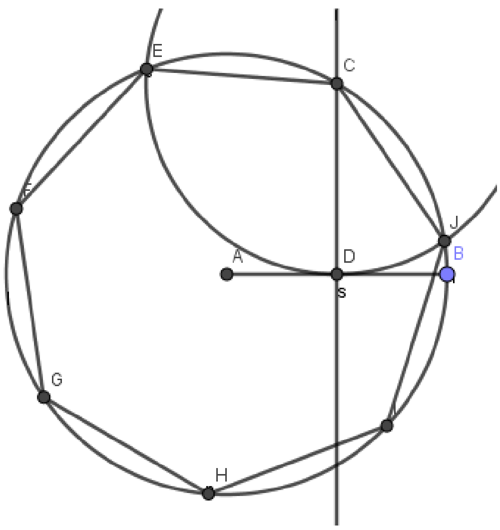
K najznámejším riešeniam jedného z problémov – rektifikácii kružnice – patrí tzv. Sobotkova rektifikácia kružnicového oblúka, ktorá sa zaraďuje medzi približné konštrukcie. V knižke (Štalmášek, 1959) sa uvádza konštrukcia úsečky, ktorá má rovnakú dĺžku ako kružnicový oblúk. Odchýlka je najviac 0,005 polomeru oblúka, pričom túto hodnotu nadobúda pri oblúku so stredovým uhlom $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Ak rektifikujeme oblúk väčší ako $\frac{\pi}{6}$ je vhodné ho rozdeliť na viac navzájom zhodných oblúkov menšej veľkosti.




*Obrázok 4. Sobotkova konštrukcia rektifikácie kružnicového oblúka*

Ako sme uviedli v úvode, technická prax vyžadovala konštrukcie pravidelných mnohouholníkov (súčiastky strojov a pod.) a uspokojila sa s približnými konštrukciami pomocou kružidla a pravítka.

Jednoduché postupy nájdeme napríklad vo viacerých učebniciach technického kreslenia alebo v dostupných učebných textoch, ako napr. (Holoubek, 1995).




*Obrázok 5. Konštrukcia pravidelného 7 - uholníka podľa (Holoubek, 1995) .*

Poznamenávame, že v zahraničnej literatúre nájdeme z posledného obdobia prevažne učebné texty, ktoré poukazujú na euklidovské konštrukcie, klasické grécke úlohy a algebraizáciu geometrie.
Ide najmä o publikácie (Hogben, 2004), (Klein, 1894), (Gleason, 1988), či dôveryhodné internetové zdroje ako Wolfram MathWorld.
Napr. v Reddy, 2015 sa uvádza aproximácia $\pi$ a jej význam pre riešenie problému kvadratúry kruhu a duplicity kocky. Pomocou nerovnosti

$$\pi = \frac{obvod\ kružnice}{priemer\ kružnice} > \frac{obvod\ vpísaného\ mnohouholníka\ do\ kružnice}{priemer\ kružnice}$$

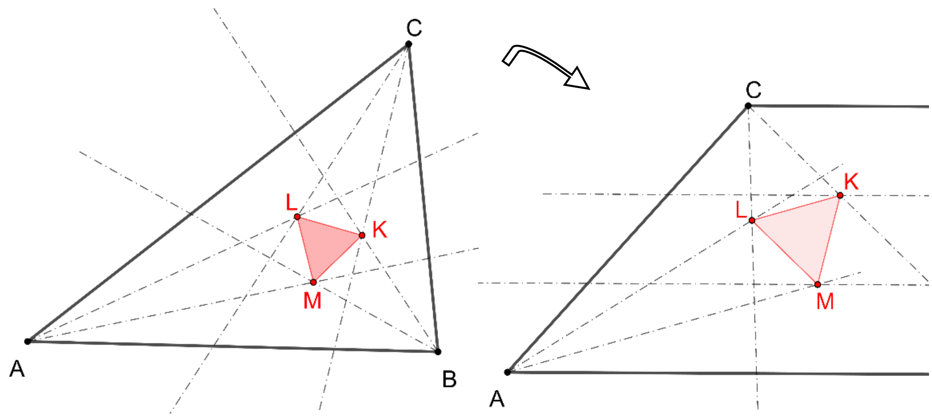
autor určuje $\pi \approx \frac{14-\sqrt{2}}{4}$

a taktiež využíva nerovnosť na riešenie problému duplicity kocky. Odvádza pri tom približnú hodnotu $\sqrt[3]{2} \approx \frac{\sqrt{89+5\pi^2-42\pi}}{2}$

**Záver**

Konštrukcie geometrických útvarov patria k dôležitej časti matematiky a jej využitia pre technickú prax. Mnohé úlohy svojou náročnosťou podnietili rozvoj približných konštrukcií, ale aj ponúkli otázku, či existuje postup pre euklidovskú konštrukciu útvaru. Prepojením geometrie a algebry bolo možné odvodiť podmienky, kedy je úloha riešiteľná euklidovskou konštrukciou. Pri úlohách, ktoré sa ukázali ako euklidovsky neriešiteľné sa začali vyvíjať postupy, ktorými síce dostaneme približné, ale na tolerovanú odchýlku, postačujúce riešenie.

Rozvojom výpočtovej techniky a počítačovej grafiky sa mnohé úlohy stávajú elementárnymi. Napríklad pomocou dynamického geometrického softvéru nie je problém vytvoriť pravidelný n-uholník so zanedbateľnou odchýlkou od rozmerov „ideálneho" geometrického útvaru. To je zrejme dôvod, prečo sa novšie učebné texty zamerané na približné konštrukcie, vyskytujú zriedka.
V úvode sme poznamenali, že historické grécke úlohy mali významný vplyv na rozvoj geometrie a domnievame sa, že aj dnes prestavujú významný motivačný impulz. Príkladom je známa Morleyova veta o rovnostrannom trojuholníku. Pomocou dynamických geometrických programov sa dá nielen pekne demonštrovať, ale aj zovšeobecniť tak, ako naznačuje obr. 6.




*Obrázok 6. Zovšeobecnenie známej Morleyho vety. Zdroj https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Morley.shtml*

**Poďakovanie**

Článok je podporovaný projektom UGA - VII/18/2017 *Analýza metód riešenia geometrických úloh smerujúcich ku zostaveniu kubickej rovnice.*

**Literatúra**

[1] HEJNÝ, Milan, et al. *Teória vyučovania matematiky 2*. SPN, 1989.
[2] LANGR, Josef. Trisekce úhlu zvláštním pravítkem. *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, 1912, 41.4: 617-620 Dostupné na: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/122083/CasPestMatFys_041-1912-4_10.pdf . Citované online: 10.9.2017
[3] SEIFERT, Ladislav. Kubické a bikvadratické problémy. *Kubické a bikvadratické problémy*, 1951, 11-100. 5
[4] ČIŽMÁR, Ján. Aproximatívne geometrické konštrukcie. *Zborník zo sympózia o počítačovej geometrii SCG 2009*
[5] ČIŽMÁR, Ján. *Geometrická algebra v praxi*. *ActaFac. Paed. Univ. Tyrnaviensis, Ser. C, 2009, no. 13, pp. 3-9*
[6] KVASZ, Ladislav. Vznik algebraickej symboliky. *Dva dny s didaktikou matematiky*, 2007
[7] KVASZ, Ladislav, Kapitoly z dejín algebry. Dostupné na: http://www.matika.sk/archiv/kvasz/Dejalg/Cast7/Part7-1.htm Citované online: 10.9.2017
[8] DESCARTES, René: Geometrie. Oikoymenh, Praha, 2010, 106 strán
[9] ŠTALMAŠEK, Ján. *Geometrické konštrukcie*. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, 1959.
[10] GÁBOROVÁ, Petra. *Technické kreslenie*, Dostupné na: http://www.tek.chytrak.cz/konstrukcie.htm Citované online: 10.9.2017
[11] HOLOUBEK, Vojtech. Technické kreslenie pre 3. roč. *SOU–mechanik strojov a zariadení. ALFA SNTL*, 1995.
[12] HOGBEN, Leslie. LAMPHIER, Lesley: Geometric Contruction, Iowa State University MSM Creative Component Fall 2004. 2004.
[13] KLEIN, Felix; BEMAN, Wooster Woodruff; SMITH, David Eugene. *Famous problems of elementary geometry: the duplication of thecube, the trisection of anangle, the quadrature of the circle (1894)*. Courier Corporation, 2003.
[14] GLEASON, Andrew M. Angle trisection, the heptagon, and the triskaidecagon. *Amer. Math. Monthly*, 1988, 95.3: 185-194.
[15] WEISSTEIN, Eric W. "Geometric Construction." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/GeometricConstruction.html
[16] REDDY, Sarva Jagannadha. *Doubling the cube in terms of the new Pi value (A geometric construction od cube equal to 2.)* IJESRT 2015
[17] Morley Triangle. Cut-the-knot. Dostupné na : https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Morley.shtml. Citované online: 10.9.2017

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 2, p. 38 – 43
ISSN 2453-6083

# Matematická gramotnosť študentov predprimárneho vzdelávania v oblasti Geometria a meranie

## Students´ Mathematic Literacy of Pre-primary Education in Domain Geometry and Measuring

Lucia Rumanová[a*] – Júlia Záhorská[b]

[a, b*]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 8 October 2017; received in revised form 15 October 2017; accepted 22 October 2017

**Abstract**

Developing geometric thinking is necessary for all age groups of children through various appropriate activities. Therefore, understanding this concept is also important for future teachers at kindergarten. This didactic article presents results obtained from testing students of bachelor's study at university. The results listed in this article are based on one test focused on basic geometric knowledge of students. Selected students are from the study field Pre-school and Elementary Education and their knowledge are necessary for course called Geometry and Measuring. The results obtained are not generalized.

**Keywords**: future teachers, geometry, test, solutions, evaluation.

**Classification**: D32, D62, G42

## Úvod

Matematickej gramotnosti je venovaná pozornosť v každom Štátnom vzdelávacom programe (ďalej ŠVP), teda aj v ŠVP pre materské školy. Rôzne výskumy v predprimárnom a primárnom vzdelávaní poukazujú na jej klesajúcu úroveň (viď [1], [2]).

Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách sústreďuje pozornosť na rozvoj geometrických poznatkov detí vo vzdelávacích štandardoch koncipovaných do jednej podoblasti *Geometria a meranie* – vzdelávacia oblasť *Matematika a práca s informáciami*. Táto podoblasť sa zameriava na orientáciu v priestore a rovine, deti sa v nej zoznamujú s najjednoduchšími geometrickými útvarmi a ich porovnaním a meraním. [3] Zvládnutie obsahu vzdelávacieho programu je jednou z podmienok dosiahnutia kľúčových kompetencií, ale aj dôležitou súčasťou prípravy dieťaťa v materskej škole na vstup do vyučovacieho procesu základnej školy.

Katedra matematiky na Fakulte prírodných vied UKF v Nitre zabezpečuje pre odbor predškolská a elementárna pedagogika vyučovanie predmetu Geometria a meranie v príprave budúcich učiteľov, ktorého obsah je orientovaný na daný tematický okruh ŠVP. V nasledujúcich častiach článku uvedieme a popíšeme výsledky študentov, ktoré boli získané z nami vytvoreného testu. Cieľom testu bolo zmapovať geometrické vedomosti a zručnosti,

*Corresponding author; email: lrumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.2.38-43

ktorými disponujú študenti a sú nutné pre ďalšie štúdium v danom študijnom odbore. Zisťujeme teda ich vstupné vedomosti, pretože v rámci svojho vysokoškolského vzdelávania zatiaľ neabsolvovali predmet s geometrickým zameraním.

**Charakteristika výskumnej vzorky a nástroja**

Predmet Geometria a meranie je vyučovaný v 2. ročníku bakalárskeho štúdia odboru predškolská a elementárna pedagogika Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre. Každý študent by si po absolvovaní daného predmetu mal pamätať a porozumieť poznatkom o základných geometrických útvaroch, pochopiť polohové a metrické vlastnosti rovinných a priestorových útvarov. Taktiež by mal vedieť analyzovať a správne interpretovať súvisiacu matematickú terminológiu a symboliku s dôrazom na pojmotvorný proces. Ďalej by mal diferencovať a integrovať základné poznatky z oblasti geometrie vzhľadom na rozvíjanie geometrických predstáv, a tiež aplikovať nadobudnuté teoretické poznatky v riešení konkrétnych geometrických úloh.

Našu výskumnú vzorku tvorilo 190 študentov uvedeného študijného odboru. Môžeme ju považovať za reprezentatívnu, zber údajov prebehol na výberovom súbore študentov, a teda popísaná výskumná sonda má deskriptívny charakter.

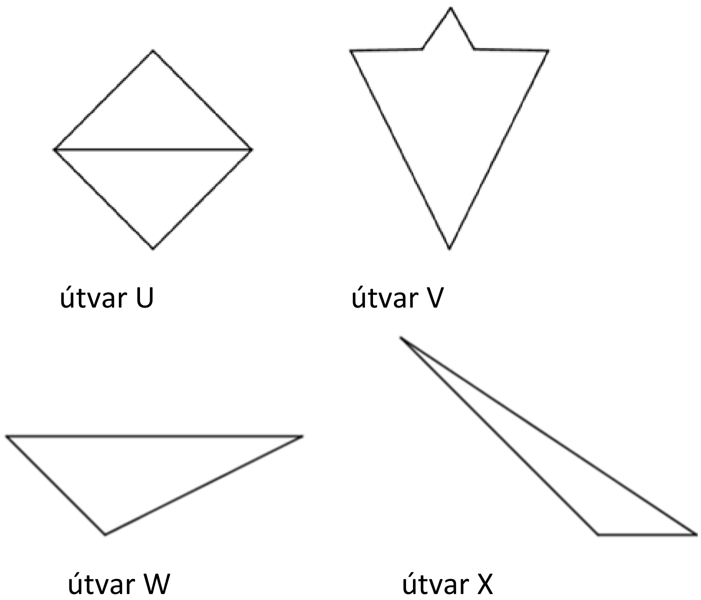
Vzhľadom na potreby daného odboru sme vytvorili test, ktorý pozostával zo šiestich úloh. Štyri úlohy v teste boli s výberom odpovedí, dve úlohy vyžadovali riešenie a vychádzali z učiva o rovinných útvaroch, o telesách, o miere a o zhodných zobrazeniach.

**Výsledky a postrehy z riešenia testu**

Výsledky našich respondentov poukazujú na problémy súčasných absolventov stredných škôl, budúcich učiteľov predprimárneho vzdelávania V nasledujúcej časti uvádzame naše postrehy z riešenia jednotlivých úloh, vrátane nedostatkov, ktoré sa v riešeniach vyskytovali.

***1. úloha***

Zadanie: Zakrúžkujte útvary, ktoré sú trojuholníkmi.



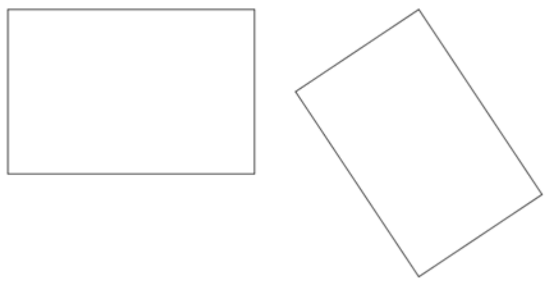

***Obrázok 1:*** *Zadanie 1. úlohy*

Úlohu vyriešilo 154 študentov správne, t. j. 36 študentov nesprávne. Až 29 študentov z nich okrem správne označených trojuholníkov (útvary W, X) označilo aj útvar U ako trojuholník. Traja študenti označili útvary U, W ako trojuholníky a zároveň útvar X neoznačili ako trojuholník. Ďalší študenti určili ako trojuholník len útvar W (2 študenti), útvar V (1 študent) alebo iba útvary U, V (1 študent).

Z vyhodnotenia 1. úlohy vyplýva, že väčšina respondentov trojuholník pozná, ale útvary „zložené z trojuholníkov“ až 19 % z nich nevnímalo komplexne, a preto ich označili ako trojuholník.

***2. úloha***

Zadanie: Zakrúžkujte útvary, ktoré sú obdĺžnikmi.




***Obrázok 2:*** *Zadanie 2. úlohy*

Správne zakrúžkovalo všetky obdĺžniky až 168 študentov. Nesprávne vyriešilo úlohu 22 študentov, pričom 16 z nich iba útvar S označili ako obdĺžnik. Iba útvar T označilo ako správnu odpoveď 5 študentov a iba útvar U len jeden študent.

Z riešení 2. úlohy sme zistili, že otočením obdĺžnika do inej polohy, t. j. polohy inej, ako sa najčastejšie uvádza, chybné riešenie malo približne 12 % respondentov. Uvedené percentuálne hodnoty považujeme pre skúmanú vzorku za pomerne vysoké, nakoľko sa jedná o základné poznatky o obdĺžniku a patrí to do učiva základnej školy.

***3. úloha***

Zadanie: Daný je štvorec *PQRS*. Ktoré tvrdenie je pravdivé pre všetky štvorce?
a) *PR* a *RS* majú rovnakú dĺžku,
b) *QS* a *PR* sú kolmé,
c) *PS* a *QR* sú kolmé,
d) *PS* a *QS* majú rovnakú dĺžku,
e) Uhol pri vrchole *Q* je väčší ako uhol pri vrchole *R*.

Danú úlohu správne vyriešilo len 52 študentov, 38 z nich aj so správnym náčrtom úlohy a 14 študentov nemalo vhodný náčrt k riešeniu. Nesprávnych riešení bolo až 138, avšak správny náčrt malo 54 študentov a náčrt neurobilo 51 študentov. Ak študenti urobili náčrt, tak 22 z nich označilo vrcholy v nesprávnom poradí PQRS. Štyria študenti zase písmenami P, Q, R, S označili strany štvorca, a tiež ďalší štyria načrtli obdĺžnik, ale vrcholy označili v správnom poradí. Niektorí študenti si zamenili pojmy rovnobežné a kolmé priamky (2 študenti), jeden študent uviedol nesprávnu odpoveď a v jeho náčrte boli vrcholy štvorca označené malými písmenami, ale v správnom poradí.

Nedostatky v riešení 3. úlohy testu úzko súvisia s tvorbou náčrtu štvorca. Zo 73 % nesprávnych odpovedí až 27 % respondentov nemalo náčrt úlohy. Za vážny problém v tejto oblasti považujeme aj výrazné nedostatky v označení vrcholov a strán daného štvorca. Myslíme si, že označovanie strán a vrcholov útvaru by malo byť správne u všetkých respondentov.

***4. úloha***

Zadanie: Načrtnite dve úsečky *AB*, *CD*, o ktorých platí: $|AB|$ = 2 cm, $|CD|$ = 6cm.

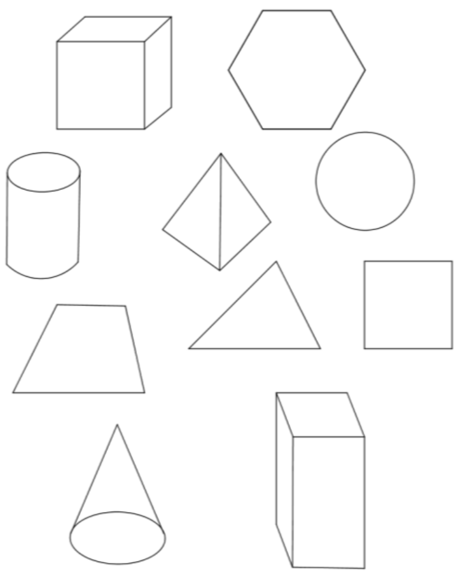
V riešeniach danej úlohy sme akceptovali aj čiastočne správnu odpoveď, t. j. či mali dobrý odhad dĺžky úsečky *AB* alebo mali približný odhad dĺžky úsečky *CD*. Správne vyriešilo danú úlohu 118 študentov, čiastočne správne 51 a nesprávne 21 študentov. Najčastejšie nedostatky pri čiastočne správnych odpovediach študentov boli, že odhad 2 cm bol správny, ale nesprávny bol odhad 6 cm (36 študentov), alebo odhad 2 cm bol nesprávny a odhad jeho trojnásobku bol správny (10 študentov), alebo študenti správne zostrojili dĺžku jednej z úsečiek, ale nesprávne odhadli trojnásobok dĺžky (5 študentov). V nesprávnych odpovediach mali študenti najmä nesprávny odhad dĺžky 2 cm a aj trojnásobku tejto dĺžky (12 študentov). Dvaja študenti nemali vo svojich riešeniach označené krajné body úsečiek, dvaja nemali správny odhad dĺžky 2 cm, jeden študent úlohu rysoval a 4 študenti vôbec úlohu neriešili.

Odhad správneho výsledku v numerických výpočtoch, ako aj odhad vzdialenosti (teda aj dĺžky úsečky) je ďalším problémom, ktorý pretrváva a je výraznejší.

***5. úloha***

Zadanie: Do obrázkov geometrických útvarov vpíšte písmeno T k tým útvarom, ktoré znázorňujú TELESÁ. Tiež priraďte k daným geometrickým útvarom ich správne názvy.

Geometrické útvary



kružnica

trojuholník

hranol

šesťuholník

ihlan

lichobežník

valec

kužeľ

štvorec

kocka

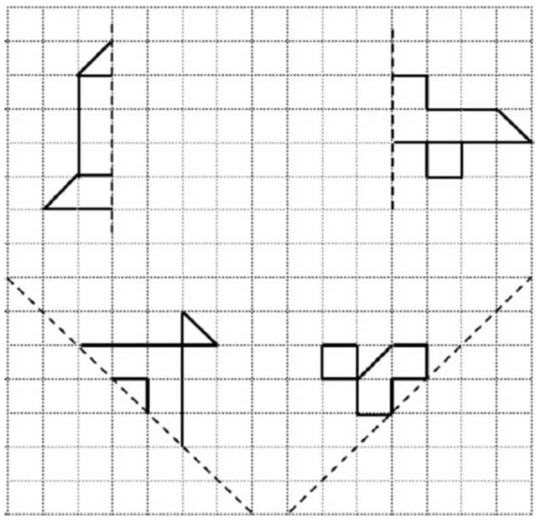
***Obrázok 3**: Zadanie 5. úlohy*

S riešením tejto úlohy nemalo problém 147 študentov. Čiastočne úlohu vyriešilo 39 študentov a 4 študenti nevyriešili úlohu vôbec. V rámci čiastočne správnych riešení sa vyskytovali najčastejšie tieto chyby: jedno z telies bolo neoznačené (9 študentov), alebo boli zamenené telesá ihlan a kužeľ (7 študentov), alebo neurčili/nesprávne určili 2 až 4 názvy uvedených geometrických útvarov (23 študentov). Nesprávne označili viac ako 2 telesá, a nepriradili tak názvy k útvarom 4 študenti.

Zaujímavým zistením z riešení 5. úlohy je, že približne 4 % respondentov si zamenili pojem ihlan a kužeľ, pričom správne pomenovať všetky rovinné a priestorové geometrické útvary nevedelo 12 % respondentov.

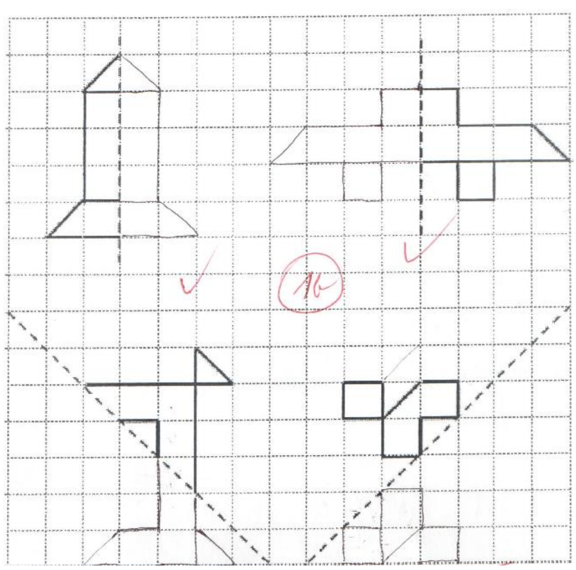
### *6. úloha*

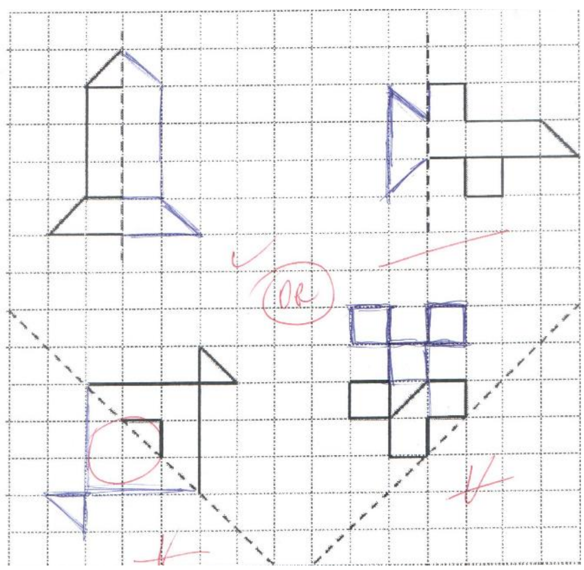
Zadanie: Dokreslite obrazy umiestnené v štvorcovej sieti, pričom viete, že tieto obrazy sú osovo súmerné podľa vyznačenej osi súmernosti.



***Obrázok 4:*** *Zadanie 6. úlohy*

Posledná 6. úloha patrila medzi ťažšie úlohy testu, pretože ju správne vyriešilo len 57 študentov, čiastočne správne 119 študentov a nesprávne 14 študentov. Prvé dva obrazy správne doplnilo 13 študentov, správne len tretí obraz 21 študentov, správne prvý až tretí obraz doplnilo 76 študentov a správne prvé dva a štvrtý obraz (t. j. tretí obraz bol nesprávny) doplnili dvaja študenti. Sedem študentov malo nesprávne zostrojený prvý alebo druhý obraz, ale zvyšné obrazy už boli správne. V rámci nesprávnych riešení sa vyskytovalo hlavne nepochopenie osovej súmernosti alebo neboli dokončené niektoré z daných obrazov alebo vôbec nebola riešená úloha (14 študentov).





***Obrázok 5:*** *Ukážky riešenia 6. úlohy*

Riešenie 6. úlohy poukazuje na nutnosť precvičovať zobrazovanie rôznych útvarov v osovej súmernosti aj pri polohe osi súmernosti v inej, než je jej vertikálna poloha. Zároveň nedôslednosť v riešení jednoduchších úloh poukazuje na nutnosť viesť študentov nielen k tomu, aby správne postupovali v riešení úlohy, ale zároveň dosiahli aj správny výsledok, čo riešenia tejto úlohy aj potvrdzujú.

**Záver**

Geometria a učivo s ňou spojené patrí stále k menej obľúbeným vo vyučovaní matematiky. Za dôležité považujeme cieľavedome rozvíjať geometrické predstavy u detí predškolského veku, a tak vytvárať aj pozitívny postoj k matematike. Určite to závisí aj od učiteľa v materskej škole, ktorý sa často stavia k vyučovaniu geometrie ako k menej dôležitej súčasti vyučovania matematiky. Ak majú učitelia materskej školy v danej problematike jasno a nie je im neznáma a „ťažká“, tak matematické schopnosti detí budú rozvíjať prirodzene. Pre deti takýto vyučovací proces bude určite patriť medzi najobľúbenejšiu činnosť, pretože vyučovanie geometrie taký potenciál má.

V externom testovaní žiakov 5. a 9. ročníka základnej školy je nutné ukončiť riešenie úlohy správnym výsledkom, ktorý je jediným kritériom správnosti riešenia úloh v takomto testovaní. Podobne aj v reálnom živote je často nevyhnutný nielen správny postup, ale aj správny záver, resp. výsledok riešenia akéhokoľvek problému.

Môžeme teda v závere konštatovať, že mnohé nesprávne, alebo neúplné riešenia úloh testu, nesúvisia len s nevedomosťou v danej oblasti, ale aj s nedostatočným upevnením vedomostí pri zmene polohy útvarov a nedostatočným využitím znázorňovania úlohy formou náčrtu.

**Literatúra**

[1] Gerová, Ľ. Pripravenosť študentov k štúdiu matematiky na vysokej škole. In: *Zborník príspevkov z vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou „Matematika v primárnej škole – Rôzne cesty, rovnaké ciele“.* Prešov: PF PU, 2013. s. 69 – 73, ISBN 978-80-555-0765-1

[2] Mokriš, M. Priestor a tvar – pohľad na matematickú gramotnosť študentov odboru predškolská a elementárna pedagogika. In: *Acta Universitatis Palackianae Olomoucensis „Matematika 4“.* Olomouc: PF UP, 2010. s. 182 – 186, ISBN 978-80-244-2511-5

[3] Štátny pedagogický ústav. Štátny vzdelávací program pre predprimárne vzdelávanie v materských školách. Bratislava, 2016. Dostupné: www.statpedu.sk

[4] Šedivý, O. – Vallo, D. *Základy elementárnej geometrie.* Nitra: FPV UKF v Nitre, 2009. 126 s. ISBN 978-80-8094-623-4