Vol. 3, No. 1, 2017

Acta Mathematica Nitriensia

free electronic journal

AM Nitriensia

ISSN: 2453-6083

Názov / Title
Acta Mathematica Nitriensia

Všeobecne o časopise
ISSN 2453-6083 (online)
On-line elektronický vedecký časopis venovaný otázkam teórie vyučovania matematiky
Periodicita: 2x ročne
Otvorený prístup

Pokyny pre autorov
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Recenzné konanie
Časopis uskutočňuje dvojité anonymné a nezávislé recenzné konanie zaslaných príspevkov.

Dostupnosť
www.amn.fpv.ukf.sk

Vydavateľ
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovensko

General information
ISSN 2453-6083 (online)
Free electronic scientific journal focused to current problems in mathematical education theory
Periodicity: twice a year
Open Access

Guidelines for authors
http://www.amn.fpv.ukf.sk/authors.php
http://www.amn.fpv.ukf.sk/ethics.php

Review process
The journal carries out a double -blind peer review evaluation of drafts of contributions.

Available from
www.amn.fpv.ukf.sk

Publisher
Department of Mathematics
Faculty of Natural Sciences
Constantine the Philosopher University in Nitra
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
Slovakia

Údaje k aktuálnemu číslu
Ročník: 3
Číslo: 1
Rok: 2017
Dátum vydania: 30. 4. 2017

Information to current issue
Volume: 3
No.: 1
Year: 2017
Publication date: April 30, 2017

Obsah

Content

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 1, p. 1 – 7
ISSN 2453-6083

Analógia ako matematická stratégia
Analogy as Mathematical Strategy

Peter Vrábel[*a]

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra,

Received 31 March 2017; received in revised form 13 April 2017; accepted 17 April 2017

Abstract

The mathematical strategy *analogy* is the frequently used method on problem solving and on an executing of various mathematical proofs. The possibilities usage of this strategy are analysed in various mathematical branches in the submitted contribution. The effectiveness of the method in question is illustrated via solutions of several miscellaneous mathematical problems.

Keywords: mathematical strategy, analogy, mathematical problem.

Classification: 00A35; 97C50; 97D50

Úvod

V matematike často skúmame rôzne skupiny objektov, pričom sa môže stať, že niektoré vlastnosti istej množiny objektov majú svoju analógiu (sú podobné) vo vlastnostiach inej množiny objektov. Typické príklady nájdeme hlavne v geometrii. Ak niektoré množiny objektov sú analogické, tak už nemusí byť žiadnym prekvapením, že isté vlastnosti a vzťahy v jednej skupine objektov majú svoju analógiu vo vlastnostiach a vzťahoch v druhej skupine objektov. Potom identifikáciu týchto vlastností a vzťahov získavame použitím matematickej metódy – *stratégie použitia analogického (podobného) problému*, stručne *stratégie analógia* (Kopka [1], 2004; Polya [2], 1973; Vrábel [3], 2005).

Analógia v matematike

Analógia je istý druh podobnosti. Uvažujme napríklad priamky v rovine ako jednu množinu objektov a roviny v priestore ako druhú množinu objektov. Môžeme položiť nasledujúcu otázku: Aký je minimálny počet priamok, ktoré v rovine určujú ohraničený geometrický útvar? Zrejme jedna priamka, ani žiadne dve priamky v rovine neurčujú ohraničený rovinný útvar. Tri rôznobežné priamky neprechádzajúce jedným bodom a ležiace v jednej rovine určujú ohraničený rovinný útvar a to trojuholník. Analogicky je to s rovinami v priestore. Minimálny počet rovín, ktoré už určujú ohraničený útvar v priestore, je štyri. Štyri roviny, z ktorých žiadne dve nie sú rovnobežné a všetky štyri neprechádzajú jedným bodom, určujú štvorsten. Potom medzi trojuholníkom v planimetrii a štvorstenom v stereometrii je analógia, čo (ako uvidíme v nasledujúcej časti) vedie k analogickým vlastnostiam.

*Corresponding author; email: pvrabel@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.1.1-7

V matematike hovoríme často o podobnosti rôznych operácií. Je to vtedy, keď sa napríklad rôzne operácie „riadia podľa tých istých pravidiel“. Napríklad sčitovanie aj násobenie reálnych čísel je komutatívne aj asociatívne. Navyše číslo 0 v operácii sčitovania hrá analogickú úlohu ako číslo 1 v operácii násobenia.
Analogickú vlastnosť môžeme nájsť aj v iných množinách objektov. Vezmime ľubovoľnú množinu A a systém všetkých jej podmnožín $\mathcal{P}(A)$. Na množine $\mathcal{P}(A)$ uvažujme dve binárne operácie: zjednotenie $(\cup)$ a symetrická diferencia $(\div)$. Pre každé množiny $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ platí

$$X \cup Y = Y \cup X,\ (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z),$$

$$X \div Y = Y \div X,\ (X \div Y) \div Z = X \div (Y \div Z),$$

$$X \cup \emptyset = X,\ X \div \emptyset = X.$$

Operácie $\cup$, $\div$ sú teda komutatívne aj asociatívne a prázdna množina $\emptyset$ hrá v týchto operáciách analogickú úlohu ako 0 (1) v operácii sčítanie (násobenie) reálnych čísel.

Uvažujme v rovine pevný bod S, množinu T všetkých otočení v tejto rovine so stredom v bode S a operáciu skladania otočení. Je zrejmé, že táto operácia je na množine T komutatívna aj asociatívna a otočenie o 360° hrá podobnú úlohu ako 0, 1 resp. $\emptyset$ v hore uvedených operáciách.

Analógie operácií v matematike viedli ku vzniku významných algebraických teórií, ktoré pracujú s pojmami ako sú grupoid, pologrupa, grupa, okruh a podobne.

S pojmom analógie súvisí ešte jeden matematický pojem, ktorý sa nazýva *dualita*. Postavenie operácií sčítania a násobenia reálnych čísel je v prípade distributívneho zákona rozdielne. Pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c platí $a(b + c) = ab + ac$, ale vo všeobecnosti neplatí rovnosť $a + (bc) = (a + b)(a + c)$. Uvedené operácie nemožno v tomto prípade zameniť, ako to bolo v prípade komutatívneho a asociatívneho zákona. Uvažujme však inú situáciu. Pre ľubovoľné množiny A, B, C platia rovnosti

$$A \vartriangle B = B \vartriangle A,\ (A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C),$$

$$(A \vartriangle B) \blacksquare C = (A \blacksquare C) \vartriangle (B \blacksquare C),$$

kde za znaky $\vartriangle$, $\blacksquare$ môžeme dosadiť ľubovoľné z množinových operácií $\cup$, $\cap$. Platí však ešte viac. Nech E je ľubovoľná pevne zvolená základná množina. Komplement množiny $A \in \mathcal{P}(E)$ v základnej množine E označíme $A^{'}$. Ak platí akákoľvek množinová rovnosť, v ktorej vystupujú ľubovoľné množiny z potenčnej množiny $\mathcal{P}(E)$ a len operácie zjednotenia, prieniku a komplementu, tak vzájomnou zámenou znakov operácií $\cup$, $\cap$ a vzájomnou zámenou množín $\emptyset$, E, dostaneme opäť pravdivú množinovú rovnosť. Operácie $\cup$, $\cap$ a množiny $\emptyset$, E sú v štruktúre $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap, ', \emptyset, E)$ duálne. Uvedená štruktúra je množinový model algebraickej štruktúry, ktorá sa nazýva boolovská algebra.

V tejto súvislosti treba uviesť ešte jeden dôležitý model boolovskej algebry, nazvime ho logický. Nech $\mathcal{A}$ je množina, ktorá obsahuje všetky výrokové premenné

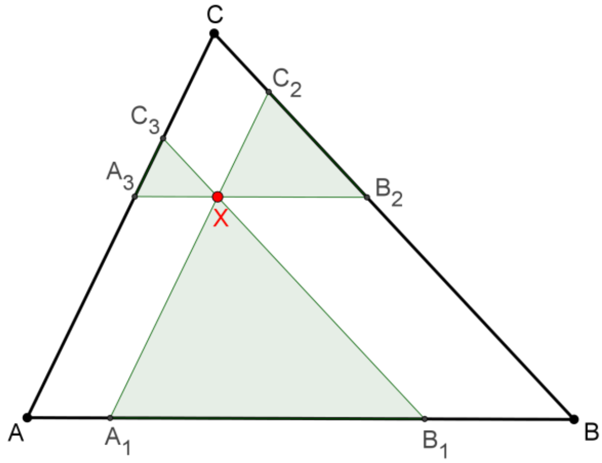
$$p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, \cdots, p_n, q_n, r_n, s_n, \cdots,$$

ďalej obsahuje všetky formuly výrokového počtu vytvorené z výrokových premenných pomocou logických spojok $\vee$, $\wedge$ a $'$ (znak negácie) a žiadne iné prvky. Označme $0 = p \wedge p^{'}$, $1 = p \vee p^{'}$ a interpretujme ekvivalenciu formúl výrokového počtu ako rovnosť. Ak v pravdivej rovnosti formúl vzájomne vymeníme logické spojky $\vee$, $\wedge$ a vzájomne vymeníme prvky 0 a 1, tak dostaneme opäť pravdivú rovnosť. Operácie $\vee$, $\wedge$ a prvky 0, 1 sú v štruktúre $(\mathcal{A},\ \vee,\ \wedge,\ ',\ 0, 1)$ duálne.

Aplikácie stratégie analógia pri riešení problémových úloh

Problém 1. Nech X je ľubovoľný vnútorný bod trojuholníka ABC. Veďme bodom X priamky rovnobežné so stranami tohto trojuholníka. Dostaneme tri nové trojuholníky A_1B_1X, XB_2C_2, A_3XC_3, ktoré sú podobné trojuholníku ABC (obr.1). Nech P_1, P_2, P_3 sú po rade obsahy týchto trojuholníkov a P je obsah trojuholníka ABC. Nájdite vzťah týchto obsahov. Vyslovte analogické tvrdenie pre štvorsten.

Riešenie. Ak ľubovoľné trojuholníky ABC, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ sú podobné s koeficientom podobnosti $k = \frac{|\bar{A}\bar{B}|}{|AB|}$, tak ich obsahy sú v pomere k^2.



Obrázok 1

Pre obsahy P_1, P_2, P_3, P teda platí:

$$\sqrt{\frac{P_1}{P}} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|},\ \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{|XB_2|}{|AB|},\ \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{|A_3X|}{|AB|},$$

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{|A_1B_1|+|XB_2|+|A_3X|}{|AB|} = 1.$$

Odtiaľ vyplýva, že

$$\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\,.$$

Analogické tvrdenie pre štvorsten bude vychádzať z toho, že pomery objemov podobných telies s koeficientom podobnosti k sa rovná k^3. Nech X je ľubovoľný vnútorný bod štvorstena $ABCD$. Veďme týmto bodom roviny rovnobežné so stenami štvorstena. Tieto spolu so stenami vytvárajú štyri štvorsteny, ktoré sú podobné štvorstenu $ABCD$. Označme ich objemy V_1, V_2, V_3, V_4. Objem štvorstena $ABCD$ označme V. Potom platí

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2} + \sqrt[3]{V_3} + \sqrt[3]{V_4}\,.$$

Problém 2. Obsah P trojuholníka sa rovná číslu $\frac{1}{2}pr$, kde p je obvod trojuholníka a r je polomer kružnice vpísanej do tohto trojuholníka. Vyslovte analogické tvrdenie pre objem štvorstena.

Riešenie. Ak S je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC, r je jej polomer a P_1, P_2, P_3 sú po rade obsahy trojuholníkov SAB, SBC, SCA, tak

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \tfrac{1}{2}r|AB| + \tfrac{1}{2}r|BC| + \tfrac{1}{2}r|CA| = \tfrac{1}{2}pr,$$

kde p je obvod trojuholníka ABC.
Nech S je stred gule vpísanej do štvorstena $ABCD$, ktorý má objem V. Nech r je polomer vpísanej gule a V_1, V_2, V_3, V_4 sú po rade objemy štvorstenov $ABCS$, $ABDS$, $BCDS$, $ACDS$. Označme P_1, P_2, P_3, P_4 po rade obsahy trojuholníkov ABC, ABD, BCD, ACD. Potom platí:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \tfrac{1}{2}rP_1 + \tfrac{1}{3}rP_2 + \tfrac{1}{3}rP_3 + \tfrac{1}{3}rP_4 = \tfrac{1}{3}Pr,$$

kde P je povrch štvorstena.

Problém 3. Pre každé prirodzené číslo n platí $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} < 1$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n, $n > 1$, platí

$$\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{8}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\tfrac{1}{n^2-1}\right) < 2.$$

Riešenie. Pre každé prirodzené číslo n platí :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Použijeme analogickú metódu pre súčin:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot \ldots \cdot \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$= \tfrac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\tfrac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\tfrac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot \ldots \cdot \tfrac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)} = \tfrac{2n}{n+1} < 2.$$

Problém 4. Nájdite bijekciu $f: \langle a,b) \to (a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$. Analogickou metódou nájdite bijekciu $g: \langle a,\infty) \to (a,\infty)$.

Riešenie. Požadované zobrazenie f nemožno určiť jedným predpisom. Treba vyčleniť z intervalu vhodnú nekonečnú množinu A a definovať vhodné prosté zobrazenia na disjunktných množinách $\langle a,b) - A$, A. Položme $A = \left\{a + \frac{n-1}{n}(b-a); n \in \mathbb{N}\right\}$, označme $a_n = a + \frac{n-1}{n}(b-a)$ pre každé prirodzené číslo n. Definujme zobrazenie $f: \langle a,b) \to (a,b)$ takto:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle a,b) - A \\ a_{n+1}, & x = a_n \in A \end{cases}$$

Dokážme najskôr, že zobrazenie f je injekcia. Nech $x_1, x_2 \in \langle a,b)$, $x_1 \neq x_2$. Stačí osobitne uvažovať prípady: $x_1, x_2 \in \langle a,b) - A$; $x_1, x_2 \in A$; $x_1 \in \langle a,b) - A, x_2 \in A$. V prvom prípade $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$. V druhom prípade $x_1 = a_m$, $x_2 = a_n$ pre nejaké rôzne prirodzené čísla m, n. Potom $f(x_1) = a_{m+1} \neq a_{n+1} = f(x_2)$. V poslednom prípade platí:
$f(x_1) = x_1 \in \langle a,b) - A$; $x_2 = a_k$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}$ a teda $f(x_2) = a_{k+1} \in A$. Keďže $(\langle a,b) - A) \cap A = \emptyset$, tak $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Dokážeme, že zobrazenie f je aj surjekcia. Označme $A_1 = A - \{a\}$. Nech $y \in (a,b)$. Ak $y \in (a,b) - A_1$, tak $f(y) = y$. Ak $y \in A_1$, tak $y = a_n$ pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom $a_{n-1} \in \langle a,b)$ a $f(a_{n-1}) = a_n$.

Pri konštrukcii bijekcie $g: \langle a, \infty) \to (a, \infty)$ možno použiť analógiu. Za množinu A v tomto prípade stačí vziať napríklad množinu $\{a + n - 1;\ n \in \mathbb{N}\}$ a definovať zobrazenie g takto:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle a, \infty) - A \\ a_{n+1}, & x = a_n = a + n - 1 \in A \end{cases}$$

Dôkaz toho, že zobrazenie g je bijekcia, je praktický totožný s dôkazom v prípade zobrazenia f. Stačí iba namiesto intervalu $\langle a, b)$ uvažovať interval $\langle a, \infty)$ a namiesto intervalu (a, b) interval (a, ∞).

Problém 5. Na štvorcovej šachovnici $n \times n$ je v každom poli do stĺpčekov umiestnený istý počet jednoeurových mincí takým spôsobom, ktorý je ilustrovaný na obr. 2 v prípade $n = 3$ resp. $n = 4$.

5	4	3
4	3	2
3	2	1

7	6	5	4
6	5	4	3
5	4	3	2
4	3	2	1

Obrázok 2

Celkový počet jednoeurových mincí na štvorcovej šachovnici $n \times n$ je potom n^3.
Položme teraz na šachovnicu $n \times n$ jednoeurové mince tak, ako je na obr.3 v prípade $n = 5$.

13	12	11	10	9
11	10	9	8	7
9	8	7	6	5
7	6	5	4	3
5	4	3	2	1

Obrázok 3

Aký je pri takomto umiestnení celkový počet jednoeurových mincí na štvorcovej šachovnici $n \times n$, ak n je nepárne číslo?

Riešenie. Metóda riešenia prvého prípadu spočíva v premiestnení mincí podľa diagonály začínajúcej zľava dole ako je to ilustrované v nasledujúcej tabuľke pre $n = 4$.

7-3	6-2	5-1	4
6-2	5-1	4	3+1
5-1	4	3+1	2+2
4	3+1	2+2	1+3

V druhom prípade postupujeme analogicky, pričom vykonáme dve premiestnenia, podľa prostredného riadku a potom podľa prostredného stĺpca. Je to uvedené v nasledujúcich tabuľkách v prípade $n = 5$.

13-4	12-4	11-4	10-4	9-4
11-2	10-2	9-2	8-2	7-2
9	8	7	6	5
7+2	6+2	5+2	4+2	3+2
5+4	4+4	3+4	2+4	1+4

9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2
9-2	8-1	7	6+1	5+2

Takto je na šachovnici 5×5 celkove $5^2 \cdot 7$ jednoeurových mincí. Vo všeobecnom prípade šachovnice $n \times n$, n je nepárne prirodzené číslo, je v strede tabuľky číslo, ktoré sa pri uvedených premiestneniach nemení a rovná sa číslu $\frac{3n-1}{2}$. Preto celkový počet jednoeurových mincí umiestnených na šachovnici sa rovná číslu $n^2 \cdot \frac{3n-1}{2}$.

Niekedy metódou analógie možno dospieť k nečakaným hypotézam, ktoré potom treba potvrdiť exaktným dôkazom.
Nech $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_0 \neq 0$. Ak $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sú korene polynómu P, tak

$$P(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{c_1}\right)\left(1 - \frac{x}{c_2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{x}{c_n}\right),$$

$$a_1 = -a_0 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}\right).$$

Podobne pre polynóm $Q(x) = b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \cdots + (-1)^n b_n x^{2n}$, $b_0 \neq 0$, s koreňmi $d_1, -d_1, d_2, -d_2, \ldots, d_n, -d_n$ platí :

$$Q(x) = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{d_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{d_2^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{d_n^2}\right),$$

teda $b_1 = b_0 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \cdots + \frac{1}{d_n^2}\right)$.

L. Euler metódou analógie dospel k myšlienke použiť vzťahy koeficientov a koreňov polynómu pre rozklad istých mocninných radov. Pre každé reálne číslo $x, x \neq 0$, platí:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

Rovnica $\frac{\sin x}{x} = 0$ má nekonečne veľa koreňov: $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \ldots, n\pi, -n\pi, \ldots$. L. Euler dospel k domnienke, že

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \cdot \cdots ,$$

odkiaľ špeciálne vyplýva rovnosť

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \cdots + \frac{1}{n^2\pi^2} + \cdots ,$$

teda

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots .$$

Euler najskôr testoval správnosť poslednej rovnosti na iných príkladoch a nakoniec ju exaktne dokázal.

Na druhej strane uvedená analógia medzi „konečným a nekonečným“ je skutočne zriedkavá. Veď napríklad súčet konečného počtu reálnych čísel nezávisí od poradia sčítancov, ale konvergencia a súčet nekonečného číselného radu (teda súčet nekonečne veľa čísel) závisí od poradia členov radu. Je známe, že číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konverguje a jeho súčet sa rovná číslu $\ln 2$. Potom súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$ sa rovná číslu $2\ln 2$. Všimnime si, že v tomto rade, teda v rade

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\cdots$$

sú pre každé nepárne prirodzené číslo n dva členy s menovateľom n a to $\frac{2}{n}$ a $-\frac{1}{n}$. Pre každé párne prirodzené číslo n je v tomto rade jediný člen s menovateľom n a to $-\frac{1}{n}$. Členy tohto radu premiestnime tak, aby členy nového radu nasledovali po sebe podľa menovateľov. Dostaneme rad

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{2}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{2}{2n-1}-\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots.$$

Porovnaním postupností čiastočných súčtov tohto radu a radu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ zistíme, že obe postupnosti majú rovnakú limitu a teda oba rady majú aj rovnaký súčet a to číslo $\ln 2$.

Záver

Stratégia *analógia* je v matematike nenahraditeľnou metódou, ktorá sa používa pri formovaní niektorých dôležitých matematických pojmov, pri dôkazoch i pri riešení rôznych problémov prakticky v každej matematickej disciplíne. V matematike je navyše celý rad pojmov, ktoré sú „symetrický“ definované. Napríklad pojem infima a suprema ohraničenej neprázdnej podmnožiny nejakej usporiadanej množiny. Preto aj celý rad tvrdení, v ktorých sa využíva infimum, má svoju analógiu v tvrdeniach so supremom. Pravda, musíme byť pri aplikácii metódy analógia opatrní a nehľadať analógiu niekde , kde v skutočnosti nie je.

Literatúra

[1] Kopka, J. 2004. *Výzkumný přístup při výuce matematiky.* Ústí nad Labem: Acta Universitatis Purkynianae 101, 2004, ISBN 80-7044-604-8.

[2] Polya, G. 1973. *How to Solve It?* Princeton, Princeton University Press, 1973.

[3] Vrábel, P. 2005. *Heuristika a metodológia matematiky.* Nitra: FPV UKF, Edícia Prírodovedec č. 165, 2005, ISBN 80-8050-840-2.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 1, p. 8 – 14
ISSN 2453-6083

Význam kritického myslenia pre matematiku a technické vzdelávanie

Importance of Critical Thinking in Mathematics and Technical Education

Viera Tomková [*a]

[*] *Department of Technology and Information Technologies, Faculty of Education, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 31 March 2017; received in revised form 11 April 2017; accepted 20 April 2017

Abstract

The paper addressing the issue of critical thinking of secondary level elementary school pupils in subject mathematics. Based on results of previous research we point out need to develop ability to use critical thinking of pupils during they solve verbal tasks and construction tasks in geometry, which forms the base for successful acquisition of knowledge in subject technics teaching at elementary school. We analyze foreign textbooks, too.

Keywords: pupils' education, critical thinking, textbook

Classification: C30

Úvod

V súčasnom období sa do popredia dostáva požiadavka odbúrania memorovania učiva žiakmi. Prioritou je vzdelávať žiakov základnej školy tak, aby vedeli hľadať súvislosti, identifikovať potrebné údaje a vedieť ich aplikovať v nových situáciách. Pozornosť odbornej verejnosti sa zameriava na rozvoj kritického myslenia žiakov.

Výsledky hodnotení žiakov Slovenskej republiky v medzinárodnej štúdii OECD PISA 2015 sú dlhodobo podpriemerné v porovnaní s krajinami OECD. Slovenská republika dosiahla v prírodovednej gramotnosti výkon na úrovni 461 bodov. Výkon žiakov SR v prírodovednej gramotnosti sa nachádza pod priemerom zúčastnených krajín OECD. V matematickej gramotnosti dosiahli žiaci výkon na úrovni 475 bodov. V porovnaní s rokom 2012, keď bola matematická gramotnosť naposledy hlavnou sledovanou oblasťou, priemerný výkon našich žiakov klesol o 6 bodov, čo nepredstavuje významné zníženie výkonu [1].

Identifikovať jasné príčiny uvedených výsledkov je ťažké. Domnievame sa, rozvoj kritického myslenia a podpora interdisciplinárnych vzťahov môžu mať kardinálny vplyv na zlepšenie súčasného stavu. Je zrejmé, že najväčšie možnosti v uplatňovaní medzipredmetových vzťahov majú vyučovacie predmety matematika, fyzika a technická výchova. Kým vedomosti a zručnosti z fyziky sú nevyhnutné najmä pri realizácii rôznych konštrukčných riešení a výbere vhodného technického materiálu, z hľadiska jeho rozťažnosti, nosnosti, vodivosti a pod., vedomosti žiakov z matematiky tvoria základ pri riešení všetkých teoretických, ako aj praktických úloh, v technike. Vedomosti z algebry sú dôležité pri plánovaní množstva potrebného materiálu, pri výpočtoch objemov navrhovaných výrobkov, či pri výpočte finančného zaťaženia potrebného na realizáciu diela. Geometria poskytuje žiakom základné

[*]Corresponding author; email: vtomkova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.1.8-14

vedomosti a zručnosti pri zobrazovaní telies, rysovania, predstavivosti a manipulácie s objektmi v rovine a priestore. Uvedené vedomosti a zručnosti tvoria základ úspešného zobrazovania objektov v technickom vzdelávaní. Z toho vyplýva, že úspešnosť nájsť správne riešenie úloh v technike je podmienené schopnosťou žiakov využívať interdisciplinárne vzťahy v praxi.

Problematika rozvoja kritického myslenia v školskej praxi

Kritické myslenie je aktívny, systematický proces porozumenia a vyhodnocovania argumentov. Argumenty poskytujú fakty o tom, aké vlastnosti má daný skúmaný predmet alebo aký vzťah je medzi dvoma alebo viacerými objektmi. Argumenty tiež poskytujú dôkaz na podporu alebo vyvrátenie tvrdenia [2, s. 326]. Z uvedeného vyplýva, že kritické myslenie znamená schopnosť nepodliehať nekriticky všeobecnému názoru alebo naliehavosti nejakého zdieľania, naivne nepreberať tradované názory a postoje, ale naopak dokázať zaujať odstup a vytvárať si vlastné stanoviská na základe vlastných vedomostí a skúseností [3, s. 35].

Autori G. J. Domike a E. O. Odey [4, s. 2], ktorí sa vo svojej vedeckej práci zaoberajú problematikou vzdelávania študentov stredných a vysokých škôl konštatujú, *„že posunúť hranice vedeckého vzdelávania študentov je možné v tom prípade, ak o zámernú snahu rozvíjať schopnosť kriticky myslieť, obohatíme už vzdelávanie žiakov základnej školy*."

Súhlasíme s názorom Vanečka a kol., že kritické myslenie nepredpokladá, že žiaci budú vedení k tomu, aby stále niečo kritizovali. Kritické myslenie vníma ako *„nestranné a nezávislé myslenie, kedy si procese poznávania každý žiak vytvára svoje vlastné názory, hodnoty a presvedčenia*." [3, s. 36]. Jeho podstatou je myšlienková nezávislosť, pričom výsledkom nemusí byť originálne riešenie, ale dopracovanie sa k výsledku na základe vlastných úvah a názorov. *„Získanie dostatočného množstva relevantných informácií nie je cieľom, ale východiskom kritického myslenia*" [3, s. 36].

Mnohí pedagógovia, ako aj výskumní pracovníci, sa stotožňujú s názorom, že ak chceme, aby žiaci dosiahli lepšie výsledky, nestačí ich vzdelávať len pomocou učebnice a učebných materiálov vo vyučovacom procese. Žiaci si nemajú len osvojovať vedomosti, ale aktívne pristupovať k samovzdelávaniu [5, s. 144].

Naučiť žiakov kriticky myslieť je náročná úloha pre každého učiteľa. Základnou podmienkou je vytvárať v žiakoch potrebu kritického prístupu k skutočnosti. To je možné, len v prípade, ak učiteľ učivo vysvetľuje v logických súvislostiach, trvá na presnosti, racionálnom zdôvodnení riešenia a overení zvolených postupov riešenia.

Schopnosť žiakov kriticky myslieť je možné rozvíjať vo všetkých vyučovacích predmetoch. Prírodovedné predmety vychádzajú zo všeobecne platných axióm a prírodných zákonov, ktoré tvoria základ pre rozvoj kritického myslenia žiakov.

Je však častým javom, že žiak si často osvojuje nové vedomosti, ktoré z rôznych príčin prijíma bez zamyslenia, bez uvažovania nad ďalšími možnosťami riešenia alebo skúmania, prečo bola daná úloha riešená práve týmto spôsobom.

Absencia kritického myslenia a prístupu k vedomostiam je jednou z možných príčin formálnych vedomosti, rôzne sa prejavujúcich na kvalite žiackych vedomostí a prenášaných aj do medzipredmetových vzťahov. Napríklad, kritické myslenie je dôležité aj pri riešení úloh v technickom vzdelávaní žiakov na 2. stupni základnej školy a je zabezpečované vyučovacím predmetom technika.

Na základe skúseností z vlastných výskumov v oblasti technického vzdelávania konštatujeme, že technické vzdelávanie nie je možné efektívne realizovať bez uplatňovania vedomostí a zručností, ktoré žiaci nadobudli vzdelávaním v ostatných vyučovacích predmetoch [6], [7].

Z pohľadu výučby matematiky, matematika je jedným zo mnohých školských predmetov, v ktorom prijímanie vedomostí bez hlbšieho uvažovania brzdí rozvoj kritického myslenia. Je to paradox, pretože každý tematický celok poskytuje opačné príležitosti a systematicky rozvíja kritické myslenie žiakov [8, s. 35].

Interdisciplinarita vzťahu matematika – technická výchova je zrejmá. V matematike je možné rozvíjať schopnosť kriticky myslieť riešením geometrických a slovných úloh, ktoré patria k náročnejším tematickým celkom. Pri ich riešení sa od žiakov vyžaduje schopnosť identifikovať podstatné informácie, zakresliť abstraktné informácie dané v zadaní úlohy do jednoduchého nákresu alebo schémy a na základe konkretizovaných (zobrazených, zakreslených) údajov analyzovať a vyhodnocovať navrhnutý postup riešenia, jednotlivé kroky zdôvodniť a overiť výsledok.

Z uvedeného vyplýva, že riešením slovných úloh a geometrických konštrukcií je u žiakov rozvíjaná schopnosť kriticky myslieť ako dôležitá kompetencia, ktorá je základom pre úspešné osvojenie si učiva vo vyučovacom predmete technika. Vzhľadom k dobrej časovej dotácii hodín matematiky na základnej škole a dôrazu na riešenie konštrukčných úloh a slovných úloh, dalo by sa očakávať, že žiaci budú mať túto kompetenciu primerane rozvinutú.

Ako však vyplynulo z výskumu, ktorého výsledky sme publikovali v roku 2015, absolventi základnej školy preukázali veľmi nízku úroveň schopnosti graficky zobrazovať vnímané objekty [8].

Konštatovali sme, že žiaci 9. ročníka ZŠ nie sú schopní správne vyhodnotiť informácie vo forme statických obrazov a taktiež nemajú osvojené potrebné zručnosti na vytvorenie vlastných statických obrazov (tabuliek, grafov, schém, výkresov), ktoré by presne, jednoznačne a výstižne vyjadrovali požadované informácie. Pri vyhodnotení riešenia úloh sme zistili, že príčiny ich neúspechu v nami realizovanom testovaní boli:

- nedostatočne osvojené zručnosti pri práci s rysovacími pomôckami,
- nedostatočne osvojená potrebná odborná terminológia,
- neschopnosť zobraziť „videné" vo forme vlastného zobrazenia skutočnosti s prihliadnutím na základné tvarové prvky a rozmery zobrazovaného telesa,
- nízka úroveň priestorovej predstavivosti žiakov,
- neschopnosť vyhľadať potrebné informácie v zdrojovom dokumente obsahujúcom statické obrazy,
- neschopnosť žiakov pracovať s predstavami,
- nedostatočne osvojené zručnosti potrebné pri grafickej komunikácií vo forme podnetných úloh (pri čítaní informácií a aj ich znázorňovaní vo forme statických obrazov) [8].

Výskumy, ktoré sme realizovali, boli zamerané prioritne na odhalenie bariér, ktoré ovplyvňujú dosiahnuté výsledky v testovaniach. Podrobnou analýzou sme zistili, že podpriemerná úspešnosť žiakov nie je zapríčinená len nedostatočne osvojenou terminológiou, ale problémom je neschopnosť kriticky analyzovať zadanie, vyhľadať podstatné informácie a využiť ich pri riešení úlohy.

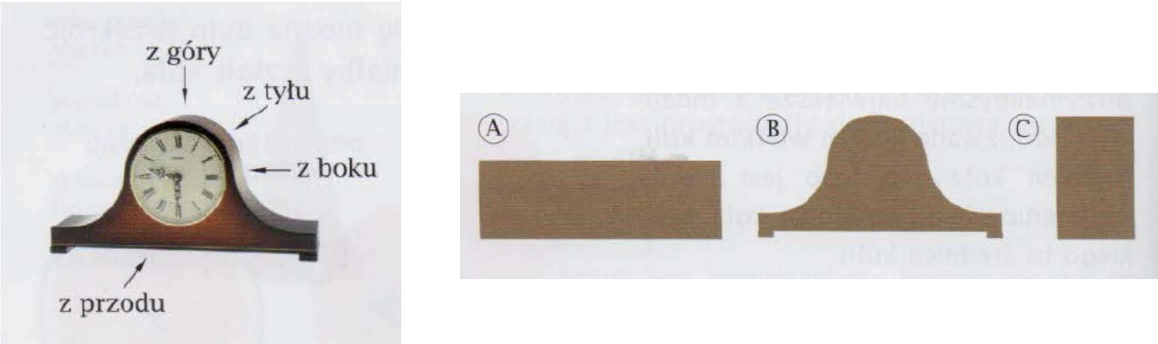
Rozvoj kritického myslenia žiakov základných škôl v zahraničí v predmete matematika

Zaujímalo nás, či v zahraničných učebniciach pre žiakov základnej školy nájdeme úlohy rozvíjajúce ich kritické myslenie. Zamerali sme sa na úlohy, ktoré majú priamy súvis aj s úlohami, ktoré na Slovensku riešia žiaci aj na vyučovacích hodinách predmetu technika. K dispozícií sme mali dve učebnice pre žiakov 6. ročníka:

1. Mathematik plus. Grundschule Klasse 6,
2. Matematyka 6. Podręcznik dla klasy szóstej szkołpodstawowej.

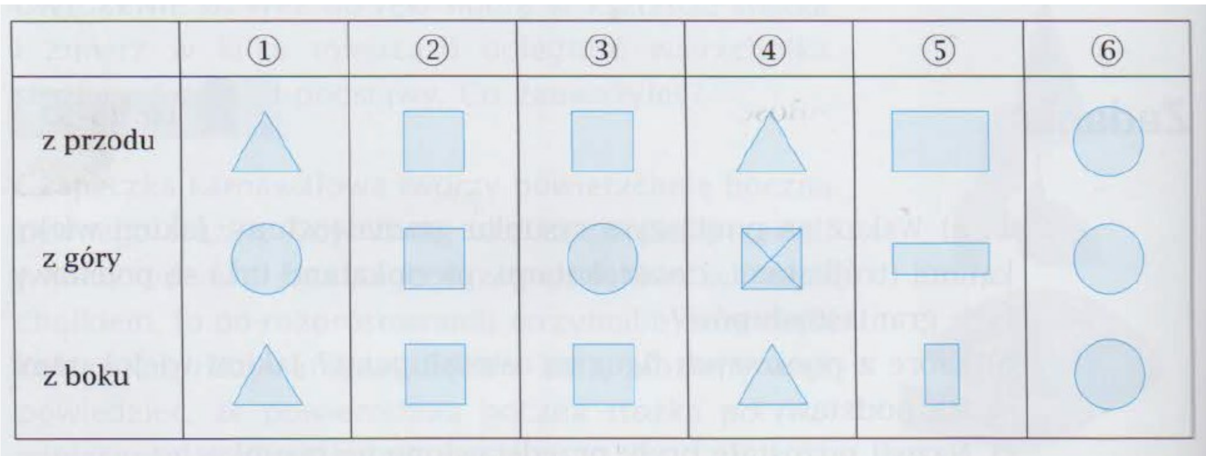
Konštatujeme, že obe publikácie boli veľmi pekne graficky spracované. V porovnaní so slovenskými učebnicami pre 6. ročník [9] [10], ktoré sme mali k dispozícii, obsahovali omnoho viac obrázkov a zábavných úloh. Zameranie slovných úloh bolo na rodinu a situácie, s ktorými sa žiaci môžu stretávať bežne pri činnostiach doma, v škole alebo pri hrách. Myslíme si, že obsahové zameranie úloh v analyzovaných učebniciach je pre žiakov podnetné a motivujúce.

V poľskej učebnici pre žiakov 6. ročníka [11] boli zaradené viaceré úlohy majúce priamy súvis s obsahom vzdelávania vo vyučovacom predmete technika v Slovenskej republike. V úlohe č. 1 mali žiaci vyobrazené stolové hodiny a vyznačené rôzne smery pohľadov. Úlohou žiakov bolo správne priradiť k obrázkom označených písmenami A, B a C smer pohľadu.



Obrázok 1: Úloha s hodinami [1, s. 144]

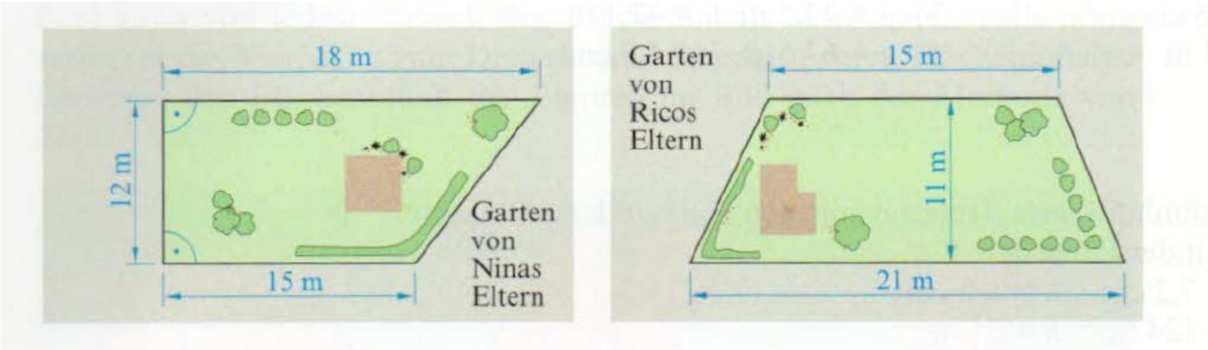
V druhej úlohe mali žiaci rozhodnúť, ktoré jednoduché telesá sú zakreslené v stĺpcoch pomocou pohľadu spredu, zhora a zboku (obrázok č. 2). Uvedená úloha je pre žiakov náročnejšia, lebo nemajú k dispozícií 3D zobrazenie telies znázornených pomocou troch priemetov. Myslíme si, že pre žiakov 6. ročníka je úloha náročná, nakoľko u mnohých žiakov prevládajú ešte konkrétne myšlienkové operácie.



Obrázok 2: Priraď teleso s zobrazeniam [1, s. 144]

Obsah a spracovanie nemeckej učebnice [12], ktorú sme mali k dispozícií, bolo najvyhovujúcejšie vzhľadom na vek žiakov 6. ročníka. Obsah bol farebný, s mnohými obrázkami doplňujúcimi text. Texty úlohy boli formulované jednoznačne a zaujímavo. Slovné úlohy boli zamerané na praktické využitie.

V úlohe č. 1 mali žiaci rozhodnúť, koho rodičia majú väčšiu plochu záhrady – obrázok 3 [12, s. 156]. Úloha bola zaradená k téme Flächeninhalt von Vierecken (výmera štvoruholníka) - Výpočet obsahu štvoruholníka. K danému učivu boli zaradené dve úlohy na výpočet, tri na konštrukciu a päť slovných úloh.

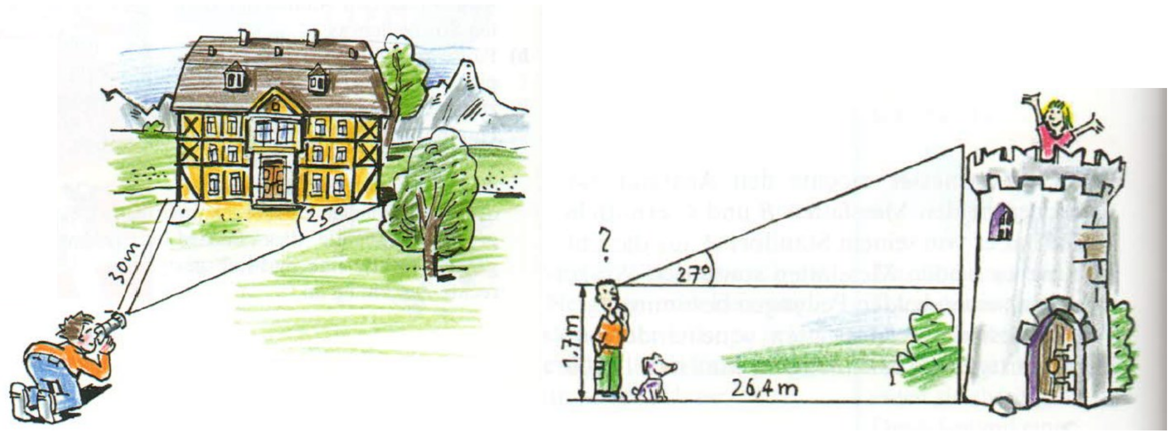


Obrázok 3: Plocha štvoruholníka [5, s. 156]

K téme Flächeninhalt von Dreiecken (výmera trojuholníka) bolo v učebnici 18 slovných úloh. Vybrali sme na ukážku dve úlohy.

V prvej úlohe mali žiaci vypočítať šírku penziónu určeného na predaj, ak majú k dispozícií len túto fotografiu (obrázok 4a). V druhej úlohe sa mal chlapec menom Basti dostať do veže za Lenou, ale dvere boli zamknuté (obrázok 4b). Za príbehom boli uvedené dve otázky:

a) Aká vysoká je veža?
b) Aký dlhý rebrík Basti potrebuje, keď rebrík musí byť, kvôli bezpečnosti, opretý o vežu pod uhlom 70 ˚?



a) b)

Obrázok 4: Úlohy na výpočet rozmerov trojuholníka a) úloha Penzión, b) úloha Veža [12, s. 138]

Všimli sme si, že v nemeckej učebnici sme **nenašli** úlohu, v ktorej by boli údaje potrebné k riešeniu úlohy, uvedené priamo v texte. To znamená, že žiaci si vždy musia informácie vyhľadať z grafického zobrazenia úlohy.

To je prvý predpoklad k identifikácii súvislostí a hľadania možností riešenia.

Riešenie úloh, ktoré majú podstatné informácie zobrazené pomocou schém, obrazov a grafov, rozvíja aj schopnosť žiakov čítať technické výkresy v technicky orientovaných predmetoch (na Slovensku v predmete technika).

Konštatujeme, že všetky analyzované úlohy sú vhodné na rozvoj kritického myslenia žiakov, nakoľko rozvíjajú nasledovné spôsobilosti podmieňujúce ich kritické myslenie:

- identifikovať súvislosti,
- určiť vzťahy medzi sledovanými objektmi,

- definovať podmienky,
- identifikovať podobnosti a rozdielnosti,
- riešiť problémy a vyvodzovať závery,
- reflektovať svoje vlastné myšlienkové procesy,
- realizovať metakognitívne sebahodnotenie svojich vlastných názorov a dôvodov na riešenie úlohy.

Záver

Vyučovací predmet matematika je laickou verejnosťou často vnímaný ako na žiaka náročný predmet, kde žiak získa mnohé vedomosti nevyužiteľné pre ďalší život. Avšak výskumami sme preukázali súvislosť medzi vedomosťami a zručnosťami, ktoré žiaci nadobudnú vo vyučovacom predmete matematika a technika. V príspevku sme chceli zdôrazniť, že riešením matematických úloh sa žiak učí nielen nové vedomosti, vzorce, ale rozvíja sa celá jeho osobnosť, a tým aj schopnosť kriticky myslieť. Pri hľadaní správneho riešenia je žiak nútený rozmýšľať a hľadať potrebné informácie, ktoré nie sú na prvý pohľad viditeľné, a nájsť medzi nimi súvislosti. Až potom môže využiť osvojené vedomosti v podobe správne zvolených vzorcov. Myslíme si, že uvedený postup je základom pre rozvoj kritického myslenia. Ak by slovenskí žiaci riešili viac úloh, v ktorých sú informácie ukryté v statickom zobrazení, boli by úspešnejší aj v riešení úloh v medzinárodnom meraní OECD PISA pre oblasť matematickej a prírodovednej gramotnosti.

Použitá literatúra

[1] Výsledky slovenských 15-ročných žiakov sú podľa medzinárodnej štúdie PISA 2015 pod priemerom krajín OECD (online): https://www.minedu.sk/vysledky-slovenskych-15-rocnych-ziakov-su-podla-medzinarodnej-studie-pisa-2015-pod-priemerom-krajin-oecd/

[2] Ndofirepi, A.P. Is critical thinking desirable for children? In: *Mediterranean Journal of Social Sciences,* 2014, vol. 5, no. 10, pp. 325-330. ISSN 1549-3652.

[3] Vaněček, D. a kol. *Didaktika technických odborných předmětů*. Praha: České vysoké učení technické v Praze. 2016. 500 s. ISBN 978-80-01-05991-3

[4] Domike, G. C., Odey, E. O. Teachers pattern of instruction and location on pupils critical thinking in science achievement in imo state. In: *Global Journal of Educational Research*, 2011. vol. 10, no. 1, pp. 1- 7, ISSN 1596-6224.Dobrowolska, M. a kol. *Matematyka 6. Podręcznik dla klasy szóstej szkołpodstawowej. Wersja dla nauczyciela.* Gdańsk: Interak, Czarnków, 2010. 411 s. ISBN 978-83-7420-240-4.

[5] Rumanová, L., Záhorská, J., Vallo, D. Pupils´ solutions of a geometric problem from a mathematical competition. In: *Acta mathematica 17.* Nitra: UKF, 2015. s. 143-148. ISBN 978-80-558-0613-6.

[6] Tomková, V. *Technická neverbálna komunikácia. 1. vyd*. Nitra: UKF, 2013. 204 s. ISBN 978-80-558-0367-8.

[7] Tomková, V. a kol. *Priestorová predstavivosť v školskej praxi*. 1. vyd. Nitra: UKF, 2014. 158 s. ISBN 978-80-558-0711-9.

[8] Tomková, V. , Honzíková, J. Význam geometrie v technickom vzdelávaní žiakov 2. stupňa základnej školy. In: *Acta mathematica nitriensia*, 2015. vol. 1, No. 2, s. 68-73. ISSN 2453-6083.

[9] Žabka, J., Černek, P. *Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 1. časť*. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2013. 143 s. ISBN 978-80-8120-259-9.

[10] Žabka, J., Černek, P. *Matematika pre 6. ročník ZŠ a 1. ročník gymnázií s osemročným štúdiom, 2. časť*. Bratislava: Orbis Pictus Istropolitana, 2013. 143 s. ISBN 978-80-8120-260-5.

[11] Dobrowolska, M. a kol. *Matematyka 6. Podręcznik dla klasy szóstej szkołpodstawowej. Wersja dla nauczyciela.* Gdańsk: Interak, Czarnków, 2010. 411 s. ISBN 978-83-7420-240-4.

[12] Pohlmann, D., Stoye, W. *Mathematik plus. Grundschule Klasse 6*. Berlin: Corneslen, Volk und Wissen Verlag, 2005, 117 s. ISBN 3-06-000665-2.

Acta Mathematica Nitriensia
Vol. 3, No. 1, p. 15 – 22
ISSN 2453-6083

Stratégie riešenia vybraných úloh krajského kola Matematickej olympiády v kategórii Z9 v školskom roku 2016/2017

Strategy for Solving Selected Problems of the Regional Round of the Mathematical Olympiad in the Z9 Category in the School Year 2016/2017

Júlia Záhorská [a*] – Jozef Fulier [b]

[a,b *]*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra, Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received 3 april 2017; received in revised form 13 April 2017; accepted 24 April 2017

Abstract

In this article, we focus on the need to motivate pupils in mathematical studies by organizing competitions and encouraging them to join competitions. We present a list of current mathematical competitions currently organized in Slovakia. Approximately 15-year-old pupils have the opportunity to compete in the Z9 category of the Mathematical Olympiad. We analyze strategies for solving two problems of the regional round of the 66th year of RR MO Z9 (KK MO Z9) in the Nitra region and we are processing the success rate for these tasks in this round.

Keywords: motivation, mathematical competition, Mathematical Olympiad, strategy for solving

Classification: B60, C20, C30, U40

Úvod

Jedným z cieľov matematického vzdelávania na druhom stupni ZŠ je, aby žiaci nadobudli schopnosť používať matematiku vo svojom budúcom živote a rozvíjali svoje logické a kritické myslenie. Zároveň sa učia argumentovať, komunikovať a spolupracovať v skupine pri riešení problému. Spoznávajú matematiku ako súčasť ľudskej kultúry a dôležitý nástroj pre spoločenský pokrok. Nadobúdajú zároveň ďalšie matematické zručnosti a schopnosti pri spracovávaní textov a vzťahov, nielen matematických. Dôraz sa kladie na matematizáciu reálnej situácie a interpretáciu výsledkov. [1]

Po zavedení školskej reformy do praxe v roku 2008 sa vo výchovno-vzdelávacom procese na všetkých stupňoch vzdelávania realizovalo značné množstvo zmien. Príprava a realizácia ďalších zmien je opäť aktuálna.

Názory učiteľov na pozitívny, či negatívny dopad na žiakov sa rôznia. Čo sa týka vzdelanostnej úrovne, v medzinárodnom meraní pätnásťročných žiakov PISA, zaznamenávame *„trend mierne klesajúceho výkonu v matematickej gramotnosti“* od roku 2003. V matematickej

*Corresponding author; email: jzahorska@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2017.3.1.15-22

gramotnosti bol výkon slovenských žiakov v roku 2015 (podobne ako v PISA 2012), štatisticky významne nižší ako priemer krajín OECD. [2]

Ako sa ďalej uvádza v [3], žiaci majú nedostatočné vedomosti a zručnosti z geometrie, majú problémy s objavovaním vzťahov medzi rôznymi veličinami a problémy s interpretáciou výsledkov.

Riešenie je podľa autorov v používaní inovatívnych metód a foriem vyučovania, v zaraďovaní problémov z bežného života na učenie sa a tvorivé hľadanie riešení.

V tomto kontexte je významným prvkom, ktorým možno motivovať žiakov k zvýšeniu záujmu o vyučovanie matematiky a riešenie matematických problémov, organizovanie a realizácia matematických súťaží. Prehľad aktuálnych matematických súťaží, ktoré sú v súčasnosti organizované na Slovensku, prinášame v ďalšej časti príspevku. Približne 15 – roční žiaci majú možnosť zapojiť sa do súťaže Matematická olympiáda v kategórii Z9. Zaujali nás stratégie riešenia dvoch úloh krajského kola 66. ročníka KK MO Z9 v Nitrianskom kraji, ktoré analyzujeme a spracovávame úspešnosť riešení úloh uvedeného kola.

Matematické súťaže na Slovensku pre žiakov 2. stupňa ZŠ

Na Slovensku sa koná viacero matematických súťaží, ktorých cieľom je podporiť záujem žiakov o matematiku, napomôcť vyhľadávaniu talentov a podpore ich rastu a rozšíriť matematické vedomosti žiakov. Tieto súťaže prispievajú k popularizácii matematiky a sú cenným zdrojom informácií potrebných ku skvalitňovaniu výchovno-vzdelávacieho procesu pre učiteľov.

Ďalej uvádzame stručný prehľad matematických súťaží a v nich jednotlivých kategórií, ktoré sú určené pre žiakov nižšieho sekundárneho vzdelávania:

a) *Matematická olympiáda* (MO) je určená žiakom základných škôl, osemročných gymnázií a žiakom stredných škôl. Organizuje sa v domácom, školskom, okresnom, krajskom a celoštátnom kole. Víťazi najvyššej kategórie (kategórie A) môžu postúpiť na Medzinárodnú matematickú olympiádu (IMO).
   Pre základné školy sú určené kategórie Z5 – Z9, ktoré sa organizujú v domácom a okresnom kole, kategória Z9 končí krajským kolom. Nie je pre žiakov spoplatnená. [4]

b) *Pytagoriáda* (PYT) je matematická súťaž, v ktorej okrem správnosti vypočítaných príkladov rozhoduje aj čas, za ktorý žiaci vypočítajú dané úlohy. Výsledné hodnotenie sa skladá z bodov za správnosť a z bodov za čas využitý na riešenie úloh.
   Súťaž je organizovaná v kategóriách pre 1. stupeň ZŠ (3. a 4. ročník) a pre 2. stupeň ZŠ v kategóriách P5 (školské a okresné kolo) až P8 (školské, okresné a celoštátne kolo). Za účasť v súťaži žiaci neplatia.[5]

c) *Pangea* je matematická súťaž pre 7. až 9. ročník ZŠ a 1. až 3. ročník SŠ s cieľom prepojiť a porovnať znalosti žiakov a študentov v rôznych krajinách celého sveta. Na piatom ročníku v roku 2016 sa zúčastnilo viac ako 63 000 žiakov zo Slovenska.
   Najúspešnejší riešitelia súťaže zo stredných škôl získajú možnosť štúdia na niektorých fakultách niektorých univerzít v Bratislave bez absolvovania prijímacích skúšok. Účasť nie je spoplatnená. [6]

d) *Matematický klokan* je najväčšia medzinárodná matematická súťaž na svete určená pre žiakov 1. ročníka základnej školy až posledného ročníka strednej školy.

Žiaci 2. stupňa ZŠ môžu súťažiť v kategóriách Školák 5, Školák 6, Benjamín 7, Benjamín 8 a Kadet 9. V roku 2016 súťažilo v 58 krajinách sveta celkom 5 999 174 žiakov. Účasť v súťaži je spoplatnená. [7]

e) *GENIUS MATEMATICUS* je medzinárodná matematická online súťaž určená pre žiakov od 8 rokov, pri ktorej môžu zábavnou formou riešiť veľmi zaujímavé a netradičné matematické úlohy z každodenného života (50 úloh v trvaní 40 minút s dohľadom koordinátora).
Pre 2. stupeň ZŠ sú určené kategórie 04, 03 a 02, za účasť v súťaži sa platí. [8]

f) *MAKS* je matematická súťaž pre 2. stupeň ZŠ v kategóriách MAKS 5 až MAKS 9. Žiaci prostredníctvom koordinátora po zaplatení tzv. štartovného zasielajú vyriešené úlohy na vyhodnotenie (na riešenie majú viac ako 3 týždne, vyberajú si štyri z piatich úloh). Počas školského roka je 8 kôl, žiaci môžu pracovať aj vo dvojiciach. [9]

g) V súťaži *EXPERT* (celoslovenská vedomostná súťaž pre 6. ročník ZŠ až posledný ročník SŠ) si môžu súťažiaci vybrať z ôsmich tém dve. Téma Mozgolamy je zameraná na matematiku a určená pre všetky vekové kategórie. Obsahuje logické hádanky, postupnosti, zaujímavé slovné úlohy, úlohy zamerané na kombinačné a pojmové myslenie.
Pre 2. stupeň základnej školy sú určené kategórie EXPERT 6 - EXPERT 9. Za účasť sa platí. [10]

h) *Logická olympiáda* je celoslovenská súťaž určená pre žiakov základných škôl a 8 - ročných gymnázií do 15 rokov so všeobecným intelektovým nadaním. Súťaž je realizovaná (od roku 2013) v školských kolách a celoslovenskom finále v Prešove. Pozostáva zo 4 oblastí: matematický - priestorový - logický úsudok a verbálne myslenie. [11]

Matematická olympiáda – krajské kolo v kategórii Z9 v školskom roku 2016/2017

V školskom roku 2016/2017 sa krajského kola v kategórii Z9 v Nitrianskom kraji zúčastnilo 41 žiakov základných škôl a prvého ročníka gymnázií. Ich výsledky možno hodnotiť ako veľmi rôznorodé.

V článku sa podrobnejšie venujeme prvým dvom úlohám, ktoré nás zaujali nielen zadaním, ale hlavne stratégiami žiackych riešení. Vyhodnotili sme riešenia 27 riešiteľov, ktoré boli v slovenskom jazyku. Riešenia v maďarskom jazyku sme nevyhodnocovali. Všetky uvádzané výsledky sa týkajú riešiteľov z Nitrianskeho kraja.

1. **úloha**: *Michaela a Jana dnes obe majú narodeniny, dokopy majú 84 rokov. Pritom Michaela má dvakrát viac rokov, ako mala Jana, keď Michaela mala toľko rokov, koľko má Jana dnes. Koľko rokov má Michaela a koľko Jana?* [12]

V riešeniach, ktoré uviedla autorka úlohy, nachádzame tieto možnosti:

- zostavenie a riešenie lineárnej rovnice s jednou neznámou, ktorá vyjadruje vek Jany v minulosti,
- zostavenie a riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi, ktoré vyjadrujú vek Jany aj Michaely v minulosti,
- riešenie úsudkom (postupné skúšanie možností) vychádzajúce z poznatku, že Michaela má vek vyjadrený párnym číslom a súčet vekov je 84 rokov.

Tabuľka 1: Stratégie riešenia v žiackych riešeniach 1. úlohy

	Počet riešiteľov	Úplné riešenie	Neúplné riešenie	Maximálny počet bodov	Získaných bodov spolu
Zostavenie a riešenie sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi	3	2	1	18	16
Zostavenie a riešenie sústavy troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi	4	4	0	24	24
Použitie štyroch neznámych pri vyjadrení vzťahov a dokončenie úsudkom	1	0	1	6	4
Riešenie úsudkom s využitím neznámych v zápise úlohy	5	1	4	30	22
Riešenie úsudkom	14	1	13	84	45

Komentár k údajom v *Tabuľke 1*: Za úlohu mohol riešiteľ získať maximálne 6 bodov. Štvrtý a piaty stĺpec tabuľky slúži na porovnanie počtu bodov, ktoré mohli riešitelia získať a koľko v skutočnosti získali, aby čitateľ vedel posúdiť neúplnosť riešení.

Najčastejšie nedostatky boli v nedostatočnom, nesprávnom alebo chýbajúcom zdôvodnení, že ide o jediné riešenie úlohy. Tri riešenia úsudkom boli úplne nesprávne. Zaujímavé boli riešenia jedného riešiteľa, z ktorých bolo zrejmé, že bol pripravovaný na súťaž individuálne a postupy riešení, zdôvodnenia i závery boli na vysokej úrovni.

2. **úloha**: *Pred Janom sedeli tri zahalené princezné a Jano mal za úlohu zistiť, ktorá z nich je Zlatovláska.*

Princezná v prvom kresle povedala: „V treťom kresle Zlatovláska nesedí."

Princezná v druhom kresle povedala: „Ja Zlatovláska nie som."

Princezná v treťom kresle povedala: „Ja som Zlatovláska."

Zázračná muška Janovi prezradila, koľko princezien klamalo. Až s touto radou dokázal Jano odhaliť pravú Zlatovlásku. Ktorá z princezien bola Zlatovláska? [12]

V riešeniach, ktoré uviedla autorka úlohy nachádzame tieto možnosti:

- rozbor všetkých prípadov, ktoré by nastali, ak by Zlatovláska sedela postupne v jednotlivých kreslách,
- rozbor ôsmich možností podľa pravdivosti, resp. nepravdivosti jednotlivých výrokov.

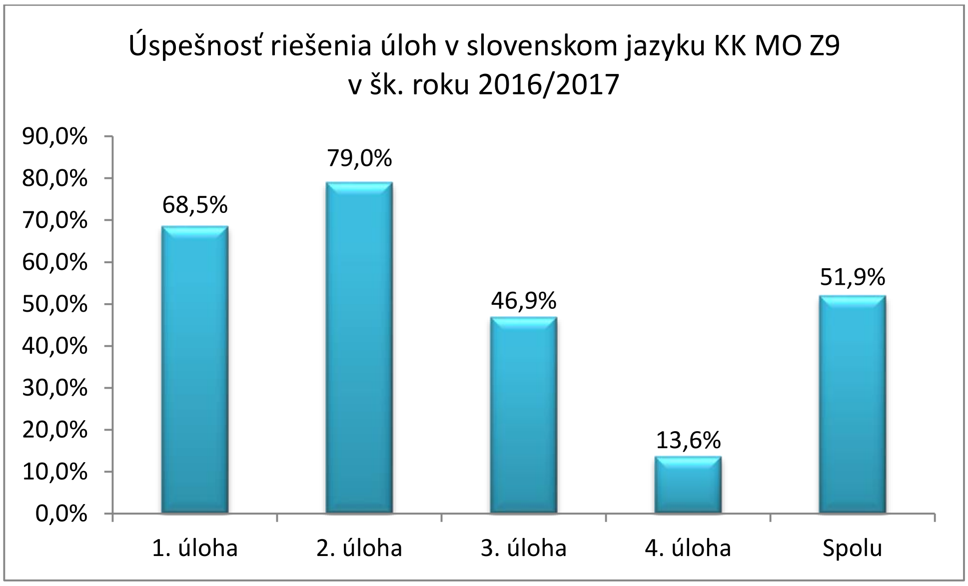
Prvým z uvedených spôsobov riešili úlohu dvaja riešitelia, každý získal plný počet bodov. Jeden riešiteľ zostavil tabuľku pravdivostných hodnôt pre tri jednoduché výroky a správnym uvedením dôvodov vedúcich k správnemu riešeniu tiež získal plný počet bodov. Ostatní riešitelia uvažovali druhým z vyššie uvedených spôsobov riešenia úlohy, nie vždy však dostatočne zdôvodnili jednoznačnosť riešenia. Uvažovali, čo sa stane, ak klame jedna, dve alebo všetky tri princezné, ale nevylúčili možnosť, že všetky tri súčasne hovoria pravdu. Úspešnosť riešení týchto dvoch úloh uvádzame v nasledujúcom grafe a pre zaujímavosť sme pridali aj úspešnosť riešení zvyšných dvoch úloh, ktorých znenie uvádzame.

3. **úloha**: *Veliteľ zvolal ostatných obrancov hradu a rozhodol, ako sa rozdelia o svoju odmenu:*

   „Prvý si vezme jeden dukát a sedminu zvyšku, druhý si vezme dva dukáty a sedminu nového zvyšku a tak ďalej. Teda n-tý obranca si vezme n dukátov a k tomu ešte sedminu zo zvyšného množstva dukátov, pokiaľ nejaké budú.“

   Takto sa podarilo rozdeliť všetky dukáty a pritom všetci obrancovia dostali rovnako. Koľko obrancov sa delilo o odmenu? [12]

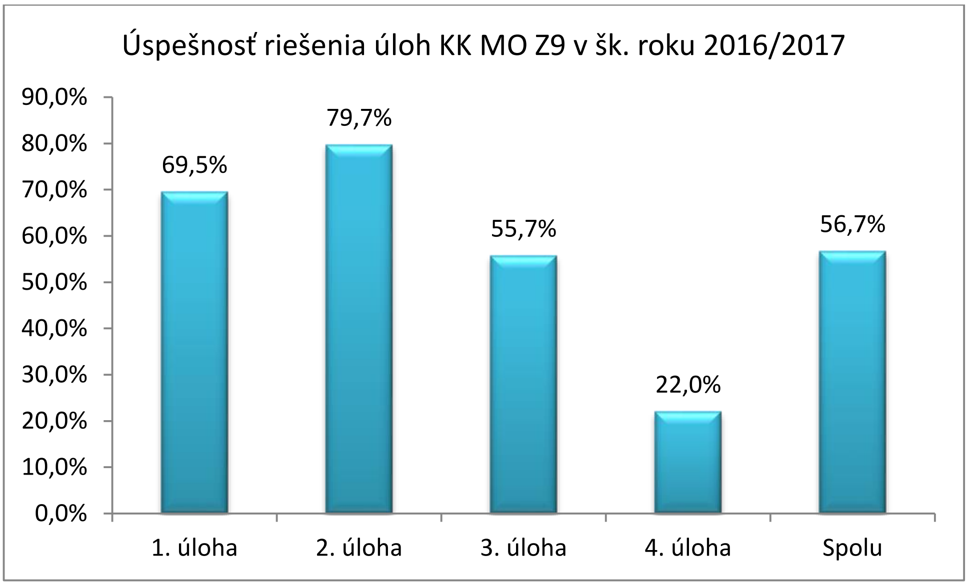
4. **úloha**: *V rovnoramennom trojuholníku ABC je základňa AB dlhá 6 cm a uhol BCA má veľkosť 45°. Vypočítajte polomer kružnice opísanej tomuto trojuholníku.* [13]



Graf 1 Úspešnosť riešenia všetkých úloh KK MO Z9 v slovenskom jazyku

Z grafu 1 vidieť, že ďalšie úlohy boli riešené menej úspešne, pričom rozdiel v úspešnosti je značný. Domnievame sa, že prvé dve úlohy boli náročné na porozumenie a logické spracovanie textu. Riešitelia sa potom ešte ako – tak „potrápili“ s riešením tretej úlohy (textovo bola tiež náročná na porozumenie a spracovanie). To bol možno jeden z dôvodov prečo sa drvivá väčšina súťažiacich vôbec nezaoberala riešením poslednej – štvrtej úlohy, resp. na riešenie tejto úlohy im nezostal dostatok času. Dokumentuje to skutočnosť, že napriek tomu, že táto úloha (z hľadiska kategorizácie úloha geometrická) nebola veľmi náročná, vzhľadom na učivo druhého stupňa ZŠ, predsa len až 21 riešiteľov (z 27 riešení v slovenskom jazyku) nezískalo za riešenie tejto úlohy ani bod.

Nasledovný graf (Graf 2), ktorý uvádzame na porovnanie, znázorňuje úspešnosť všetkých riešení (41) všetkých úloh v slovenskom i maďarskom jazyku.



Graf 2 Úspešnosť riešenia všetkých úloh KK MO Z9 v slovenskom i maďarskom jazyku

Keďže sme mali možnosť dať riešiť prvé dve úlohy budúcim učiteľom matematiky (trinástim študentom 3. ročníka učiteľstva akademických predmetov v kombinácii s matematikou) zaujímalo nás, či budú rozdiely vo voľbe stratégií riešenia. Naše zistenia sú nasledovné:

- v riešení prvej úlohy vo všetkých prípadoch využili zostavenie a riešenie sústavy dvoch alebo troch lineárnych rovníc s dvomi alebo tromi neznámymi,
- v riešení druhej úlohy traja študenti urobili rozbor všetkých prípadov, ktoré by nastali, ak by Zlatovláska sedela postupne v jednotlivých kreslách a ostatní riešili rozborom ôsmich možností podľa pravdivosti, resp. nepravdivosti jednotlivých výrokov.

Záver

Ako sme už naznačili v úvode, jednou z ciest, ako podporovať záujem žiakov o matematiku, je účasť v matematických súťažiach a to v takých, kde môžu súťažiť nielen výrazné matematické talenty, ale aj žiaci, ktorých matematika „baví".

Podľa nášho názoru sa s účasťou žiakov v matematických súťažiach spájajú viaceré problémy. Jedným z nich je platba za účasť v súťaži. Niektoré školy riešia účasť svojich žiakov na takto spoplatnených súťažiach úhradou platby zo zdrojov rodičovského združenia, niekedy si účasť hradia jednotlivci. Možno by stálo za pozornosť zvážiť podporu väčšieho množstva matematických súťaží z prostriedkov ministerstva školstva SR.

Jednoznačne najkomplexnejšou matematickou súťažou je Matematická olympiáda, ktorá je najstaršou predmetovou olympiádou v SR, v súčasnosti (školský rok 2016/2017) prebieha už 66. ročník. Táto olympiáda sa stala vzorom pre všetky ostatné predmetové olympiády v SR. V súčasnosti je evidovaných už 16 olympiád, treba však priznať, že viaceré z nich sú iba istou formou predmetových súťaží, ktoré sú od ideálu MO veľmi vzdialené. Napriek dlhodobej histórii MO je možné nájsť aj v organizácii tejto komplexnej matematickej súťaže slabšie miesta. Jedným z nich je, že kategórie Z5 až Z9 MO nemajú *školské kolá.* Znamená to, že úspešné absolvovanie domáceho kola MO uvedených kategórií zväčša postačuje na postup do *okresného kola MO* príslušnej kategórie MO. Toto spôsobuje netriviálne problémy, pretože pri riešení domáceho kola MO sa nemôže vylúčiť vplyv či dokonca priame vypracovanie riešenia úloh domáceho kola MO ambicióznymi rodičmi, staršími súrodencami, spolužiakmi či dokonca aj samotnými učiteľmi matematiky, ktorí chcú, aby sa ich zverenci dostali na okresné kolo MO. Jednoducho povedané, v prípade, že počet úspešných riešiteľov domáceho kola prevyšuje kapacitu okresného kola MO, tento postup nezaručuje, že do okresného kola sa dostanú tí najlepší. Okresné komisie MO samozrejme o tomto probléme vedia a pri rozhodovaní o tom, koho vyberú do okresného kola MO zavádzajú ďalšie kritériá, ktoré by im umožnili čo najspravodlivejší výber súťažiacich do okresných kôl MO, napríklad horné obmedzenie počtu vybraných žiakov z jednej školy, či zohľadnenie histórie úspešnosti žiakov z danej školy, prezretie a posúdenie všetkých riešení úloh domáceho kola MO všetkých uchádzačov o okresné kolo a nasledovný výber tých najlepších, a pod. Bohužiaľ ani jedno z týchto dodatočných kritérií nezaručuje, že na okresné kolo MO sa dostanú všetci tí, ktorí si to za svoju prácu či talent zaslúžia. Kritická situácia je najmä v najvyššej kategórii MO na základnej škole, v kategórii Z9. Táto kategória je špecifická jednak v tom, že súťažiaci v tejto kategórii môžu postúpiť až do krajského kola MO, ale najmä tým, že riaditelia stredných škôl zohľadňujú výsledky súťažiacich v tejto kategórie MO (a nie celkom nevýznamne - čo je určite správne) v prijímacom konaní záujemcov o štúdium na ich škole. Preto je záujem žiakov 9. ročníka ZŠ o zapojenie sa do riešenia úloh kategórie Z9 MO pomerne veľký. Toto je určite potešujúci fakt pre všetkých, ktorým matematická gramotnosť žiakov našich škôl a osud matematickej olympiády nie je ľahostajný: od učiteľov matematiky, od členov okresných, krajských komisií MO až po celoštátnu komisiu MO, SKMO. Zostáva však tieň podozrenia, že aj napriek enormnej snahe sa môže stať, že výber na okresné kolo MO bude nespravodlivý. Zdá sa nám, že jediným možným riešením je zavedenie školského kola MO aj pre kategóriu Z9 MO, kde budú žiaci riešiť úlohy samostatne a pod dozorom učiteľov matematiky, rovnako ako je to vo vyšších kategóriách MO, v kategóriách C, B a A.

Literatúra

[1] ŠPÚ. (2015). *Štátny vzdelávací program. Matematika – nižšie stredné vzdelanie.* Dostupné: http://www.statpedu.sk

[2] MŠVVaŠ SR, NÚCEM, OECD. (2016). *PISA 2015. Prvé výsledky výskumu 15-ročných žiakov z pohľadu Slovenska.* Dostupné: http://www.nucem.sk/

[3] MŠVVaŠ SR, NÚCEM.(2016). *Testovanie T9-2016. Priebeh, výsledky a analýzy.* Bratislava.

Dostupné: http://www.nucem.sk/

[4] Matematická olympiáda. Dostupné: https://www.iuventa.sk/sk/Olympiady/Olympiady-a-sutaze/MO/66-rocnik-MO-2016-2017.alej

[5] Pytagoriáda. Dostupné:

https://www.iuventa.sk/sk/Olympiady/Olympiady-a-sutaze/PYT.alej

[6] Pangea. Dostupné: http://www.pangea-sutaz.sk/

[7] Matematický klokan. Dostupné: http://matematickyklokan.sk/

[8] GENIUS MATEMATICUS. Dostupné:

http://www.geniuslogicus.eu/sutaze-pre-vsetkych/0014/

[9] MAKS. Dostupné: http://maks.sk/

[10] EXPERT. Dostupné: http://sutazexpert.sk/

[11] Logická olympiáda. Dostupné: http://www.logickaolympiada.sk/o-su-azi.html

[12] Volfová, M. (2017). *66. ročník Matematickej olympiády 2016/2017. Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9*. Dostupné: https://www.iuventa.sk/

[13] Růžičková, L. (2017). *66. ročník Matematickej olympiády 2016/2017. Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9.* Dostupné: https://www.iuventa.sk/