

Námety k vyučovaniu geometrie v sekundárnom matematickom vzdelávaní s akcentom na riadené bádanie

Suggestions for Teaching Geometry at Secondary Mathematics Education with an Emphasis for Guided Inquiry

Lucia Rumanová^{a*} – Júlia Záhorská^a

^{a*}*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received October 21, 2021; received in revised form October 28, 2021; accepted October 28, 2021

Abstract

In this paper, we focused on teaching geometry, as this part of mathematics causes basic and secondary school students difficulties and is also one of the less popular ones. We have designed specific didactic problems, including innovative methodologies from the perspective of the teacher which uses inquiry-based learning, while we have chosen guided inquiry. In this paper, we present the possibility of how to innovate teaching using an inquiry approach at secondary mathematics education. We implemented the mentioned problems into the teaching process at primary and secondary school and subsequently, we presented pedagogical reflection as an important part of the educational work of mathematics teachers.

Keywords: guided inquiry, educational process, problems for pupils, reflections of teachers, GeoGebra.

Classification: 97C80

Úvod

Vyučovanie matematiky, obzvlášť geometrie, je významné z pohľadu implementovania vzdelávania s bádateľským charakterom, ktoré žiakom umožňuje lepšie si uvedomiť užitočnosť nadobudnutých prírodovedných poznatkov, ako aj možnosti ich následnej aplikácie do bežného života.

Bádateľsky orientované vyučovanie má množstvo výhod, spomenieme niektoré z pohľadu užitočnosti pre žiaka. Jednou z výhod je napríklad vytváranie vhodných podmienok pre aktivitu žiakov, najmä tých, ktorí nemajú istotu v riešení problematiky. Zároveň podnecuje žiakov k tvoreniu otázok, formulovaniu hypotéz, plánovaniu postupov, hľadaniu a triedeniu informácií, vyhodnocovaniu výsledkov a formulovaniu vlastných záverov. Žiaci si ľahšie zapamätajú bádanim získané poznatky a skôr porozumejú problematike. Prínosom je tiež, že žiaci získavajú skúsenosti samostatnou prácou, alebo spoločnou prácou v skupine so spolužiakmi, takže prínos jedného žiaka je prínosom pre celú skupinu a zároveň všetci žiaci majú svoj podiel na tejto práci. Význam vidíme aj v nadobudnutých skúsenostiach žiakov s riešením otvorených problémov a často aj v podpore medzipredmetových vzťahov (viď Slepáková, Kimáková, 2015).

*Corresponding author: lhumanova@ukf.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.2.1-7

V článku uvidíme ukážky konkrétnych úloh z geometrie, v ktorých je možné použiť riadené bádanie pripravené učiteľom. Úlohy boli implementované do vyučovania matematiky na základnej a strednej škole v rámci nami vytvorených inovatívnych metodík v rámci projektu IT Akadémia. Učitelia ich využívali vo svojom vyučovacom procese dva roky, čo nám umožňuje uviesť aj reflexiu učiteľov matematiky z rôznych škôl na Slovenku na uvedené úlohy.

Riadené bádanie vo vyučovacom procese

Kireš a kol. (2016) vnímajú bádanie ako pedagogický prístup k vzdelávaniu, ktorý realizuje učiteľ. Z pohľadu žiaka ide o to, aby sa jeho aktívne poznávanie stalo spôsobom jeho učenia, premýšľania, získavania vedomostí a zručností. Znamená to, že učiteľ neodovzdáva žiakom učivo priamo. K poznatkom žiaci prichádzajú postupným a hlavne vlastným bádáním, ktoré je sledované učiteľom.

Cieľom takto zadaných úloh a iných aktivít je vyvolať u žiaka snahu osvojiť si kritické myslenie, rovnako aj prístupy alebo metódy, ktoré sú zamerané na riešenie problémových úloh. Učiteľ týmto prístupom u žiakov podnieti aktívne skúmanie a získavanie poznatkov.

Pod pojmom riadené bádanie Banchi a Bell (2008) rozumejú bádanie v závislosti od podielu zapojenia učiteľa a žiakov do tohto procesu na vyučovacej hodine, kde postup a jeho výsledok je bez prítomnosti učiteľa. To znamená, že učiteľ zadá žiakom problémovú úlohu, resp. otázku, pričom žiaci pripravujú postup riešenia daného problému, ktorý sami navrhnu, vrátane samotnej realizácie uvedeného postupu.

Bádateľské aktivity môžu byť rôzneho charakteru, napríklad vo forme experimentovania alebo modelovania problému. Z pohľadu učiteľa má bádateľsky orientované vyučovanie vysoké nároky vzhľadom na jeho efektívne uplatnenie vo vyučovacom procese, ktoré sa týkajú aj jeho prípravy a priebehu. Pre učiteľa je táto príprava neľahká a časovo náročná, mal by sa však v procese bádania dobre orientovať.

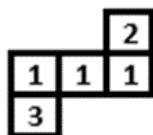
Aktivita „Stavby z kociek“ pre žiakov základnej školy

Stavby z kociek sú učivom 1. stupňa ZŠ podľa inovovaného ŠVP (2014) na nasledovnej úrovni: „Žiak na konci 4. ročníka základnej školy dokáže vytvoriť z kociek rôzne stavby podľa plánu, vie vytvoriť a slovné opísať vlastnú stavbu z kociek a nakresliť plán stavby z kociek.“

V nadväznosti na 1. stupeň ZŠ pri opakovaní a prehľbovaní učiva o stavbách z kociek v 5. ročníku považujeme za vhodné využitie bádateľského prístupu pri tvorbe plánu telesa z kociek. Pozorovaním stavieb a telies z kociek, ako aj kreslením náčrtov postavených stavieb z rôznych pohľadov predpokladáme, že žiaci objavia najvhodnejší zápis telesa z kociek pomocou úplného plánu.

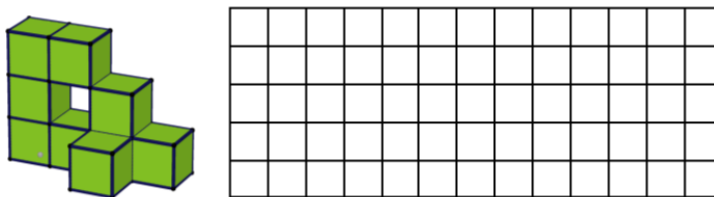
Uvidíme k danej problematike ukážky úloh, pričom učiteľ formuluje problém, v ktorom žiaci majú zistiť rozdiel medzi stavbou a telesom z kociek a následne nakresliť plán telesa z kociek. Riadené bádanie spočíva v tom, že žiaci navrhnu postup na nakreslenie plánu telesa z kociek. Využijú kreslenie telies z rôznych pohľadov s očakávaním výsledkom, t. j. žiaci navrhnu tvorbu plánu kockového telesa.

Úloha 1. Nakreslite do pripravenej štvorcovej siete všetky pohľady na stavbu z kociek (Obr. 1).



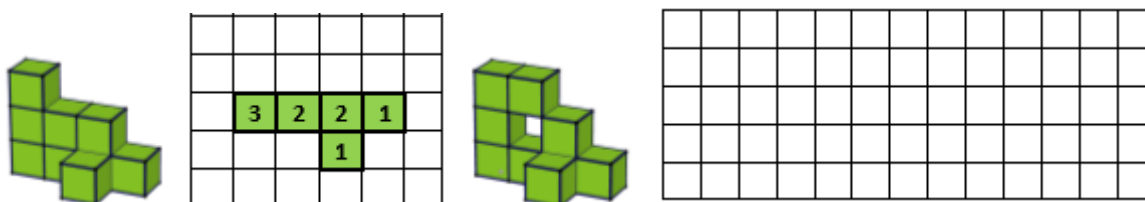
Obr. 1: Plán stavby z kociek

Úloha 2. Postavte stavbu podľa Obr.2 (žiadna kocka vzadu nechýba ani nevyčnieva). Ak máte problém, poraďte sa so spolužiakmi. Môžete použiť pripravené pomôcky. Koľko kociek tvorí túto stavbu? Nakreslite plán stavby na obrázku.



Obr. 2: Stavba z kociek k Úlohe 2.

Úloha 3. Porovnajzte plán stavby z kociek (Obr. 3) s plánom, ktorý ste vytvorili v úlohe 2. Navrhnite do pripravenej štvorcovej siete plán, ktorý odlíši tieto dve stavby.



Obr. 3: Stavby z kociek a ich plány

Postrehy a reflexia učiteľov matematiky ZŠ k navrhnutým úlohám

Nami navrhnuté úlohy, ktoré boli spracované a použité vo forme inovatívnej metodiky, riešilo 46 učiteľov so svojimi žiakmi a to na rôznych základných školách na Slovensku. V dotazníku projektu IT Akadémie uviedli svoje skúsenosti a postrehy. Vyberáme niektoré z nich:

- „ ... v prvej úlohe mali viacerí žiaci problém s pohľadom zdola ... “,
- „ ... žiaci skúmali rozdiel medzi stavbou a telesom a potrebovali dlhšie diskutovať o probléme, ako zapísať do plánu chýbajúcu kocku. Nakoniec bolo nutné spoločne prediskutovať rozdiel medzi stavbou z kociek a kockovým telesom a zhrnúť, čo sme sa naučili. ... “,
- „ ... pri úlohe číslo 3 žiaci premýšľali nad zakódovaním telesa z kociek – po tom, ako zistili, že to musí byť iné ako pri stavbe mali nápad, aby každé poschodie dostalo číslo 0 alebo 1 podľa toho, či sa na danom poschodí kocka nachádza, alebo nie. Riešenie to bolo síce správne, ale ukázali sme si, že by to bolo príliš komplikované pri 10 a viacposchodových úlohách. ... “,
- „ ... mnohí žiaci nerozlišovali pojmy plán a pohľad ... “,
- „ ... my sme sa trochu zdržali, nakoľko žiakov táto metodika veľmi bavila. ... “,

- „ ... dominantne som využívala riadené bádanie. Pri skupinovej práci boli žiaci otvorenejší, skôr povedali svoj názor, keďže mali možnosť sa poradiť. “,
- „ ... bádateľský prístup bol asi najviac rozvíjaný v úlohe č. 3 – tu žiaci navrhovali viac riešení, pri diskusii si uvedomovali, prečo dané riešenie nie je možné použiť vždy, príp. vôbec. ... “.

Aktivita „Rezy telies“ pre žiakov strednej školy

Žiaci menej obľubujú riešenie stereometrických úloh, pretože majú väčšinou problém s priestorovou predstavivosťou. Priestorovú predstavivosť možno rozvíjať cielenou výučbou, kam patrí aj riešenie úloh na zostrojovanie rezov telies danou rovinou (Šedivý a kol., 2007). Pri takýchto úlohách je nutné nechať žiakov vykonať aspoň niekoľko krokov samostatne a korigovať prípadné chyby v algoritmickom postupe, či v rýsovaní.

Žiaduce je, ak sa dané riešenie úlohy vhodne vizualizuje, čím sa aspoň čiastočne eliminuje nedostatok priestorovej predstavivosti žiakov.

Odporúčame dynamický program GeoGebra 3D modul, ktorý umožňuje učiteľovi jednoducho, a pritom názorne zostrojiť rezy telies rovinou. Program taktiež ponúka možnosť rotovať zobrazené telesá a vidieť rez z rôznych pohľadov (Vallo, Rumanová, Ďuriš, 2015).

Predstavíme návrh, ako môže učiteľ využiť riadené bádanie na skúmanie vzťahov medzi rôznymi lineárnymi útvarmi v priestore a následne ho aplikovať pri zostrojovaní rezu hranatých telies rovinou.

Žiaci často pristupujú k riešeniu tohto typu úloh algoritmicky. Význam zostrojovania rezov telies rovinou sa žiakom priblíži prostredníctvom úloh, ktoré budú realizovať samotní žiaci, čím získajú na vlastné otázky a nejasnosti aj odpovede.

Najskôr učiteľ so žiakmi analyzuje možnosti riešenia konkrétnych úloh a následne aplikuje uvedené modelové postupy v riešení ďalších problémových úloh. Učiteľ môže poskytnúť každému žiakovi uvedené úlohy vo forme pracovného listu, ktorý si vopred pripraví. Žiak môže riešiť úlohy samostatne alebo spoločne so spolužiakmi, pričom je pracovný postup žiakom simultánne prezentovaný.

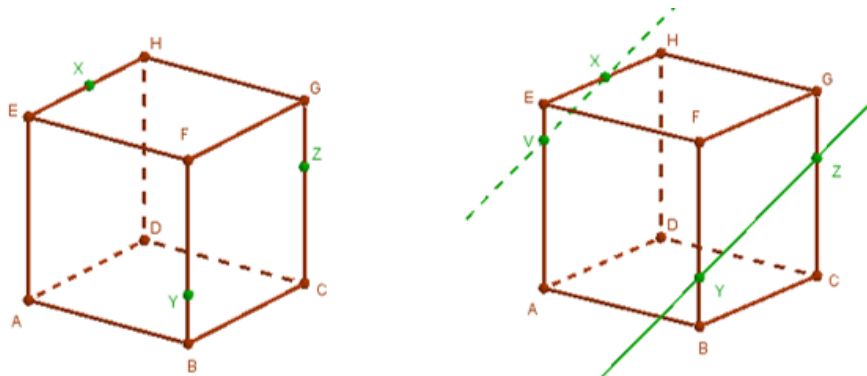
Po prečítaní zadania každej úlohy nechá učiteľ žiakom priestor, aby si samostatne premysleli jej riešenie. Ďalej vedie diskusiu k daným otázkam v rámci jednotlivých úloh. Žiaci si vytvárajú na papieri potrebné náčrty telies aj s riešením. Práca s uvedeným pracovným listom, vrátane spoločnej diskusie, by mala trvať cca. 10 min. Na záver riadeného bádania učiteľ spolu so žiakmi zhrnie objavené zistenia a terminologicky upresní, čo je rez hranatého telesa rovinou.

Pripravili sme pre učiteľov taktiež interaktívne konštrukcie v programe GeoGebra 3D modul. Výhodou je, že učiteľ môže pracovať s programom a žiaci si na papieri črtajú dané riešenia. Učiteľ prečíta žiakom zadanie každej úlohy. Predstaví model telesa v programe GeoGebra, naznačí riešenie úlohy a spoločne so žiakmi o riešení úlohy diskutujú.

K jednotlivým stratégiám riešenia sme zaviedli aj ich výstižnejšie pomenovanie (princíp 1 až princíp 4), ktoré je neodborné, avšak je pre žiakov blízke a súvisí s konkrétnym princípom najčastejšie používaným pri zostrojovaní rezu telesa rovinou v školskej praxi. Náprava správneho vyjadrovania u žiakov závisí od učiteľa a odborného jazyka, ktorý používa sám učiteľ. V úvodných úlohách je cieľom sprostredkovať učivo, preto odporúčame sa viac

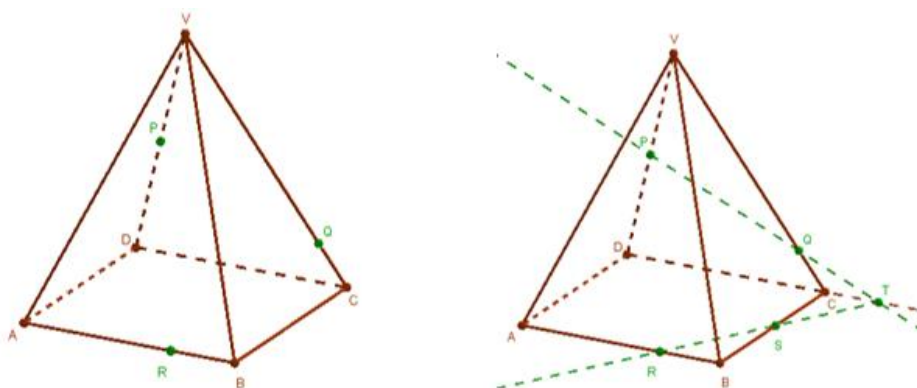
sústrediť na riešenie daných úloh, než sklznúť k formalizmu. Nami uvádzané aktivity sú súčasťou publikácie Lukáč a kol. (2020).

Úloha 1. Daná je kocka $ABCDEFGH$ a rovina XYZ (konštrukcia v programe GeoGebra s označením princíp 1 a 2). Využijeme v danom riešení princíp 1 „spájanie bodov“ a princíp 2 „rovnobežnosť“ (teleso je uvedené na obr. 4).



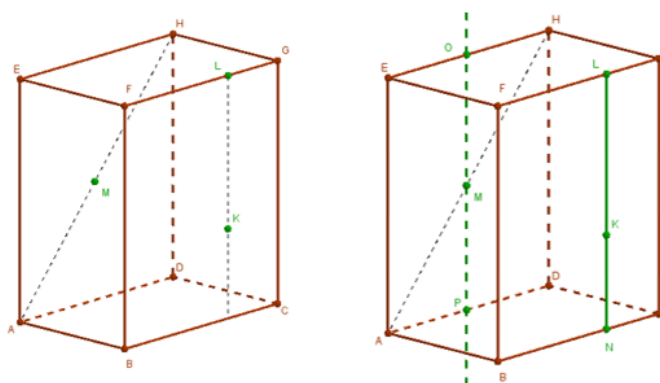
Obr. 4: Využitie princípu 1 a princípu 2 v kocke

Úloha 2. Daný je ihlan $ABCDV$ a rovina PQR (konštrukcia v programe GeoGebra s označením princíp 3). Využijeme v danom riešení princíp 3 „predlžovanie hrán“ (teleso je uvedené na obr. 5).



Obr. 5: Využitie princípu 3 v pravidelnom štvorbokom ihlane

Úloha 3. Daný je kváder $ABCDEFGH$ a rovina KLM (konštrukcia v programe GeoGebra s označením princíp 4). Využijeme v danom riešení princíp 4 „spájanie bodov v nekonečne“ (teleso je uvedené na obr. 6).



Obr. 6: Využitie princípu 4 v kvádri

Postrehy a reflexia učiteľov matematiky ZŠ k navrhnutým úlohám

Vo vyučovacom procese využilo uvedené úlohy 11 učiteľov matematiky z rôznych stredných škôl na Slovensku, ktorí v dotazníku projektu IT Akadémie k daným úlohám uviedli:

- „ ... táto metodika veľmi dobre objasňuje stereometrické vzťahy a vzájomnú polohu útvarov. Obsahuje pracovný list, dynamické konštrukcie pre bádateľskú aktivitu. Priložené súbory v GeoGebre žiakom veľmi pomáhajú lepšie a názornejšie pochopiť danú problematiku. Tento prístup sa ukázal ako pomerne efektívny, takže žiaci nemali problém riešiť aj problémovú úlohu ... “,
- „ ... metodiku by som odporúčala prepojiť so životom, uviesť nejaký konkrétny praktický príklad vo forme animácie či videa – zadanie a následne prehrať riešenie ... “,
- „ ... metodiku som realizovala ako opakovanie rezov telies v 4. ročníku pre tých, ktorí pôjdu maturovať. Možno aj preto sa mi podarilo metodiku zrealizovať za jednu hodinu. Inak by to asi bol problém pre žiakov v klasickej triede ... “,
- „ ... po pripomenutí viet potrebných pri rezoch telies im to celok išlo. Bolo potrebné zdôrazniť, že v ihlane a trojbokom hranole nemôžu využiť rovnobežnosť, tam musia predlžovať hrany. Úplne nové pre nich bolo kockové teleso, ale celkom dobre si s tým poradili, po mojej rade, že môžu priamku KL predĺžiť a premyslieť, kde to bude rezať tú kocku položenú na vrchu. Potrebovali si uvedomiť, že tie zadné steny kociek sú v jednej rovine. U viacerých sa opakoval problém, že si neuvedomili, že rez musia dorobiť na vrchnej podstave kocky vľavo dole a na bočnej stene kocky vpravo hore ... “,
- „ ... pomocné materiály sú vhodne pripravené, žiakov zaujali (aj učiteľa). Z mojej strany kladne hodnotím pripravené telesá na pracovných listoch aj s bodmi rezu, žiaci sa nezdržiavajú rysovaním, roviny rezov majú rovnaké tvary – ľahká kontrola pre učiteľa ... “,
- „ ... metodika je výborne spracovaná, pre priemerné triedy je nutné niektoré úlohy vynechať alebo zjednodušiť, aby sa zvládla na jednej vyučovacej hodine“

Záver

Realizácia bádateľsky orientovaného vyučovania v praxi je časovo veľmi náročná. Okrem konkrétnej prípravy učiteľa na vyučovanie si vyžaduje výbornú znalosť teoretických východísk. Pri uplatnení bádateľsky orientovaného vyučovania je potrebné oboznámiť sa so zásadami realizácie jednotlivých úrovní bádania a zároveň vedieť analyzovať bádateľské vzdelávacie aktivity.

Rovnako dôležité je nadobúdanie skúseností z jeho uvedenia do školskej praxe (Kireš a kol., 2016). S bádateľsky orientovaným vyučovaním a riadeným bádáním sa úzko spája aj častejšie uplatňovanie formatívneho hodnotenia práce žiakov učiteľom, ako aj sebahodnotenia žiaka. Napriek náročnosti bádateľsky orientovaného vyučovania na pracovnú záťaž učiteľa, z dôvodov a skúseností, ktoré sne uviedli v článku, považujeme takto realizované vyučovanie v súčasných školských podmienkach za veľmi významný prínos do praxe.

PodĎakovanie

Článok vznikol v rámci projektu KEGA 019UKF-4/2020 s názvom „Podnetné didaktické postupy vo vyučovaní zobrazovacích metód v sekundárnom matematickom vzdelávaní s ohľadom na požiadavky spoločnosti a praxe“.

Literatúra

Banchi, H., Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. In Science and children. 46, 2, 26-29.

Kireš, M., Ješková, Z., Ganajová, M., Kimáková, K. (2016). Bádateľské aktivity v prírodovednom vzdelávaní. Bratislava: Štátny pedagogický ústav. 128 s.

Lukáč, S. a kol. (2020). Zbierka inovatívnych metodík z matematiky pre stredné školy. 1. vydanie. Bratislava: CVTI SR. 510 s.

Slepáková, I., Kimáková, K. (2015). Hodnotenie zručností v bádateľsky orientovanej výučbe biológie. In Scientia in educatione. 6, 1, 133 – 143.

Šedivý, O., Pavlovičová, G., Rumanová, L., Vallo, D. (2007). Stereometria: umenie vidieť a predstavovať si priestor. Nitra: FPV UKF. 106 s.

ŠPÚ. (2014). Inovovaný ŠVP pre 1. stupeň základnej školy – Matematika práca s informáciami. Dostupné na https://www.statpedu.sk/files/articles/dokumenty/inovovany-statny-vzdelavaci-program/matematika_pv_2014.pdf

Vallo, D., Rumanová, L., Ďuriš, V. (2015). Spatial Imagination Development through Planar Section of Cube Buildings in Educational Process. In Procedia-Social and Behavioral Sciences. 191, 2146 – 2151.

Vizualizácia funkcií užitočnosti Visualization of Utility Functions

Janka Drábeková^a

^a*Institute of Statistics, Operation Research and Mathematics, Faculty of Economics and Management, Slovak University of Agriculture in Nitra, Tr. A. Hlinku 2, Nitra, Slovakia*

Received November 2, 2021; received in revised form November 9, 2021; accepted November 10, 2021

Abstract

The graph of a function belongs to the basic objects of visualization not only in mathematical analysis but also in economics, because the "language" of graphs is one of the ways of presenting economic ideas. In this paper, we focused on the creation of interactive materials usable in teaching the theory of rational behavior of elementary economic entities, consumers. We assume that the created interactive constructions can contribute to the easy acquisition of concepts from the theory of the consumer. We used GeoGebra software to create visual representations of consumer preferences. We analyze the different consumer's indifference curves, perfect substitutes, Cobb-Douglas utility function, constant elasticity of substitution (CES) preferences and marginal rate of consumer substitution.

Keywords: visualization, utility functions, GeoGebra, graphs, microeconomics.

Classification: 97C80, 97U70

Úvod

Každý z nás už počul frázu „A Picture is Worth a Thousand Words“. Podľa Fuliera (2018) o sile pôsobenia vizuálnych obrazov svedčí skutočnosť, že aj celkom jednoduché až triviálne obrazy môžu vyjadrovať hlboké a komplexné myšlienky. Myslenie založené na obrazových vnemoch, predstavách, pomáha v matematickom vzdelávaní budovať u žiakov abstraktný pojmový aparát a riešiť nielen manipulatívne matematické úlohy.

Schopnosť tvorenia, interpretácie, používania a reflexie obrazov, predstáv, schém v našich myšliach, na papieri alebo s použitím technologických nástrojov, s cieľom opisovať a komunikovať informácie, myslieť a rozvíjať doposiaľ neznáme myšlienky a nasledujúce pochopenia vymedzuje podľa Arcavi (2003) pojem *vizualizácia*.

Tall & Vinner (1981) hovoria o vizualizácii ako o dôležitej súčasti tzv. „pojmových obrazov“. Podľa Yilmaz, Argun (2018) je vizualizácia silným nástrojom na vyhľadávanie matematických problémov, ktorý dáva význam matematickým konceptom a vzťahom medzi nimi. Avšak treba si uvedomiť, že vo vzdelávaní musí mať nezastupiteľné miesto využívanie nielen názorného, ale aj abstraktnému prístupu. Názorný prístup pomôže k zefektívneniu vyučovacieho procesu, ale schopnosť aplikovať vedomosti na nový kontext alebo situáciu predpokladá používanie vizuálnych aj algoritmických techník.

Matematické vzťahy, grafy a diagramy sú základom pre získanie matematických vedomostí a výpočtových zručností (Országhová & Žiaková, 2021). Vizuálna reprezentácia má pre jedinca

*Corresponding author: janka.drabekova@uniag.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.2.8-16

hodnotu tisíc slov, iba vtedy, ak ju dokáže flexibilne použiť (Rösken & Rolka, 2006). Z aspektu vzdelávania umožňuje prepojenie vizuálnej reprezentácie s dôležitými kvantitatívnymi a kvalitatívnymi stránkami skúmaného javu ľahšie a častokrát aj trvácnejšie uloženie kľúčových informácií do dlhodobej pamäti vzdelávaných subjektov (Fulier, 2018).

Vizualizácia v ekonómii

Graf funkcie patrí k základným objektom vizualizácie nielen v matematickej analýze, ale aj v ekonómii, pretože „jazyk“ grafov je jedným zo spôsobov prezentácie ekonomických myšlienok. V ekonómii sa grafy využívajú k názornej ilustrácii ekonomických princípov a trendov, ktoré sa pokúša vysvetliť.

V tomto príspevku sme sa zamerali na tvorbu interaktívnych materiálov využiteľných pri výučbe teórie racionálneho správania elementárnych ekonomických subjektov, spotrebiteľov. Za racionálneho spotrebiteľa sa v mikroekonómii považuje taký ekonomický subjekt, ktorý si na trhu vyberá „najvýhodnejšie“ spotrebné stratégie spomedzi všetkých pre neho dostupných. Dostupnosť je ovplyvnená jeho príjmom a trhovými cenami statkov. Nie je nutné porovnávať všetky kombinácie statkov, ktoré si spotrebiteľ môže kúpiť, pretože pomocou grafu funkcie užitočnosti môžeme jednoduchým spôsobom znázorniť jeho preferencie medzi týmito kombináciami. Funkcia užitočnosti vyjadruje preferencie spotrebiteľa pri jeho rozhodovaní. Priraduje určitú hodnotu každému prípustnému spotrebnému košu tak, aby preferovanejším spotrebným košom bola priradená vyššia hodnota než menej preferovaným spotrebným košom (Varian, 2014).

Grafickou ilustráciou preferencií spotrebiteľov sú indiferenčné krivky. Indiferenčná krivka graficky zobrazuje všetky kombinácie tovarov, ktoré poskytujú spotrebiteľovi rovnakú úroveň užitku. Priebeh indiferenčnej krivky v danom bode, v absolútnom vyjadrení, predstavuje hraničnú mieru spotrebiteľskej substitúcie (MRS – marginal rate of consumer substitution). Hodnota MRS nám určí, koľko jednotiek druhého statku je daný spotrebiteľ ochotný vymeniť za získanie dodatočnej jednotky prvého statku pri nezmenenej úrovni užitku. Z matematického hľadiska teda pracujeme pri tomto pojme s hodnotou prvej derivácie funkcie užitočnosti v konkrétnom bode. Ak hľadáme optimálnu stratégiu spotrebiteľa, hľadáme bod dotyku rozpočtovej priamky spotrebiteľa a funkcie užitočnosti, t.j. študenti musia poznať geometrický význam derivácie funkcie, aby im bol jasný tento koncept.

Funkcia užitočnosti pre dokonalé substitúty

Ak je spotrebiteľ ochotný zameniť jeden statok za druhý v konštantnom pomere, nazývame tieto statky dokonalé substitúty.

Spotrebiteľ má rovnaký úžitok pri spotrebných košoch s rovnakým celkovým počtom oboch statkov v prípade spotrebovávania statkov v pomere 1:1. Ak je nútený z rôznych dôvodov znížiť spotrebu prvého statku, vôbec mu to nevadí, lebo zvýši spotrebu druhého statku a jeho úroveň užitočnosti zostane rovnaká.

Grafickou ilustráciou takýchto preferencií spotrebiteľa sú priamky so smernicou $k = -1$ (obr.1). Ak spotrebiteľ zníži spotrebu prvého statku o jednu jednotku, musí zvýšiť spotrebu druhého statku o jednu jednotku, aby sa dostal na rovnakú indiferenčnú krivku a zachoval si rovnakú úroveň užitku.

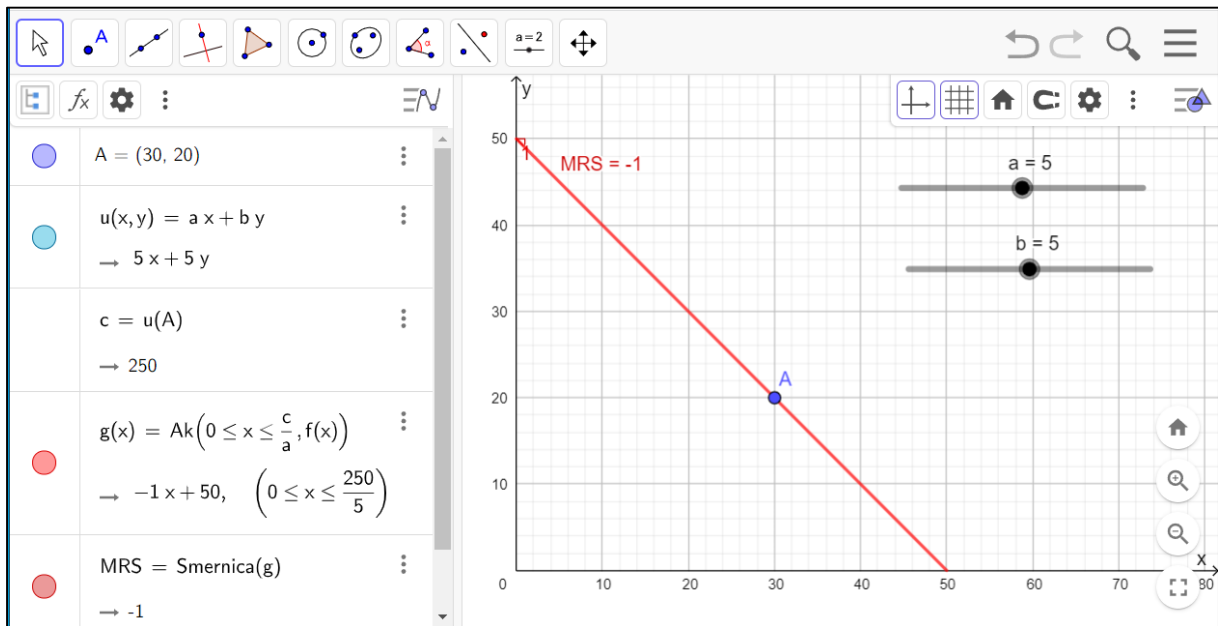
Pri zápise funkcie užitočnosti treba myslieť na skutočnosť, že nie všetky substitúty sa spotrebovávajú v pomere 1: 1. Funkcia užitočnosti má v prípade dokonalých substitútov tvar:

$$u(x, y) = ax + by$$

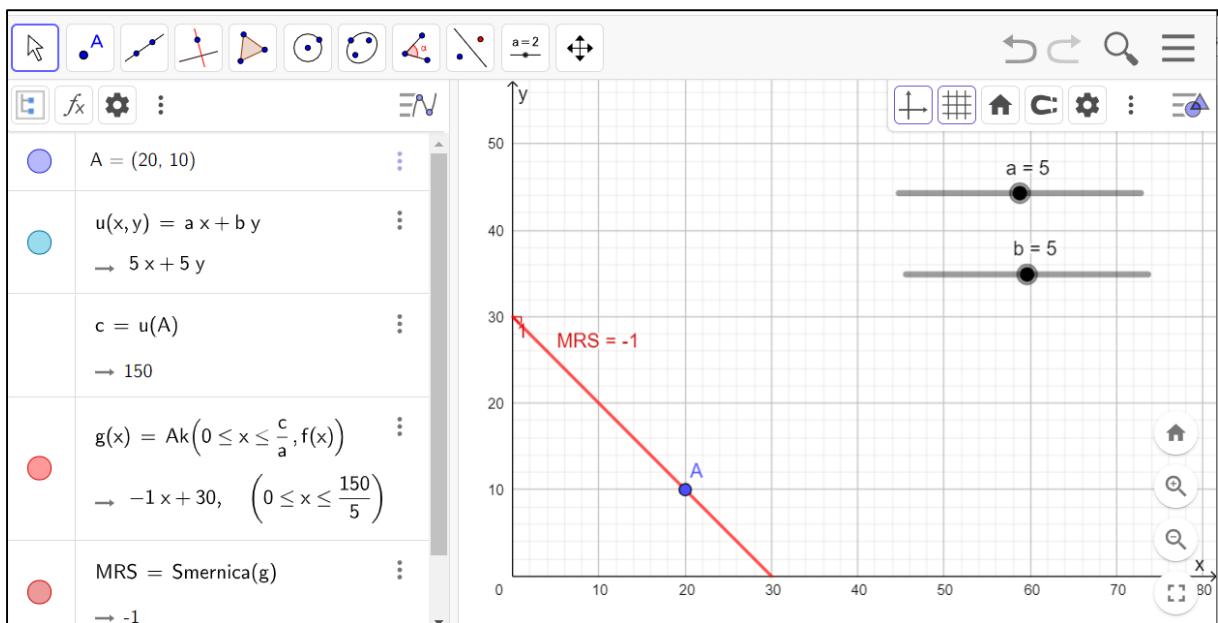
Dynamická konštrukcia (obr.1, obr.2) vytvorená pomocou softvéru GeoGebra ilustruje rôznu úroveň užitočnosti $c = u(A)$ pri rôznych spotrebných košoch $A[x, y]$ a nezmenenej hodnote MRS, ak $a : b = 1 : 1$.

Spotrebný kôš s vyšším počtom oboch statkov $A[30,20]$ je preferovaný pred spotrebným košom s nižším celkovým počtom oboch statkov $A[20,10]$, lebo pre spotrebiteľa prináša vyššiu hodnotu úžitku:

$$A[30,20] > A[20,10] \Leftrightarrow u(30,20) > u(20,10)$$



Obr. 1: Funkcia užitočnosti dokonalých substitútov spotrebovávaných v pomere 1:1

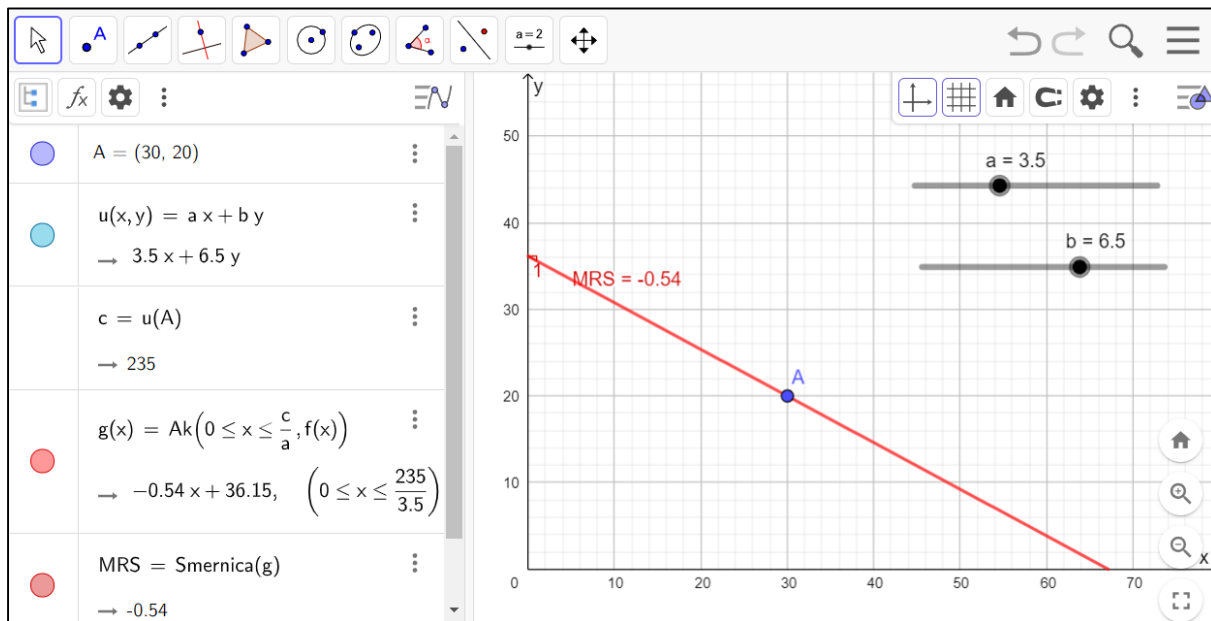


Obr. 2: Zmena hodnoty funkcie užitočnosti dokonalých substitútov vzhľadom na zmenu spotrebného koša

Na obr.3 je prezentované ako zmena pomeru $a:b$ na hodnotu $3,5:6,5 = 7:13$ ovplyvní hodnotu smernice funkcie užitočnosti a aj veľkosť úžitku spotrebiteľa pri spotrebnom koši $A[30,20]$ rovnakom ako v prvom prípade (znázornenom na obr.1).

V tomto prípade (obr.3) spotrebiteľ preferuje viac druhý statok, lebo je ochotný iba 0,53 jednotiek druhého statku y vymeniť za dodatočnú jednotku prvého statku x .

Hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie má nižšiu hodnotu a aj hodnota funkcie užitočnosti je nižšia.



Obr. 3: Zmena hodnoty funkcie užitočnosti dokonalých substitútov vzhľadom na zmenu MRS

Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti

Preferencie spotrebiteľa vyjadrené pomocou Cobb-Douglasovej funkcie užitočnosti sú štandardným príkladom „well-behaved“ indifferenčných kriviek (Varian, 2014). Cobb-Douglasovú funkciu užitočnosti považovanú za vhodný nástroj prezentácie matematických interpretácií rôznych ekonomických myšlienok môžeme algebrický zapísať v tvare:

$$u(x, y) = x^a \cdot y^b$$

kde koeficienty a, b zachytávajú preferencie spotrebiteľa. Pre tvorbu dynamickej konštrukcie vyjadríme funkčnú závislosť spotreby statku y od spotreby statku x pri užitočnosti $c = u(A)$:

$$f: y = \left(\frac{c}{x^a}\right)^{\frac{1}{b}}$$

Využijeme príkaz „Ak(podmienka; funkcia)“ na znázornenie grafu funkcie v prvom kvadrante a znázorníme dotyčnicu v spotrebnej stratégii $A[15,10]$.

Dynamická konštrukcia (obr.4, obr.5) vytvorená pomocou softvéru GeoGebra ilustruje rôznu úroveň užitočnosti $c = u(A)$ pri rovnakom spotrebnom koši spotrebiteľa, ale pri rôznych preferenciách t.j. rôznych hodnotách koeficientov a, b .

Zmenou hodnôt koeficientov môžeme sledovať meniace sa preferencie spotrebiteľa a meniace sa hodnoty MRS. Ak $b > a$, spotrebiteľ preferuje viac statok y (obr.4) a $MRS < 1$. Ak je $a > b$, spotrebiteľ preferuje statok x a $MRS > 1$ (obr.5).

Smernicu dotyčnice v absolútnom vyjadrení interpretujeme ako hraničnú mieru spotrebiteľskej substitúcie a jej hodnotu môžeme sledovať nielen v okne nákresne, ale aj v algebraickom zápise rovnice dotyčnice. Výpočtom alebo pomocou príkazov softvéru GeoGebra môžeme overiť, že $MRS = |k_t|$, pretože platí:

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot \frac{c^{\frac{1}{b}}}{x^{\frac{a}{b}+1}} = k_t$$

Ak do prvej derivácie funkcie f dosadíme $u(A) = c = x^a \cdot y^b$, po úpravách dostaneme vzťah:

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot \frac{y}{x}$$

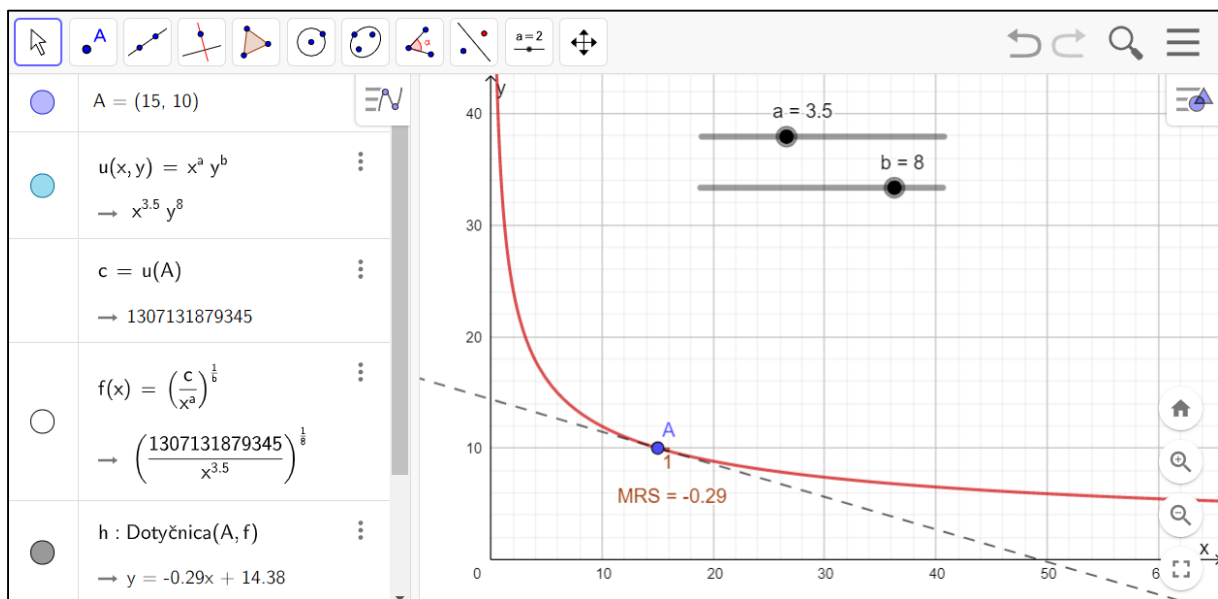
Zároveň vieme, že platí:

$$MRS = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{ax^{a-1}y^b}{bx^ay^{b-1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}$$

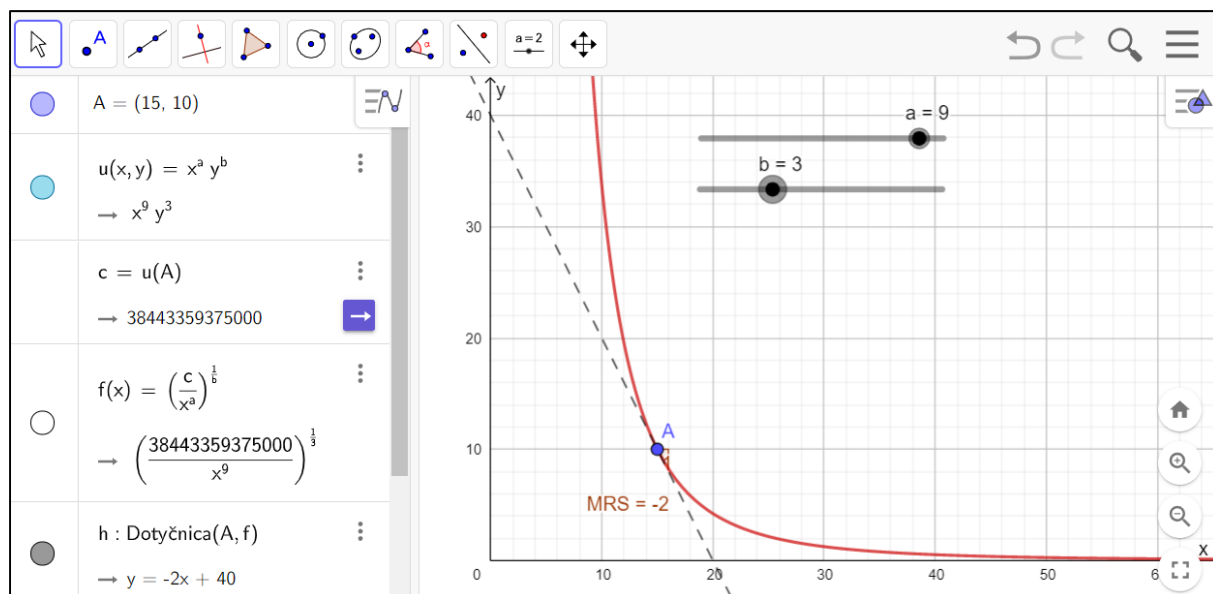
Napríklad pre prípad znázornený na obr.4 potom platí:

$$MRS = \frac{3,5}{8} \cdot \frac{10}{15} = \frac{7}{13} = |k_t| = 0,291\bar{6}$$

Pomocou vytvorenej dynamickej konštrukcie môžu študenti sledovať ako vplýva zmena spotrebnej stratégie na hodnotu užitočnosti, koeficienty rovnice dotyčnice či hodnotu hraničnej miery spotrebiteľskej substitúcie.



Obr. 4: Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti pri spotrebnej stratégii A



Obr. 5: Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti pri spotrebnej stratégii A a zmenených koeficientoch a, b

CES funkcia užitočnosti

V tejto časti sa budeme zaoberať funkciou užitočnosti, ktorá sa vyznačuje konštantnou elasticitou substitúcie (Constant Elasticity of Substitution) medzi statkami.

Funkcia užitočnosti CES sa používa na modelovanie bežných problémov spojených s výberom spotrebiteľov, pretože „pokrýva“ široké spektrum nahraditeľnosti medzi x a y (Thöni, 2015). Ak je elasticita substitúcie medzi 2 statkami konštantná, môžeme funkciu užitočnosti zapísať v algebraickom tvare:

$$u(x, y) = (ax^r + by^r)^{\frac{1}{r}}$$

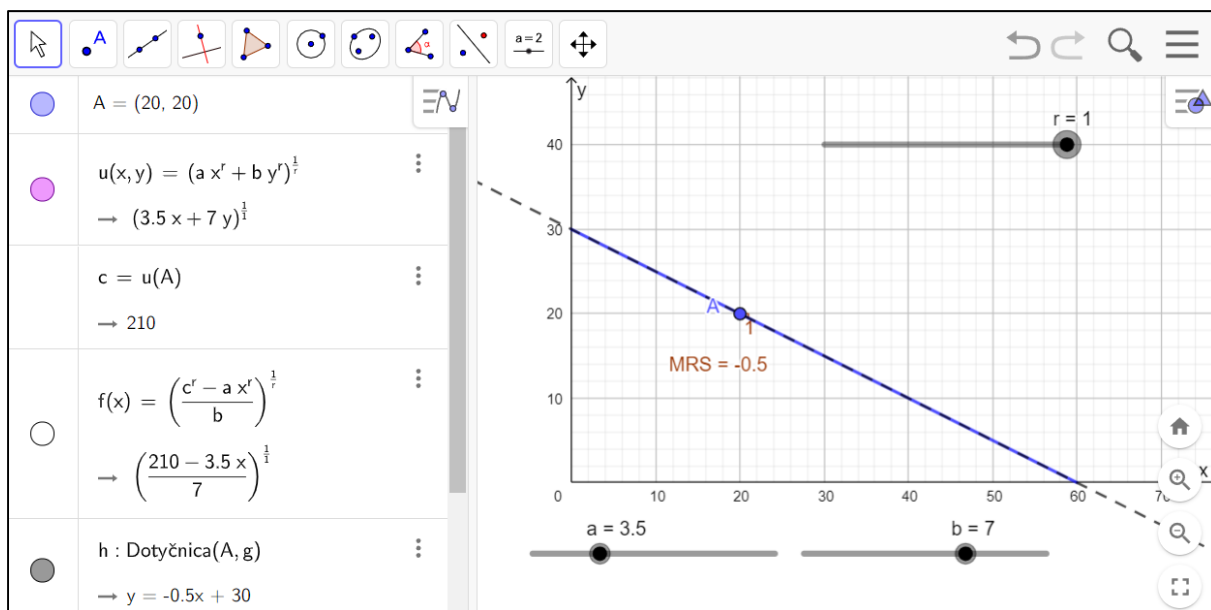
Pre tvorbu dynamickej konštrukcie vyjadríme funkčnú závislosť spotreby statku y od spotreby statku x pri užitočnosti $c = u(A)$:

$$f: y = \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b} x^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

Daný vzťah platí pre $r \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \wedge a \geq 0 \wedge b \geq 0$.

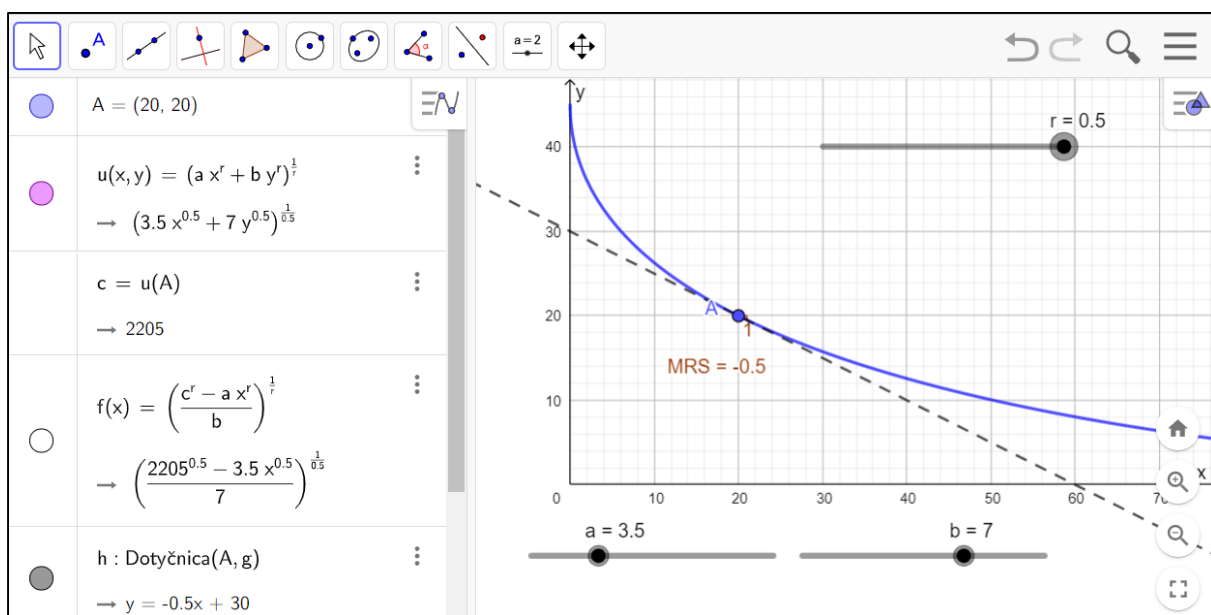
Na znázornenie grafu funkcie v prvom kvadrante opätovne využijeme príkaz „Ak(podmienka; funkcia)“ a znázorníme tiež dotyčnicu v spotrebnej stratégii $A[20,20]$. Dynamická konštrukcia (obr.6, obr.7, obr.8) vytvorená pomocou softvéru GeoGebra ilustruje rôznu úroveň užitočnosti $c = u(A)$ pri rovnakom spotrebnom koši spotrebiteľa, ale pri rôznych hodnotách parametra r .

Pomocou CES funkcie užitočnosti môžeme sledovať rôzne alternatívne stupne nahraditeľnosti x za y . Táto funkcia umožňuje plný rozsah nahraditeľnosti medzi dvoma statkami (Thöni, 2015). Na obr.6 môžeme pozorovať pre hodnotu parametra $r = 1$, že z CES funkcie užitočnosti dostaneme funkciu užitočnosti, ktorá modeluje prípad dokonalých substitútov.

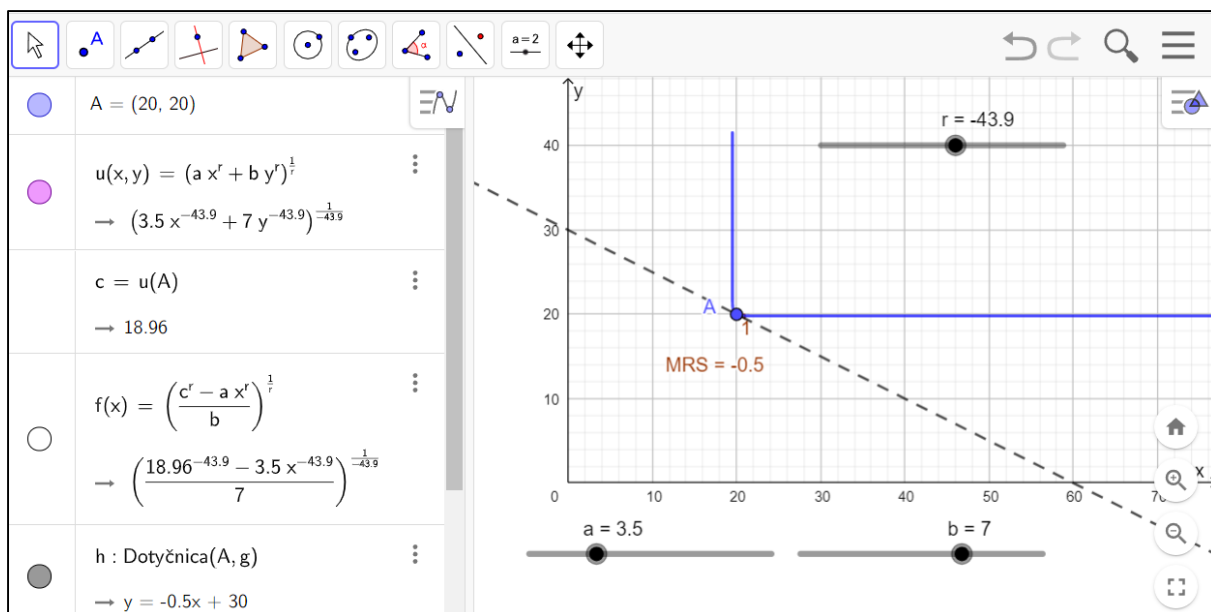


Obr. 6: Funkcia užitočnosti pre dokonalé substitúty ako špeciálny prípad CES funkcie

Ak $r \rightarrow 0$, tak CES funkcia konverguje ku Cobb-Douglasovej funkcii užitočnosti (obr.7). A v prípade, že $r \rightarrow -\infty$ funkcia aproximuje nulovú možnosť substitúcie, t.j. prípad dokonalých komplementov (obr.8) spotrebúvaných iba v konkrétnom pomere.



Obr. 7: Cobb-Douglasová funkcia užitočnosti ako špeciálny prípad CES funkcie



Obr. 8: Funkcia užitočnosti pre dokonalé komplementy ako špeciálny prípad CES funkcie

Hraničnú mieru spotrebiteľskej substitúcie a jej hodnotu môžeme sledovať v okne nákresne, ako aj v algebraickom zápise rovnice dotyčnice.

Výpočtom môžeme overiť, že hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie sa rovná absolútnej hodnote smernice dotyčnice v dotykovom bode $MRS = |k_t|$. Vyjadríme prvú deriváciu funkcie f :

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot x^{r-1} \cdot \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b} x^r \right)^{\frac{1}{r}-1}$$

Ak do prvej derivácie funkcie f dosadíme $u(A) = c = (ax^r + by^r)^{\frac{1}{r}}$, po úpravách dostaneme vzťah:

$$\frac{dy}{dx}(A) = \frac{-a}{b} \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^{r-1}$$

Zároveň vieme, že hraničná miera spotrebiteľskej substitúcie je podiel hraničných užitočností:

$$MRS = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{r \cdot a \cdot x^{r-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b} x^r \right)^{\frac{1}{r}-1}}{r \cdot b \cdot y^{r-1} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{c^r}{b} - \frac{a}{b} x^r \right)^{\frac{1}{r}-1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x^{r-1}}{y^{r-1}}$$

V našom prípade spotrebiteľskej stratégie v bode $A[20,20]$ nadobúda vo všetkých troch prípadoch (obr.6, obr.7, obr.8) MRS rovnakú hodnotu, pretože platí:

$$MRS = \frac{3,5}{7} \cdot \left(\frac{20}{20} \right)^{r-1} = \frac{1}{2} \cdot 1^{r-1} = \frac{1}{2} = |k_t|$$

Pomocou vytvorenej dynamickej konštrukcie môžu študenti sledovať vplyv zmeny spotrebiteľskej stratégie, vplyv zmeny hodnôt koeficientov a, b a parametra r na hodnotu užitočnosti a graf funkcie užitočnosti CES.

Záver

V príspevku sme prezentovali spätosť matematických a ekonomických konceptov uplatňovaných v teórii spotrebiteľa. Pri tvorbe obrazovo-názorných reprezentácií sme využívali softvér GeoGebra.

Úlohou vytvorených interaktívnych konštrukcií je prispieť k prirodzenému osvojeniu nových pojmov a zákonitostí o funkciách užitočnosti v celistvosti a v úplnosti. Vytvorené materiály majú uplatnenie vo vyučovacom procese študentov Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre, prípadne aj iných univerzít, v rôznych predmetoch mikroekonomického zamerania. Zároveň vidíme potenciál využitia aj pri štúdiu matematiky v rámci aplikácií geometrického významu derivácie funkcie.

Vytvorené interaktívne študijné materiály sú študentom sprístupnené vo výučbovom prostredí LMS Moodle.

Literatúra

Arcavi, A. 2003. The role of visual representations in the learning of mathematics. In *Educational Studies in Mathematics* [online], 52, 215–241, ISSN 1573-0816 [cit. 2021-10-29]. Available at: <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>

Fulier, J. 2018. Niekoľko poznámok o aspektoch vizualizácie v matematickom vzdelávaní. In *Acta Mathematica Nitriensia* [online], 4(1), 24-38, ISSN 2453-6083 [cit. 2021-10-08]. Dostupné na: http://www.amn.fpv.ukf.sk/papers/amn_4_1/5_Fulier_AMN_Vol_4_No_1_2018.pdf

Országhová, D. & Žiaková, D. 2021. Outcomes of distance education in Mathematics at secondary technical school: a case study. In *Mathematics in Education, Research and Applications* (MERAA) [online], 7(1), 25-32, ISSN 2453-6881 [cit. 2021-10-28]. Available at: <https://doi.org/10.15414/meraa.2021.07.01.25-32>

Rösken, B. & Rolka, K. 2006. A picture is worth a 1000 words - the role of visualization in mathematics learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* [online], Vol. 4, 441-448. Prague, Czech Republic: PME. Available at: <https://www.emis.de/proceedings/PME30/4/457.pdf>

Tall, D. & Vinner, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In *Educational Studies in Mathematics* [online], 12(2), 151-169, ISSN 1573-0816 [cit. 2021-09-25]. Available at: <https://doi.org/10.1007/BF00305619>

Thöni, Ch. 2015. A Note on CES Functions. In *Journal of Behavioral and Experimental Economics* [online], 59, 85-87, ISSN 2214-8043 [cit. 2021-10-14]. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.socec.2015.10.001>

Varian, H.R. 2014. *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. Ninth Edition. New York: W.W. Norton & Company, 2014. 825pp. ISBN 978-0-393-12396-8

Yilmaz, R. & Argun, Z. 2018. Role of visualization in mathematical abstraction: The case of congruence concept. In *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology* (IJEMST) [online], 6(1), 41-57, ISSN 2147-611X [cit. 2021-09-25]. Available at: <https://doi.org/10.18404/ijemst.328337>

Analyza riešení úloh na priestorovú predstavivosť študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky

Analysis of Solutions of Task Related to Spatial Ability of Teacher Training Students for Primary Education

Katarína Laššová^{a*}

^{a*}*Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University in Nitra,
Tr. A. Hlinku 1, SK-949 74 Nitra*

Received November 10, 2021; received in revised form November 12, 2021; accepted November 15, 2021

Abstract

General development of spatial ability is one of the important topics in school mathematics. In this article, we focus on the solution of three spatial geometric tasks of future primary school teachers. The research sample consisted of 78 Bachelor's students of Constantine the Philosopher University in Nitra, Slovakia. The data were collected in September 2021. Using the statistical implicit analysis, we revealed the connections between used and unused cube nets by students during the previous study. The research findings indicate problems of the students with applications of unused cube nets.

Keywords: spatial ability, cube nets, teacher training, statistical implicative analysis.

Classification: B10, B50, D70, G40

Úvod

Priestorová predstavivosť je jedna z dôležitých ľudských schopností, ktoré sú potrebné a užitočné v každodennom živote. Priestorovej predstavivosti sa nemusíme venovať výlučne v školskom prostredí, pretože jej výskyt je zjavne prítomný i v mnohých profesiách. Schopnosť predstaviť si priestor je dôležitý tiež pre dizajn, inžinierstvo, stavebníctvo, architektúru prípadne i modelárstvo a iné rôzne odvetvia. Niektoré výskumy však ukazujú, že úroveň priestorovej predstavivosti žiakov má klesajúcu tendenciu. Príčinou sa javí i nedostatočná pripravenosť učiteľov na odovzdávanie vedomostí o priestorovej predstavivosti.

Myslíme si, že pre efektívne rozvíjanie priestorovej predstavivosti u žiakov, učiteľ sám potrebuje dostatok vedomostí a skúseností v tejto oblasti, a taktiež musí disponovať istými pedagogickými zručnosťami. Z vyššie uvedených dôvodov sme sa rozhodli zaoberať sa geometrickými vedomosťami budúcich učiteľov pre prvý stupeň základných škôl, ktorí sú študentami Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre.

*Corresponding author : katarina.lassova@ukf.sk

DOI: 10.17846/AMN.2021.7.2.17-26

Teoretické východiská

Spomínaný pojem priestorová predstavivosť môžeme chápať veľmi subjektívne. Mnohí si pod týmto slovným spojením predstavujú správnu orientáciu v lese či v nepoznanom mieste alebo správne čítanie máp. Vallo (2021) píše, že priestorovú predstavivosť môžeme voľne chápať ako tvorbu predstáv o geometrických objektoch, o ich rozmiestnení, a tiež ako schopnosť manipulovať s objektami v predstavách.

Považujeme za dôležité, aby priestorová predstavivosť bola jasne definovaná. Linn a Petersen (1985) definujú priestorovú predstavivosť ako zručnosť v reprezentovaní, transformovaní, generovaní a premenovávaní symboliky a nejazykových informácií. Tiež tvrdia, že priestorová predstavivosť je mentálny proces, ktorý sa používa na vnímanie, uchovávanie, pripomínanie, vytváranie, upravovanie a spájanie rôznych priestorových predstáv.

Šedivý a kol. (2007) definujú priestorovú predstavivosť ako schopnosť predstaviť si trojrozmerné geometrické tvary a ich vlastnosti ako napríklad tvar, polohu a veľkosť.

Vzhľadom na kognitívny vývin žiaka Piaget a Inhelder (1971) rozdeľujú priestorovú predstavivosť na tri fázy. V prvej fáze sa žiaci učia pracovať s dvojrozmernými útvarmi, v druhej fáze spoznávajú trojrozmerné modely a v tretej fáze už spoznávajú vzťah medzi týmito dvoj a trojrozmernými objektami.

Podľa Tomkovej (2014) môžeme priestorovú predstavivosť chápať v troch formách. Najnižšou formou priestorovej predstavivosti je všeobecná, resp. intuitívna predstavivosť. Za vyššiu formu priestorovej predstavivosti je predovšetkým považovaná schopnosť predstaviť si geometrické útvary a za najvyššiu formu môžeme považovať priestorové a geometrické myslenie.

Niektorí ľudia si myslia, že v prípadoch, kedy sa dieťa nenarodí s priestorovou predstavivosťou, tak ju už ani nezíska. Hoci túto možnosť nevylučujeme, uvedomujeme si, že rodina je základným formovateľom detskej mysle, a tiež vývoja jeho priestorovej predstavivosti.

Reilly, Neuman a Andrews (2017) tvrdia, že členovia rodiny by mali deti od počiatku viesť k tomu, aby využitím jazyka priestorovej predstavivosti mali možnosť hrať rôzne didaktické hry, využívať logické aktivity a iné experimenty, a aby tak nadobúdali skúsenosti s priestorovou predstavivosťou. Tomková a kol. (2014) uvádza, že takýto spôsob môže byť veľmi užitočným východiskom pre postupný vývoj matematického a geometrického myslenia. Uvádzajú, že v základoch, ktoré deti získajú, môžu prameniť korene nielen priestorovej predstavivosti, ale aj detskej fantázie a iných umeleckých sklonov. Myšlienku potvrdzuje aj Armah a kol. (2018), ktorý píše, že nedostatočné skúsenosti s geometriou nadobudnuté v detstve môžu žiakom a študentom spôsobovať neskoršie problémy s priestorovou predstavivosťou. Podobne aj Marchis (2017) tvrdí, že u žiakov aj u študentov je veľmi potrebné podporiť rozvoj priestorovej predstavivosti.

Počas predškolského i školského vzdelávania zohráva dôležitú úlohu v živote dieťaťa učiteľ. Mnohé výskumy však ukazujú, že samotní učitelia majú základných i stredných škôl majú nízku úroveň priestorovej predstavivosti. Potvrdzuje to aj Kuřinová výskum (1989).

Spôsob získavania priestorových skúseností sa na školách najčastejšie učí využitím sietí kocky. Sieť kocky je síce dvojrozmerný útvar vytvorený zo šiestich rovnakých štvorcov navzájom spojených celými stranami v rovine, no jeho zložením sa dá poskladať do trojrozmerného útvaru, pričom jednotlivé štvorce vytvárajú steny kocky (Šedivý a kol., 2007). Existuje 11 sietí kocky, no žiaci väčšinu z nich často ani nepoznajú. Skúsenosť ukazuje (Wardani a kol., 2019),

že žiaci málo modelujú kocky z ich sietí. Táto skutočnosť môže byť častou príčinou nedostatočného poznania jednotlivých sietí ako u žiakov, tak i u študentov a ich predstavy o sieťach kocky sa potom často javia ako mylné.

Metodológia

V článku sa zameriame na analýzu riešení vybraných nami navrhnutých úloh na priestorovú predstavivosť, ktorých základom je práca s kockou a jej sieťami.

V rámci danej problematiky sme si stanovili tieto výskumné ciele:

1. Analyzovať študentské riešenia úloh na priestorovú predstavivosť z pohľadu ich správnosti.
2. Analyzovať študentské riešenia úloh na priestorovú predstavivosť z pohľadu výskytu štandardných a neštandardných sietí kocky v ich zadanií.

Popis výskumnej vzorky

Výskum sme realizovali v septembri 2021 na výskumnej vzorke 78 študentov prvého ročníka bakalárskeho štúdia na UKF v Nitre v odbore predškolská a elementárna pedagogika. Títo študenti boli absolventami rôznych typov škôl. Gymnázium absolvovalo 32% študentov, stredné odborné školy 24% a strednú pedagogickú školu 44% študentov.

Výskumné nástroje k zberu a spracovaniu dát

Na realizáciu výskumu boli použité nami navrhnuté úlohy o priestorovej predstavivosti. Všetky tri úlohy sa týkali kocky a jej sietí.

Prvá časť prvej úlohy (1a) bola zameraná na otáčanie hracej kocky po hracom pláne. V druhej časti prvej úlohy (1b a 1c) bolo potrebné, aby žiaci správne doplnili počet bodiek na sieťi hracej kocky podľa predlohy kocky z prvej časti úlohy.

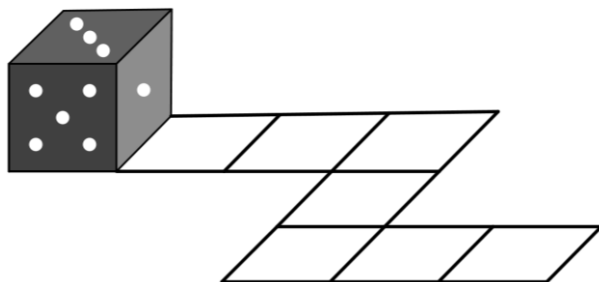
Druhá úloha bola zameraná na doplnenie počtu bodiek do rôznych sietí kocky, pričom jedna z nich nebola správna.

Tretia úloha sa zaoberala skladaním sietí kocky a správnym určením spojenia jednotlivých bodov do vrcholov a úsečiek do hrán kociek.

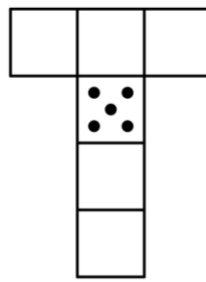
Uvádzame presné znenie spomínaných úloh.

1. úloha

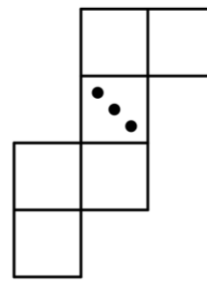
- a) Do jednotlivých políčok hracieho plánu zakreslite počet bodiek, ktoré sa nachádzajú na stene kocky po jej preklopení o 90° v smere hracieho plánu.
- b) Dokreslite do sietí kocky počet bodiek na jednotlivých stenách hracej kocky.



a)



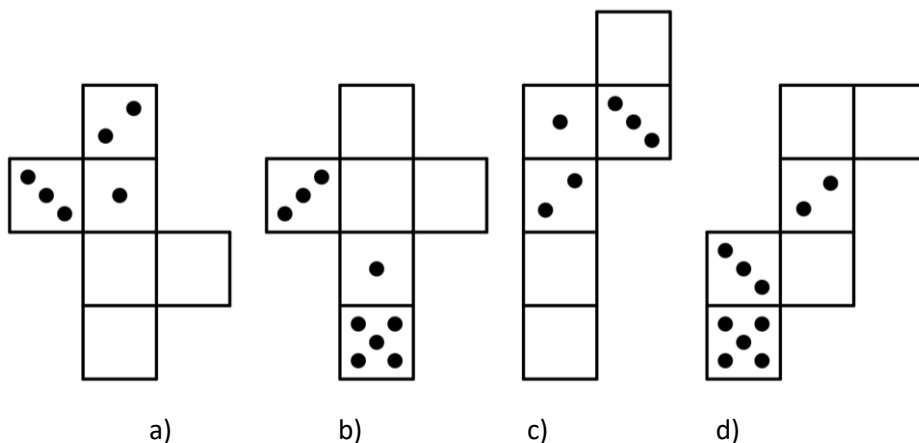
b)



c)

2. úloha

Doplňte počet bodiek v jednotlivých sieťach hracej kocky a sieť, ktorá nie je sieťou kocky prečiarknite.



3. úloha

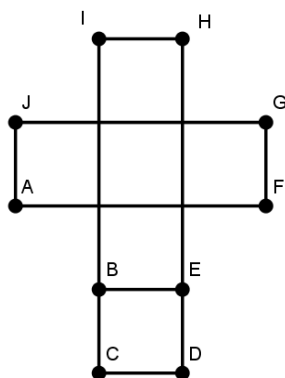
Napíšte, ktoré útvary sa po zložení kocky z jej siete spoja (resp. splynú).

Sieť A)

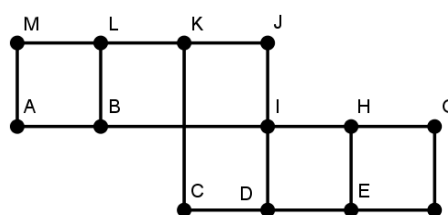
- a) Bod F sa spojí s bodom
- b) Bod G sa spojí s bodmi
- c) Úsečka FG sa spojí s úsečkou

Sieť B)

- a) Bod F sa spojí s bodmi
- b) Bod G sa spojí s bodmi
- c) Úsečka FG sa spojí s úsečkou



Sieť A)



Sieť B)

Výskumné metódy

Na splnenie cieľov sme použili štatistickú implikačnú analýzu na skúmanie závislostí a vzťahov medzi didaktickými premennými, ktorú sme realizovali použitím štatistického programu C.H.I.C. (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive). Spomínaný program umožňuje vizualizáciu vzťahov podobností a implikácií medzi danými didaktickými premennými, pričom ich dokáže vyjadriť aj percentuálne. (Gras, 2008).

Použili sme obsahovú analýzu študentských riešení vyššie uvedených úloh a vymedzili sme nasledujúce didaktické premenné.

1. úloha – študentské riešenie 1. úlohy

- 1_a_CS – správne riešenie úlohy 1a
- 1_b_CS – správne riešenie úlohy 1b
- 1_c_CS – správne riešenie úlohy 1c
- 1_CS – správne riešenie celej 1. úlohy

2. úloha – študentské riešenie 2. úlohy

- 2_a_CS – správne riešenie úlohy 2a
- 2_b_CS – správne riešenie úlohy 2b
- 2_c_CS – správne riešenie úlohy 2c
- 2_d_CS – správne riešenie úlohy 2d
- 2_CS – správne riešenie celej 2. úlohy

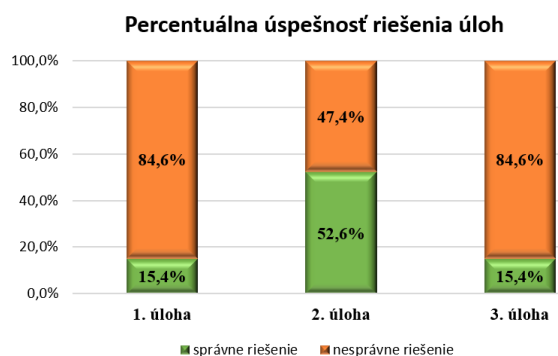
3. úloha – študentské riešenie 3. úlohy

- 3_a_CS – správne riešenie úlohy 3a
- 3_b_CS – správne riešenie úlohy 3b
- 3_CS – správne riešenie celej 3. úlohy

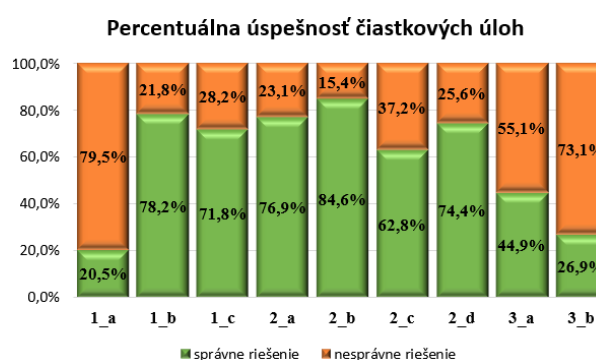
Kvantitatívna a kvalitatívna analýza študentských riešení

V nasledujúcich riadkoch uvedieme analýzu vybraných správnych a nesprávnych študentských riešení.

V Grafe 1 môžeme vidieť úspešnosť celkového riešenia jednotlivých úloh. Vidíme, že prvá a tretia úloha sa javí pre študentov problematická, pričom iba 15,4% študentov vyriešilo tieto dve úlohy správne. Graf 2 ukazuje úspešnosť celkového riešenia jednotlivých čiastkových úloh. Najnáročnejšia sa javí úloha 1a, v ktorej študenti na základe preklápania kocky o 90° mali dopísať počet bodiek do hracieho plánu. Tiež sa ukázalo, že študenti mali problém určiť, ktoré body a úsečky sa po zložení siete kocky navzájom spoja (úlohy 3a a 3b).



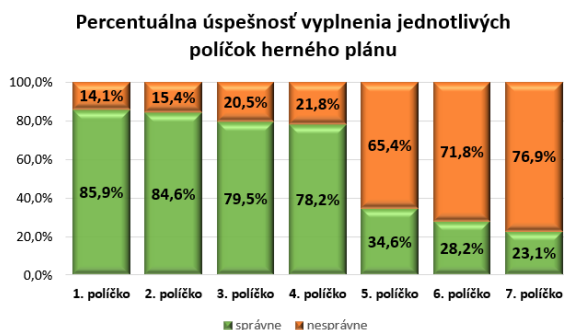
Graf 1: Úspešnosť riešenia úloh



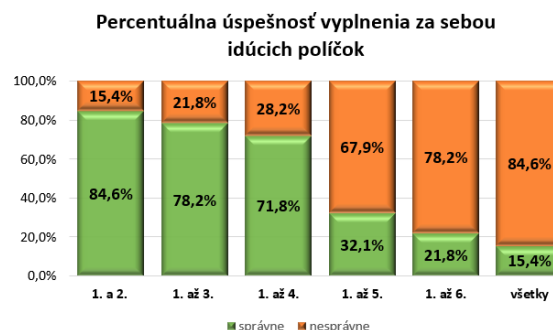
Graf 2: Úspešnosť čiastkových riešení úloh

Kvantitatívna a kvalitatívna analýza 1. úlohy

Graf 3 ukazuje percentuálnu úspešnosť študentov vo vyplňovaní jednotlivých políček v hracom pláne. Graf 4 zobrazuje, koľko percent študentov úspešne alebo neúspešne postupovalo v jednotlivých krokoch, ktoré sú charakterizované postupným vyplňovaním za sebou idúcich políček.

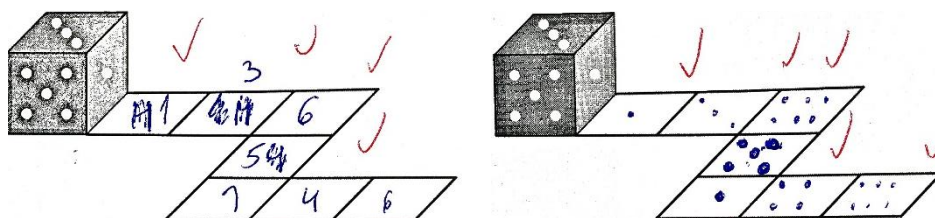


Graf 3: Úspešnosť vyplnenia jednotlivých políček v hracom pláne v úlohe 1a



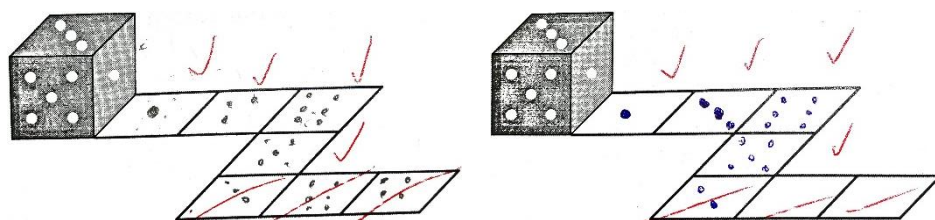
Graf 4: Úspešnosť vyplnenia za sebou idúcich políček v hracom pláne v úlohe 1a

Na Obrázku 1 vidíme dve zo správnych študentských riešení úlohy 1a. Iba 15,4 % študentov správne vyplnilo všetkých sedem políček hracieho plánu, kde zaznamenali počet bodiek na stenách hracej kocky po jej preklopení v smere hracieho plánu.



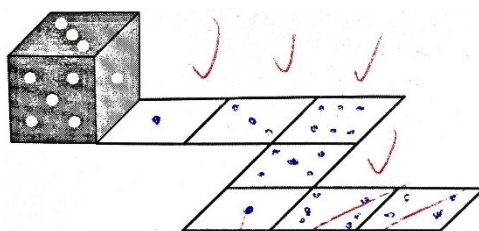
Obrázok 1: Študentské správne riešenia celej prvej úlohy

78,2% študentov zvládlo správne doplniť počet bodiek do prvých troch za sebou idúcich políček hracieho plánu a 71,8% študentov správne doplnilo počet bodiek na stenách hracej kocky, ktoré vzniknú po jej preklopení v smere hracieho plánu do bezprostredne nasledujúcich štyroch políček. (Obrázok 2)



Obrázok 2: Študentské správne riešenia prvej úlohy - štyri políčka

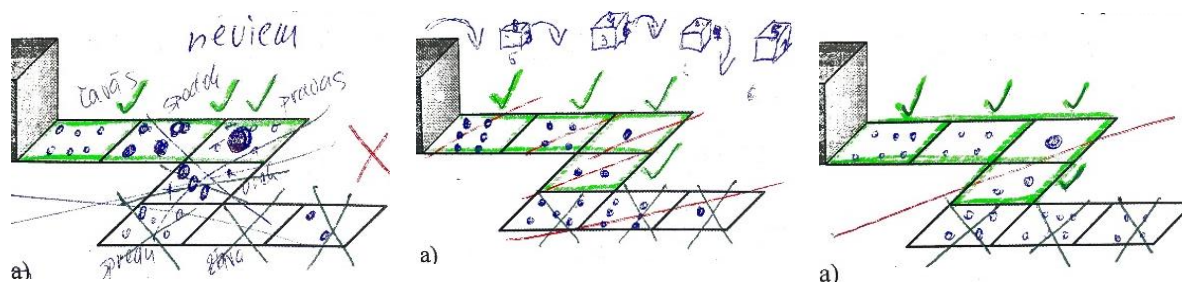
Obrázok 3 ukazuje jedno študentské riešenie z 32,1% správne doplnených bodiek do prvých piatich políček hracieho plánu.



Obrázok 3: Študentské správne riešenia prvej úlohy - päť políček

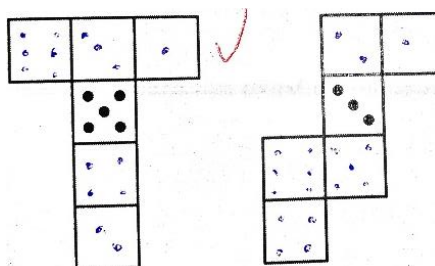
Doposiaľ sme ukázali riešenia, v ktorých študenti dopĺňali do hracieho plánu počet bodiek, ktoré vzniknú pri dotyku kocky s hracím plánom.

Zaujímavé riešenia sme však pozorovali u troch študentov. Z ich riešení (Obr. 4) môžeme vyčítať, že do prvých troch políčok hracieho plánu študenti zaznamenali počet bodiek, ktoré sa na stenách hracej kocky po jej preklopení v smere hracieho plánu ukázali na protiľahlej stene hracej kocky. Títo vybraní študenti teda do hracieho plánu dopĺňali počet bodiek, ktoré sa pri preklápaní kocky nedotýkali hracieho plánu, ale doplnili tie, ktoré sú reálne vidieť pri pohľade „zhora“. Nakoľko sme v zadaní neuviedli, či majú študenti zakresliť počet bodiek, ktoré sa nachádzajú na vrchnej alebo spodnej stene kocky, tieto riešenia nepovažujeme za nesprávne. Na obrázku 4 sú zvlášť označené políčka, ktoré sú z tohto hľadiska správne vyplnené.



Obrázok 4: Zaujímavé študentské riešenia úlohy 1a

Správne riešenie úloh 1b a 1c spočívalo v doplnení správneho počtu bodiek do sietí hracej kocky, ktorá reprezentovala kocku z úlohy 1a. Úloha 1b však obsahovala pomerne známu sieť kocky, ktorú môžeme nazvať aj štandardnou, nakoľko sa vyskytuje v učebniciach matematiky a študenti ju poznajú. Náročnejšou sa preto javí úloha 1c, v ktorej sieť kocky je menej známa. Rozdiel v úspešnosti riešenia medzi týmito sieťami bola 6,4%, teda úlohu 1b bezchybne zvládlo 78,2% študentov a úlohu 1c 71,8 % študentov. Na obrázku 5 vidíme správne študentské riešenie úloh 1b a 1c.

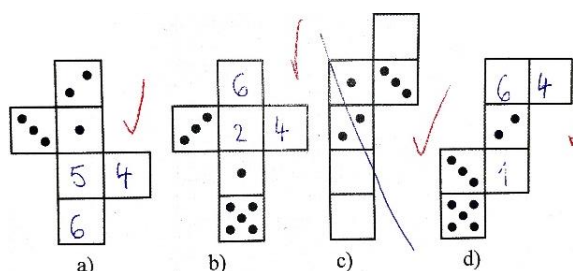


Obrázok 5: Študentské správne riešenie úloh 1b a 1c

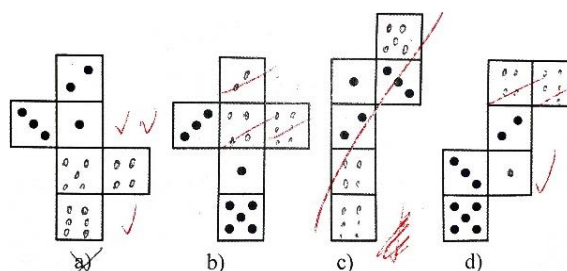
Kvalitatívna analýza 2. úlohy

Správne riešenie úloh 2a, 2b, 2d bolo zamerané na doplnenie správneho počtu bodiek do sietí hracej kocky. V úlohe 2c bolo podľa zadania potrebné vyškrtnúť alebo inak označiť uvedenú sieť, pretože nepredstavovala sieť hracej kocky.

Medzi študentami bolo 37,2% takých, ktorí vylúčili inú ako sieť 2c. Počet bodiek do siete 2a doplnilo správne 76,9% študentov, sieť 2b správne vyplnilo 84,9% študentov a sieť 2d úspešne zvládlo 74,4% študentov. Na obrázku 6 sa nachádza ukážka správne vyriešenej celej druhej úlohy a na obrázku 7 je čiastočne správne riešenie jedného zo študentov.



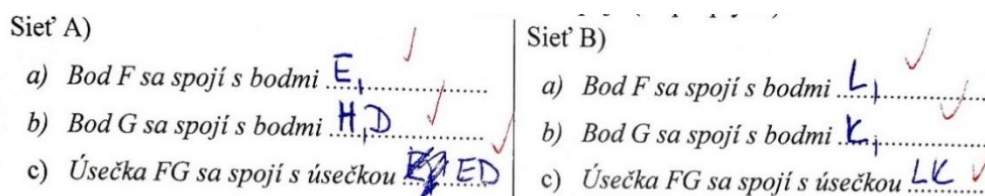
Obrázok 5: Študentské správne riešenie 2. úlohy



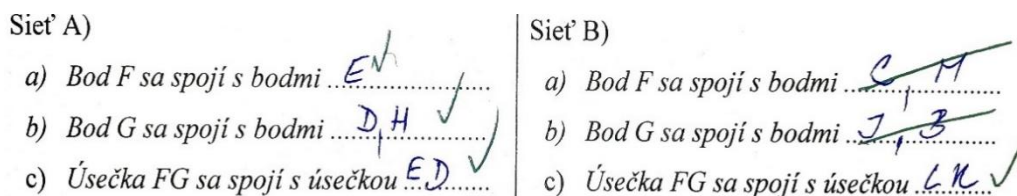
Obrázok 6: Študentské nesprávne riešenie 2. úlohy

Kvalitatívna analýza 3. úlohy

Tretia úloha mala dve časti – 3a a 3b. Študenti mali napísať body a úsečky, ktoré sa s určenými bodmi pri zložení siete spoja. Sieť 3a považujeme za štandardnú v školskom prostredí, pričom sieť 3b sa zdala byť netradičnou sieťou kocky. Rozdielnu náročnosť jednotlivých sietí potvrdzujú aj percentuálne výsledky správnych riešení. Celú úlohu 3a vyriešilo správne 44% študentov a úlohu 3b správne vyriešilo iba 27% študentov. Rozdiel v úspešnosti medzi jednotlivými úlohami je teda 18%, čo potvrdzuje náročnosť siete kocky v úlohe 3b. Obrázok 8 zobrazuje správne riešenie 3. úlohy a obrázok 9 prezentuje čiastočne nesprávne riešenie 3. úlohy.



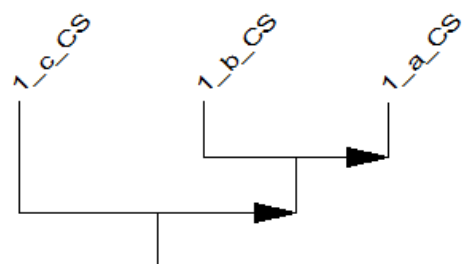
Obrázok 7: Študentské správne riešenie 3. úlohy



Obrázok 8: Študentské nesprávne riešenie 3. úlohy

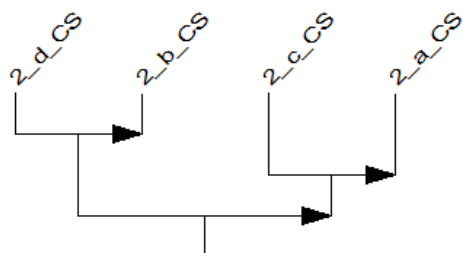
Skúmanie vzťahu medzi jednotlivými riešeniami úloh

Na hlbšiu kvalitatívnu analýzu vzťahov a súvislostí medzi jednotlivými riešeniami úloh sme použili štatistický softvér C.H.I.C. Hierarchický strom znázorňuje súvislosti medzi jednotlivými didaktickými premennými stanovenými v analýze a-priori.



Obrázok 9: Hierarchický strom - 1. úloha

Obrázok 10 znázorňuje vzťah medzi správnymi riešeniami úloh 1a, 1b a 1c. Z implikácií môžeme vidieť, že študent, ktorý správne vyriešil úlohu 1c, čiže doplnil počet bodiek do neštandardnej siete hracej kocky, správne vyplnil aj štandardnú sieť kocky a tiež správne určil počet bodiek na hracom pláne ($1_c_CS \rightarrow (1_b_CS \rightarrow 1_a_CS)$), kohézia = 0,912).



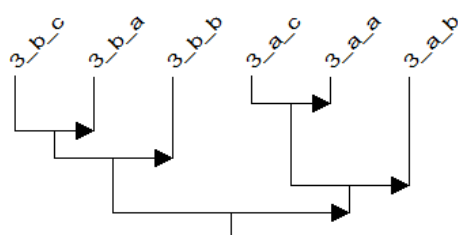
Obrázok 10: Hierarchický strom - 2. úloha

Na základe implikácie $2_d_CS \rightarrow 2_b_CS$ (kohézia = 1) (Obr. 11) môžeme usúdiť, že ak študent doplnil správny počet bodiek do neštandardnej siete kocky 2d, potom správne vyplnil počet bodiek aj do známej siete kocky 2b.



Obrázok 11: Hierarchický strom - 3. úloha

Pre vyhodnotenie výsledkov z úlohy 3 budeme najprv sledovať vzťah medzi celkovými riešeniami úloh 3a a 3b ($3_b_CS \rightarrow 3_a_CS$, kohézia = 1). Z implikácie vyplýva (Obr. 12), že ak študent správne vyriešil úlohu 3b na neštandardnej sieti kocky, potom doplnil správne aj úlohu 3a s použitím tzv. učebnicovej siete kocky.



Obrázok 12: Hierarchický strom - 3. úloha - čiastkové otázky

Obrázok 13 znázorňuje vzťah medzi čiastkovými otázkami v úlohe 3a a 3b. Zaujímavá je implikácia medzi ($3_b_c \rightarrow 3_b_a \rightarrow 3_b_b$ (kohézia = 1) a tiež ($3_a_c \rightarrow 3_a_a \rightarrow 3_a_b$ (kohézia = 1). Z oboch implikácií môžeme usúdiť, že ak študent správne určil spojenie úsečiek po zložení kocky z jej siete, tak správne určil aj vrcholy, ktoré sa po zložení siete kocky spoja.

Záver

Priestorová predstavivosť je súčasťou každodenného života. Skúsenosť s priestorovou predstavivosťou je dôležité neustále prehlbovať v bežných činnostiach a tiež rozvíjať v rámci školského vzdelávania počas hodín geometrie. Je známe, že veľa žiakov a študentov má problém s priestorovou predstavivosťou. V uvedenej obsahovej analýze študentských riešení úloh na priestorovú predstavivosť študentov predškolskej a elementárnej pedagogiky sme sa zamerali na rozbor správnych a nesprávnych riešení úloh zameraných na kocku a jej sieť.

Analýza úlohy 1a ukazuje, že iba 20,5% študentov nemá problém predstaviť si otáčanie hracej kocky v akomkoľvek smere. Hoci sme pred zadaním prvej úlohy študentov upozornili na to, že súčet bodiek na protiľahlých stenách hracej kocky je vždy 7, najčastejšou chybou pri preklápaní kocky o 90° v smere hracieho plánu sa ukazuje práve nevyužitie tejto vlastnosti hracej kocky. Tiež sme si všimli, že traja študenti do hracieho plánu nevpisovali počet bodiek, ktoré sa pri preklápaní hracej kocky o 90° dotýkali hracieho plánu, ale počet bodiek nachádzajúcich sa na protiľahlých stenách kocky.

Ďalej sme mohli vidieť (úloha 2), že 52,6% študentov dokáže doplniť chýbajúce počty bodiek do jednotlivých sietí hracích kociek – štandardných aj neštandardných. Zo štatistickej implikačnej analýzy vyplýva, že študenti, ktorí doplnili správny počet bodiek

do siete neštandardnej hracej kocky, tak správne doplnili počet bodiek aj do siete štandardnej hracej kocky.

Z analýzy úlohy 3 vidíme, že spojiť body a úsečky, ktoré sa s určenými bodmi pri zložení siete spoja zvládlo 44,9% študentov pri práci so štandardnou sieťou kocky a iba 26,9% študentov pri práci s neštandardnou sieťou kocky.

Všeobecne sa ukázalo, že študenti úspešnejšie dokážu pracovať so štandardnými sieťami kociek. Táto skutočnosť sa zdá byť celkom prirodzená. Závislosť absolvovaného predchádzajúceho štúdia a úspešnosti študentov v riešení jednotlivých úloh nebola preukázaná. Zo štatistickej implikačnej analýzy vyplýva, že študenti vedľa lepšie pracovať so štandardnými sieťami kociek ako s neštandardnými sieťami kociek.

PodĎakovanie

Príspevok vznikol s podporou grantovej agentúry UGA na UKF v Nitre v rámci riešenia projektu s názvom *Komparácia obsahu vzdelávania odborných predmetov technického zamerania na stredných odborných školách s akcentom na aplikácie zobrazovania priestoru*.

Literatúra

Armah, R. B., Cofie, P. O., & Okpoti, C. A. (2018). Investigating the Effect of van Hiele Phase-Based Instruction on Pre-Service Teachers' Geometric Thinking. *International journal of Research in Education and Science*, 4(1), 314-330.

Gras, R. et al. (2008). *Statistical Implicative Analysis. Theory and Applications*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer

Kuřina, F. (1989). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child development*, 1479-1498.

Marchis, I. (2017). Pre-Service Primary School Teachers' Spatial Abilities. *Acta Didactica Napocensia*, 10(2), 123-130.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). *Mental imagery in the child* (FW Langdon & J. L Lunzer, Trans.). New Your: Basic Books.

Reilly, D., Neumann, D. L., & Andrews, G. (2017). Gender differences in spatial ability: Implications for STEM education and approaches to reducing the gender gap for parents and educators. In *Visual-spatial ability in STEM education* (pp. 195-224). Springer, Cham.

Šedivý, O., Pavlovičová, G. & Rumanová, L. & Vallo, D. (2007). STEREOMETRIA- umenie vidieť a predstavovať si priestor, 13-15.

Tomková, V. et al. (2014) *Priestorová predstavivosť v školskej praxi*, 8-40.

Vallo, D. (2021). *Koncepcia výučby geometrie podporovanej implementáciou dynamických geometrických programov*. Nitra: UKF.

Wardani, I., Tolle, H., & Aknuranda, I. (2019). Evaluation of an Educational Media on Cube Nets Based on Learning Effectiveness and Gamification Parameters. *iJET*, 14(14), 4-18

Využitie rovnováhy na páke pri odvodení niektorých súčtov

Utilization of Law of the Lever in Deriving Some Sums

Michaela Vargová^a

^a*Department of Didactics in Mathematics, Physics and Informatics, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Comenius University Bratislava, Slovakia*

Received November 14, 2021; received in revised form November 16, 2021; accepted November 17, 2021

Abstract

The aim of the contribution is to point out, that the utilization the law of the lever represents visual approach to deriving some formulae. The presented approach could be useful in the teaching process, for example by using the guided discovery method.

Keywords: sum of squares formula, law of the lever, visualisation

Classification: 97D50, 11L03

Úvod

V matematike je rigorózne zdôvodňovanie jednotlivých tvrdení založené na dedukcii. Formulácia jednotlivých hypotetických tvrdení je však veľmi často výsledkom induktívneho uvažovania, súvisiaceho s pozorovaním, experimentovaním, veľmi často doplneným vhodnou grafickou reprezentáciou. Podobne ako vhodná vizualizácia problému, tak aj jeho fyzikálna interpretácia môže niekedy poskytnúť intuitívny vhľad do situácie a viesť k objavu, resp. formulácii hypotézy.

Túto skutočnosť dokumentujú viaceré prípady, známe z histórie matematiky. Archimedes na základe princípu rovnoramenných váh odvodil napríklad vzťahy pre objem valca, kužeľa a gule (ktoré následne využitím exhaustačnej metódy a reductia ad absurdum aj rigorózne dokázal). Podobne, k významným matematickým objavom na základe fyzikálnych úvah dospeli napríklad aj Riemann, Hamilton, Lagrange, Jacobi, Poincaré (pozri napr. [1], [2], [3]) a mnohí ďalší.

V príspevku ukážeme, ako využitím princípu rovnováhy na páke možno jednoducho nájsť niektoré (konečné) súčty, napríklad

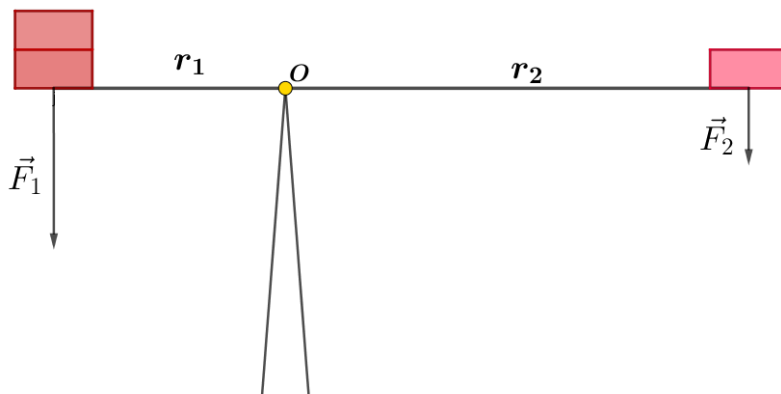
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Súčty tvaru $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, $k \in \mathbb{N}$ je možné odvodiť viacerými spôsobmi, pre $k = 2$ je možné napríklad využiť rovnosť $\sum_{i=1}^n (i^3 - (i-1)^3) = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + n$, prípadne pri odvodení môžu byť nápomocné rôzne grafické reprezentácie (napr. [4]) či kombinatorický prístup [5].

*Corresponding author: michaela.vargova@fmph.uniba.sk
DOI: 10.17846/AMN.2021.7.2.27-33

Princíp rovnováhy na páke

Princíp rovnováhy na páke hovorí, že jednotlivé momenty síl sa musia rovnať. To znamená, že (vektorovo) platí $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$, resp. (pre náš prípad postačí aj skalárna rovnosť) $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$. Navyše, ak ide o tiažové sily (pozri obr. 1), predchádzajúcu rovnosť môžeme vyjadriť v tvare $m_1 g \cdot r_1 = m_2 g \cdot r_2$, odkiaľ máme $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

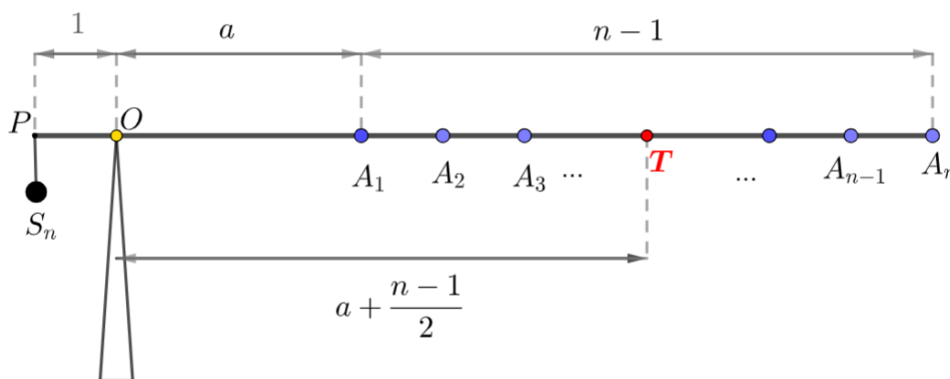


Obr. 1: Princíp rovnováhy na páke

Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti

Pomocou princípu rovnováhy na páke možno veľmi jednoducho dospieť k odvodeniu súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti.

Uvažujme aritmetickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{a + (n-1)d\}_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom a , diferenciou d .



Obr. 2: Využitie princípu rovnováhy na páke pri odvodení súčtu prvých n členov aritmetickej postupnosti

Na pravú stranu páky (obr. 2) umiestnime n závaží $A_1, A_2, \dots, A_n$ s jednotkovými hmotnosťami tak, že vzdialenosť závažia A_i od osi otáčania (bod O) je a a pre vzdialenosti medzi jednotlivými závažiami platí $|A_{i-1}A_i| = d$, $i = 2, 3, \dots, n$.

Na ľavú stranu páky do bodu P umiestnime hmotnosť S_n , pričom $|OP| = 1$. Pre rovnováhu na páke musí platiť

$$|OP| \cdot S_n = |OA_1| \cdot 1 + |OA_2| \cdot 1 + \dots + |OA_n| \cdot 1,$$

resp.,

$$1 \cdot S_n = a \cdot 1 + (a + d) \cdot 1 + (a + 2d) \cdot 1 + \dots + (a + (n-1)d) \cdot 1,$$

odkiaľ je zrejmé, že

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d).$$

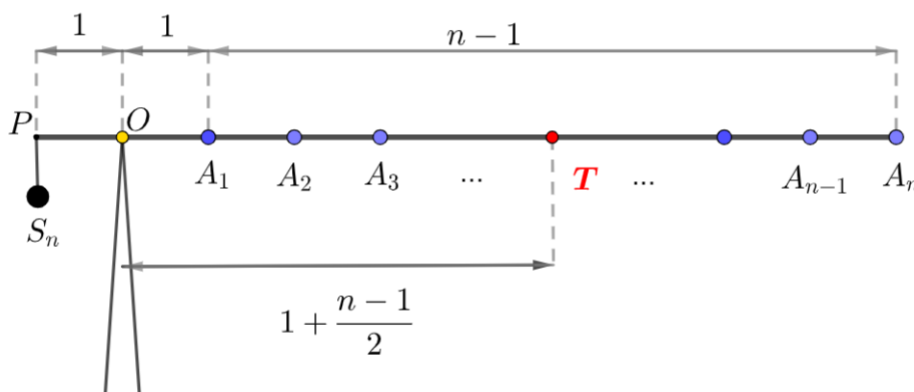
Páka zostane v rovnováhe aj v tom prípade, ak hmotnosť celej sústavy umiestnime do ťažiska T . Pretože závažia $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú rozmiestnené rovnomerne, ťažisko T tejto sústavy predstavuje stred úsečky A_1A_n . Z uvedeného vyplýva, že platí rovnosť $|OP| \cdot S_n = |OT| \cdot n$, čiže

$$1 \cdot S_n = n \cdot \left(a + \frac{n-1}{2} \cdot d \right), \quad \text{resp.} \quad 1 \cdot S_n = \frac{n}{2} (a + (a + (n-1)d)).$$

Z predchádzajúcich úvah získavame

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d) = \frac{n}{2} (a + (a + (n-1)d)), \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

Poznámka. V prípade využitia tohto prístupu k odvodeniu niektorých identít na strednej škole by bolo zrejme vhodnejšie postupovať tak, že by sme na základe princípu rovnováhy na páke najskôr našli súčet prvých n prirodzených čísel (obr. 2) a až následne tento postup zovšeobecnil pre prípad aritmetickej postupnosti s kladnými členmi.



Obr. 2: Využitie princípu rovnováhy na páke pri odvodení súčtu prvých n prirodzených čísel

Súčet druhých mocnín prvých n prirodzených čísel

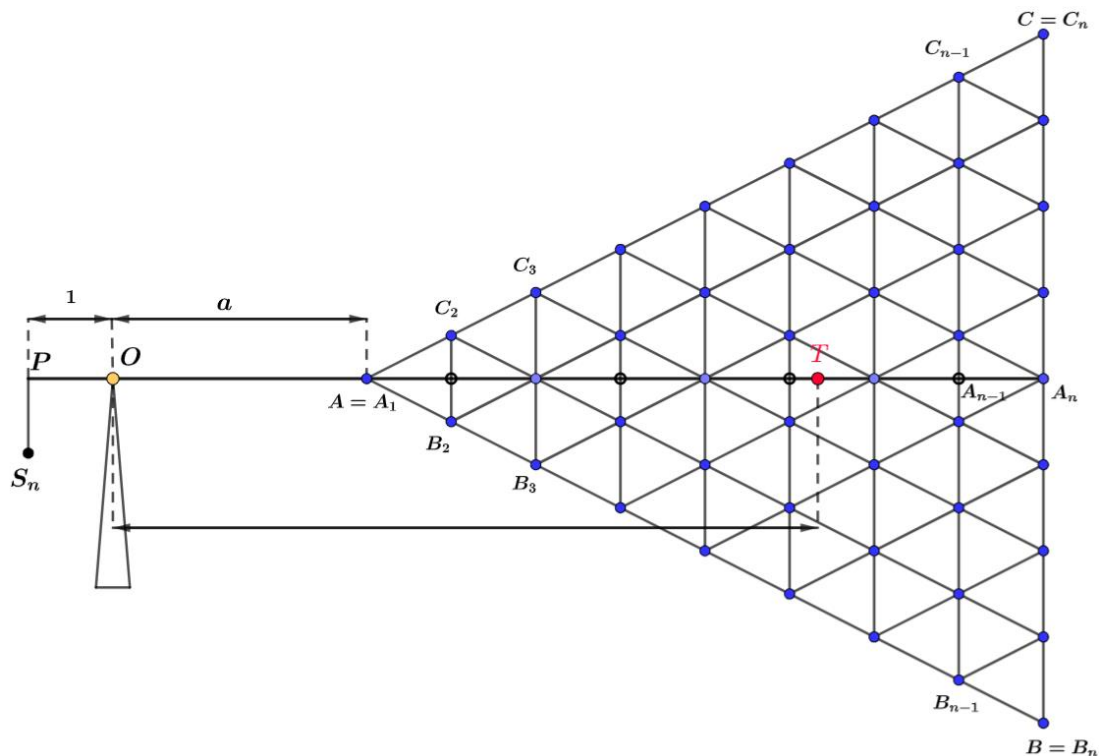
Použitím princípu rovnováhy na páke možno odvodiť aj rovnosť

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Do bodu P na ľavej strane páky (obr. 3) umiestnime znovu závažie s hmotnosťou S_n , na pravú stranu páky umiestnime závažia s jednotkovými hmotnosťami tak, ako je naznačené na obr. 3 (závažia predstavujú body, vyznačené modrou farbou).

Závažia uvažovanej sústavy sú mrežovými bodmi siete, kde

- bodmi B_i , $i = 2, \dots, n-1$ (obr. 3) sú vedené rovnobežky so stranou AC trojuholníka ABC ,
- bodmi C_i , $i = 2, \dots, n-1$ zase rovnobežky so stranou AB trojuholníka ABC .



Obr. 3: Využitie princípu rovnováhy na páke pri odvodení súčtu druhých mocnín prvých n prirodzených čísel

Rozmiestnenie závaží zabezpečí, že hmotnosť sústavy je rozmiestnená rovnomerne vzhľadom ku každej ťažnici trojuholníka ABC , preto ťažisko T tejto sústavy splýva s ťažiskom uvažovaného trojuholníka. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, využijeme informáciu o polohe ťažiska uvažovanej sústavy hmotných bodov v nasledujúcich úvahách.

Opäť predpokladajme, že $|OP|=1$, $|OA_1|=a$ a $|A_{i-1}A_i|=1$, $i=2, 3, \dots, n$. Keďže závažia na pravej strane páky sú rovnaké, v každom bode A_i , $i=1, 2, 3, \dots, n$ je umiestnená hmotnosť i (obr. 3). Páka bude v rovnováhe, ak sa „momenty“, pôsobiace na oboch jej stranách budú rovnať, t.j.

$$|OP| \cdot S_n = |OA_1| \cdot 1 + |OA_2| \cdot 2 + \dots + |OA_n| \cdot n, \text{ resp.,}$$

$$1 \cdot S_n = a \cdot 1 + (a+1) \cdot 2 + (a+2) \cdot 3 + \dots + (a+(n-1)) \cdot n.$$

Analogicky, páka zostane v rovnováhe aj vtedy, ak hmotnosť

$$m = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

celej sústavy uvažovaných závaží umiestnime do ťažiska T , čiže

$$|OP| \cdot S_n = |OT| \cdot m, \text{ resp.,}$$

$$1 \cdot S_n = \left(a + \frac{2}{3}(n-1) \right) \cdot (1 + 2 + \dots + n) = \left(a + \frac{2}{3}(n-1) \right) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z toho vyplýva, že

$$a \cdot 1 + (a+1) \cdot 2 + (a+2) \cdot 3 + \dots + (a+(n-1)) \cdot n = \left(a + \frac{2}{3}(n-1)\right) \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ak položíme $a=1$, potom dostávame

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \left(1 + \frac{2}{3}(n-1)\right) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ak položíme $a=0$, tak na základe odvodennej rovnosti platí

$$1+1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{2}{3}(n-1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Odvodenie vybranej goniometrickej identity

Použitím zmieneného princípu je možné odvodiť aj rovnosť

$$\sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n+1}{2} \cotg \frac{\pi}{2n}.$$

Predpokladajme (obr.2), že $|OP|=1$, $|OA_1|=1$ a $|A_{i-1}A_i|=1$, $i=2, 3, \dots, n$ a v bode P je aj v tomto prípade umiestnené závažie s hmotnosťou S_n .

Do bodov A_i , $i=1, 2, 3, \dots, n$ umiestnime v danom poradí závažia s hmotnosťami

$$\sin \frac{i\pi}{n}, i=1, 2, \dots, n-1.$$

Keďže pre $i=1, 2, \dots, n-1$ platí

$$\sin \frac{i\pi}{n} = \sin \left(\pi - \frac{i\pi}{n} \right) = \sin \frac{(n-i)\pi}{n},$$

je hmotnosť závaží na pravej strane páky (obr.2) rozmiestnená rovnomerne a ťažisko T tejto sústavy splýva so stredom úsečky A_1A_n .

Z rovnovážnej polohy páky vyplýva platnosť rovnosti

$$1 \cdot S_n = \sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Aj tentokrát využime skutočnosť, že páka zostane v rovnováhe aj vtedy, ak hmotnosť

$$m = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$$

celej sústavy uvažovaných závaží umiestnime do ťažiska T , čiže

$$|OP| \cdot S_n = |OT| \cdot m, \text{ resp.,}$$

$$1 \cdot S_n = \left(1 + \frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Na získanie hľadanej identity nám zostáva určiť hmotnosť m , kde

$$m = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} \right) + \dots + \sin \left(\frac{\pi}{n} + (n-2) \cdot \frac{\pi}{n} \right).$$

Z predchádzajúceho zápisu je zrejmé, že argumenty funkcie sínus predstavujú prvých $(n-1)$ členov aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \equiv \{a + (n-1)d\}_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $a = \frac{\pi}{n}$ a diferenciou $d = \frac{\pi}{n}$.

Poznámka. Hodnotu m môžeme nájsť postupom, ktorý pre lepšiu prehľadnosť uvedieme všeobecnejšie. Predpokladajme, že

$$H = \sin a + \sin(a+d) + \sin(a+2 \cdot d) + \dots + \sin(a+(n-1)d).$$

Vynásobením uvedenej rovnosti výrazom $2 \sin \frac{d}{2}$ a využitím identity $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ môžeme túto rovnosť napísať v tvare

$$2H \sin \frac{d}{2} = \left(\cos \left(a - \frac{d}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{d}{2} \right) \right) + \left(\cos \left(a + \frac{d}{2} \right) - \cos \left(a + \frac{3}{2}d \right) \right) + \dots + \left(\cos \left(a + nd - \frac{3}{2}d \right) - \cos \left(a + nd - \frac{d}{2} \right) \right),$$

odkiaľ

$$2H \sin \frac{d}{2} = \cos \left(a - \frac{d}{2} \right) - \cos \left(a + nd - \frac{d}{2} \right), \text{ resp. } 2H \sin \frac{d}{2} = 2 \sin \left(a + (n-1) \frac{d}{2} \right) \sin \frac{nd}{2}.$$

Následne pre H dostávame

$$H = \frac{2 \sin \left(a + (n-1) \frac{d}{2} \right) \sin \frac{nd}{2}}{2 \sin \frac{d}{2}}.$$

Využitím tohto vzťahu pre hmotnosť m uvažovanej sústavy $(n-1)$ bodov dostávame

$$m = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{n} + (n-2) \frac{\pi}{2} \right) \sin \frac{(n-1)\pi}{2}}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = \cotg \frac{\pi}{2n}.$$

Využitím princípu rovnováhy na páke sme tak dospeli k rovnosti

$$\sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \left(1 + \frac{n-1}{2} \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right),$$

ktorú môžeme vyjadriť v tvare

$$1 \cdot S_n = \sin \frac{\pi}{n} + 2 \sin \frac{2\pi}{n} + 3 \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + (n-1) \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n+1}{2} \cotg \frac{\pi}{2n}.$$

Záver

V príspevku sme ukázali jeden z možných názorných prístupov umožňujúcich formuláciu hypotéz o platnosti niektorých identít, s ktorými sa žiaci stredných škôl, či univerzitní študenti

stretávajú často už v „hotovej“, odvodenej forme (neraz ako súčasť zadania dôkazových úloh, využívajúcich matematickú indukciu a so súčtami tvaru $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, $k \in \mathbb{N}$ pri výpočte Riemannovho integrálu pomocou definície).

Prezentovaný prístup k odvodeniu niektorých identít by mohol byť využiteľný vo vyučovacom procese, napríklad použitím metódy riadeného objavovania. Žiakov je však potrebné upozorniť, že pri uvedenom prístupe sme využívali úsudky induktívneho charakteru ako i fyzikálnu argumentáciu, takže formulované závery je treba deduktívne dokázať.

PodĎakovanie

Tento príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 014UK-4/2020.

Literatúra

1. Levi, M. 2009. The Mathematical Mechanics. Princeton: Princeton University Press, 2009. 197 p. ISBN 978 – 0-691-14020-9.
2. Edwards, C. H. 1979. The Historical Development of the Calculus. New York: Springer-Verlag, 1979. 346 p. ISBN 3 – 540 – 94313 – 7
3. Kline, M.: Mathematical thought from ancient to modern times (Volume 1). Oxford University Press, 1972. 412 s. ISBN 0-19-50135-7
4. Vargová, M. 2020. Ako súvisí súčet $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ s multiplikatívnou tabuľkou? In. Dva dni s didaktikou matematiky 2020. Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave, 2020. ISBN 978-80-8147-095-0. 149 -154.
5. Shirali S. 2015. Counting Your Way to the Sum of Squares Formula. In Resonance – Journal of Science Education. 2015, Vol. 20, No. 10, ISSN 0973-712X [13.11. 2021]. dostupné: <https://www.ias.ac.in/describe/article/reso/020/10/0893-0902>