



Russian Journal of Mathematical Research. Series A

Has been issued since 2015.
E-ISSN 2413-7529
2018. 4(1). Issued 2 times a year.

EDITORIAL BOARD

Simonyan Arsen – Sochi State University, Sochi, Russian Federation (Editor-in-Chief)
Ulitina Elena – Sochi State University, Sochi, Russian Federation (Deputy Editor-in-Chief)
Makarova Irina – Sochi State University, Sochi, Russian Federation
Belyavskii Grigorii – Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
Chitchyan Robert – Yerevan State University, Yerevan, Armenia
Mtchedlishvili Diana – Iakob Gogebashvili Telavi State University, Telavi, Georgia
Ushakov Vladimir – Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Journal is indexed by: **Cross Ref** (USA), **MIAR** (Spain), **Electronic scientific library** (Russia),
Open Academic Journals Index (USA).

All manuscripts are peer reviewed by experts in the respective field. Authors of the manuscripts bear responsibility for their content, credibility and reliability.

Editorial board doesn't expect the manuscripts' authors to always agree with its opinion.

Postal Address: 1367/4, Stara Vajnorska str., Bratislava – Nove Mesto, Slovakia, 831 04
Release date 23.06.2018
Format 21 × 29,7/4.

Website: <http://ejournal30.com/>
E-mail: aphr2010@mail.ru
Headset Georgia.

Founder and Editor: Academic Publishing House Researcher s.r.o. Order № RJM-7.

**Russian Journal of Mathematical Research.
Series A**

2018

Is. 1

CONTENTS

Articles and statements

Indicators of Economic Development of Russian Regions in a Vector Basis S.A. Aivazian, M.Y. Afanasiev, A.V. Kudrov	3
An Infinite Number of Ways of Algebraic Factorization of a Number and Radical Solution of Higher Degree Polynomial Equations S. Bonaya Buya	15
Disproof of the Riemann Hypothesis S. Bonaya Buya	19
Mathematical Modeling of Fractal Financial System in Computer Environment Scilab E.A. Gafurova, R.I. Parovik	23
On the Possibility of Sequestration of Basic Variables In Solving Some Problems of Linear Programming I.L. Makarova, V.I. Samarin	31
Specification Scheme of the Stochastic Production Function for Assessment of Technical Efficiency of the Regions in the Russian Federation V.A. Rudenko	38

Copyright © 2018 by Academic Publishing House Researcher s.r.o.



Published in the Slovak Republic
 Russian Journal of Mathematical Research. Series A
 Has been issued since 2015.
 E-ISSN: 2413-7529
 2018, 4(1): 3-14

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.3
www.ejournal30.com



Indicators of Economic Development of Russian Regions in a Vector Basis

Sergei A. Aivazian ^a, Mikhail Y. Afanasiev ^a, Alexander V. Kudrov ^{a, *}

^a Central Economics and Mathematics Institute of the Russian Academy of Sciences,
 Russian Federation

Abstract

The methodological basis is developed and tested for building indicators which shows the main directions of economic development of regions of the Russian Federation. The novelty of the results is determined by the fact that these indicators are built on the basis of a common vector basis. Two groups of indicators that characterize the different directions of the economic development: "production of products and services" and "material welfare" are highlighted in the structure of the main indicators of social and economic development. Two indicators are constructed based on the vector basis, each of which is maximally correlated with the indicator formed on the basis of corresponding group indicators. It is shown that for the considered direction of regional development the vector basis provides a higher consistency of the indexes and ranks of regions than the first major components.

Keywords: regional economy, econometric modeling, hypothesis testing, indicators.

1. Введение

Формируется и апробируется методологическая основа построения индикаторов основных направлений экономического развития субъектов РФ. Новизна результатов определяется тем, что эти индикаторы строятся на основе общего векторного базиса. В его составе следующие характеристики: масштаб экономики, техническая эффективность производства (индикатор качества управления в долгосрочном периоде), индекс отраслевой специализации (на основе первой главной компоненты структуры ВРП), индекс индустриализации (на основе второй главной компоненты структуры ВРП), тренд технической эффективности (индикатор качества управления в краткосрочном периоде).

Теоретически обоснованным подходом к построению индикатора определенного направления экономического развития является компонентный анализ показателей, характеризующих это направление. Наиболее полно методология его применения и результаты апробации при оценке качества жизни представлены в (Айвазян, 2012; Макаров и др., 2014). Естественным способом решения этой задачи является построение методом главных компонент индикатора каждого направления и сравнительный анализ индексов по каждому направлению. Далее этот способ используется в качестве базового. Новизна результатов определяется тем, что индикаторы строятся на основе общего векторного базиса. Компоненты векторного базиса отражают основные характеристики дифференциации, формируемые с помощью теоретически обоснованных моделей регионального развития.

* Corresponding author

E-mail addresses: aivazian@cemi.rssi.ru (S. Aivazian), miafan@cemi.rssi.ru (M. Afanasiev), kovlal@inbox.ru (A. Kudrov)

Положение региона в векторном базисе определяет его экономическое своеобразие. Формирование индикатора в векторном базисе осуществляется таким образом, чтобы он был в максимальной степени коррелирован с совокупностью показателей, характеризующих рассматриваемое направление. Преимущество рассматриваемого далее подхода в том, что построенные на его основе индикаторы позволяют количественно оценить относительное изменение уровня экономического развития региона при изменении характеристик его дифференциации.

Структура ВРП является определяющей характеристикой особенности технологической взаимосвязи ресурсных возможностей и результатов производственной деятельности региона. При формировании векторного базиса индикаторов регионального развития в качестве основных характеристик региональной дифференциации рассматриваются первая и вторая главные компоненты структуры ВРП. Первая главная компонента разделяет добывающие и прочие регионы и далее характеризуется как индекс отраслевой специализации. Вторая главная компонента разделяет обрабатывающие, равномерно развитые и развивающиеся регионы и далее характеризуется как индекс индустриализации. Показано, что две первые главные компоненты объясняют более 80 % общей дисперсии количественных характеристик структуры ВРП, причем взаимное расположение регионов в пространстве двух первых главных компонент устойчиво во времени (Айвазян и др., 2016а). С использованием двух первых главных компонент структуры ВРП и модифицированного метода максимального правдоподобия совокупность субъектов РФ разделена на пять групп, однородных по структуре ВРП (Айвазян и др., 2016б). Характеристики этих групп представлены в Таблице 1.

Таблица 1. Характеристики групп регионов, однородных по структуре ВРП

Обозначение группы	Название группы	Число регионов в группе	Характеристика группы
G1	Базовая	38	Равномерно развитая промышленность
G2	«Добывающие»	11	Развитая добывающая промышленность
G3	«Обрабатывающие»	12	Развитые обрабатывающие производства
G4	«Сельскохозяйственные»	11	Развитое сельское хозяйство
G5	«Развивающиеся»	8	Развивающиеся регионы

Предпосылка. Глокализация* создает условия для доступа региона к финансовым ресурсам и знаниям, создаваемым человечеством. Относительная неэффективность региона в группе однородности обусловлена тем, что он не использует в полной мере доступные возможности развития. Техническая эффективность регионального производства в мире глокализации является характеристикой качества управления.

Для каждой однородной группы строится производственная функция с переменными во времени коэффициентами, линейно зависящими от времени:

$$\ln R_{it} = \beta_0 + \alpha_0 t + (\beta_1 + \alpha_1 t) \ln K_{it} + (\beta_2 + \alpha_2 t) \ln L_{it} + v_{it} - u_{it} \quad (1)$$

R_{it} – ВРП региона i в момент времени t ; K_{it} – объем затрат физического капитала региона i в момент времени t , L_{it} – объем трудозатрат региона i в момент времени t , $v_{it} \in N(0, \sigma_v^2)$; $u_{it} \in N^+(\mu, \sigma_u^2)$. Методом максимального правдоподобия получены оценки

* Глокализация – сочетание глобальных и локальных факторов в развитии территорий (Кудряшова, 2008; Robertson, 1992). В контексте статьи – тенденция объединения человечества, основанная на применении информационных технологий и новых средств коммуникации, позволяющая практически мгновенно получать и использовать для развития региона ресурсы, создаваемые человечеством.

параметров производственной функции (1) для регионов каждой однородной группы по данным 2010–2015 гг.

Таблица 2. Оценки параметров модели (1) для однородных групп

Параметры	G1 Базовая	G2 Добывающ ие	G3 Обрабатыв ающие	G4 Сельскохоз яйственные	G5 Развивающ иеся	все 80 регионов
β_1	.7604*** (.0386)	.8154*** (.0276)	.3659*** (.0401)	.3873*** (.0760)	.3734*** (.0000)	.8590*** (.0342)
β_2	.3323*** (.0477)	.0981*** (.0286)	.6753*** (.0438)	.7465*** (.0817)	.4814*** (.0000)	.1751*** (.0420)
β_0	.0774 (.2858)	1.1958*** (.2536)	3.1638*** (.3102)	2.1853*** (.5071)	4.052*** (.0000)	-.1923 (.2689)
α_0	.0327*** (.0090)		.0733*** (.0075)	.0823*** (.0116)	.0473*** (.0000)	.1690** (.0827)
α_1					-.0292*** (.0000)	-.0226** (.0108)
α_2					.0678*** (.0000)	.0255* (.0133)
μ	-.1219	-.0807	-1.8682	-.7517	-1.9597	-.1427
σ_u^2	.0002	.0704	.0025	.0008	.5428	.0003
σ_v^2	.0453	8.61e-17	.0084	.0160	2.41e-16	.0472
Log likeli	29.2250	28.7609	69.7292	42.6737	23.1644	51.2145

Значимость оценок: «***» — на 1%, «**» — на 5%, «*» — на 10% уровнях

В [Таблице 2](#) представлены оценки параметров модели (1) для регионов каждой из пяти однородных групп и для всей совокупности 80 регионов. Оценки $TE_{it} = E(\exp\{u_{it}\} | v_{it} - u_{it})$ технической эффективности ([Kumbhakar, Lovell, 2004](#)) регионов, входящих в однородную группу, являются индикатором эффективности регионального управления, так как различие в уровне технической эффективности регионов однородной группы обусловлено тем, что регионы в разной степени используют доступные, сопоставимые в силу однородности, возможности развития. Однако, оценки технической эффективности для регионов из разных групп, не сопоставимы. Для того, чтобы сравнивать эффективность регионального управления регионов из разных однородных групп, эти оценки необходимо привести к сопоставимому виду. Авторами предложен и апробирован метод, позволяющий скорректировать оценки технической эффективности, полученные по общей для всех регионов модели так, чтобы их ранги соответствовали рангам оценок, полученных по модели, построенной для каждой однородной группы. Описание, теоретическое обоснование, результаты апробации метода и сопоставимые оценки технической эффективности представлены в работе ([Айвазян и др., 2018](#)).

Векторный базис $B_t = (\{l_{it}\}_i, \{te_{it}\}_i, \{s_{it}^1\}_i, \{s_{it}^2\}_i, \{dte_{it}\}_i)$ на временном отрезке $[t-1, t]$ включает пять компонент: l_{it} — масштаб экономики региона i в момент t ; te_{it} — сопоставимая оценка технической эффективности; s_{it}^1 — индекс отраслевой специализации; s_{it}^2 — индекс индустриализации; dte_{it} — тренд технической эффективности, $dte_{it} = te_{it} - te_{it-1}$. В качестве характеристики масштаба экономики далее рассматривается численность экономически активного населения. Сопоставимая оценка технической эффективности является характеристикой качества управления в долгосрочном периоде. Индекс отраслевой специализации и индекс индустриализации позиционируют регион в структуре ВРП. Тренд оценки технической эффективности является характеристикой качества управления в краткосрочном периоде.

2. О влиянии технической эффективности производства на экономические показатели региона

На основе данных Росстата сформирован набор показателей, характеризующих производство продуктов и услуг, а также отдельные характеристики качества жизни на временном отрезке 2010–2015 гг. (наименования показателей w_1 – w_{11} в [Таблице 3](#)). При формировании набора показателей качества жизни учитываются результаты исследований ([Volkova, 2017](#)). В этой работе на основе авторской методики оценки качества жизни с учетом субъективных характеристик и поведенческих аспектов индивидов показано, что качество жизни и удовлетворенность жизнью обусловлены, в основном, материальным благосостоянием. Для каждого показателя из [Таблицы 3](#) для каждого года t рассматриваемого периода построены регрессионные зависимости, в которых объясняемой переменной является значение показателя экономического развития, а объясняющими переменными – значения компонент векторного базиса. Для каждого показателя на основе анализа оценок параметров определены: значимость влияния каждого компонента векторного базиса; направление изменения базового показателя с ростом компонента векторного базиса; тенденция изменения влияния компонента векторного базиса на значение показателя. Результаты анализа представлены в [Таблице 3](#).

Таблица 3. Влияние компонент векторного базиса на показатели

	l	te	s1	s2	dte	R ²
w1: ВРП на душу	*** (+) ↓	** (+) ↑	*** (+) ↑	** (+) ↓	(+) ↑	0,7270
w2: Среднедушевые доходы	*** (-) ↔	** (+) ↔	*** (+) ↔	↔	** (+) ↑	0,6006
w3: Числ. населения с доходом ниже минимума	*** (-) ↔	↔	↔	*** (-) ↔	* (-) ↑	0,4444
w4: Состав населения по уровню образования	*** (+) ↔	*** (+) ↔	↓	*** (-) ↓	↔	0,3529
w5: Индекс производительности труда	↔	* (+) ↑	↑	↔	*** (+) ↑	0,2274
w6: Коэффициент миграционного прироста	*** (+) ↔	*** (+) ↓	*** (-) ↓	*** (+) ↔	↓	0,4482
w7: Уровень безработицы	* (-) ↑	↔	↔	*** (-) ↔	(-) ↑	0,4284
w8: Добыча полезных ископаемых	*** (+) ↔	↔	*** (+) ↔	↔	↔	0,4379
w9: Обрабатывающие производства	*** (+) ↔	* (+) ↓	↔	*** (+) ↓	↔	0,9118
w10: Сельскохозяйственные производства	*** (+) ↓	↑	↑	↔	↓	0,1683
w11: Производство электроэнергии, газа, воды	*** (+) ↔	↔	*** (+) ↔	↔	↑	0,9022

Обозначения, использованные в [Таблице 3](#).

*** — значимость бета-коэффициента на уровне не менее 10 % в четырех и более моделях;

** — значимость бета-коэффициента на уровне не менее 10 % в трех моделях;

* — значимость бета-коэффициента на уровне не менее 10 % в двух моделях последних лет;

(+) — значения бета-коэффициента для каждого года рассматриваемого периода имеют знак, при котором рост компонента векторного базиса приводит к росту значения показателя;

(-) — значения бета-коэффициента для каждого года рассматриваемого периода имеют знак, при котором рост компонента векторного базиса приводит к снижению значения показателя.

↑ — влияние роста компонента векторного базиса в направлении улучшения значения показателя повышается во времени;
 ↓ — влияние роста компонента векторного базиса в направлении улучшения значения показателя понижается во времени;
 ↔ — отсутствует тенденция изменения влияния роста компонента векторного базиса в направлении улучшения значения показателя;

В [Таблице 3](#) значения R^2 приведены для 2015 г. На семь показателей w_1 – w_6 и w_9 техническая эффективность и ее тренд в разной степени оказывает прямое влияние. Влияние технической эффективности на показатель w_1 вполне естественно, так как оценки технической эффективности формируются на основе производственной функции (1), в которой ВРП является зависимой переменной. Техническая эффективность оказывает прямое значимое влияние на показатели материального благосостояния w_2 среднедушевые доходы и w_6 коэффициент миграционного прироста. А также на характеристики рынка труда (w_4 состав населения по уровню образования, w_5 индекс производительности труда) и показатель сферы производства w_9 объем продукции обрабатывающих производств. Тренд технической эффективности влияет на показатели w_2 среднедушевые доходы, w_3 численность населения с доходами ниже величины прожиточного минимума и w_5 индекс производительности труда. *Полученные результаты не противоречат гипотезе о том, что техническая эффективность производства, как мера качества управления в долгосрочном периоде, и ее тренд, как мера качества управления в краткосрочном периоде, оказывают значимое влияние на показатели экономического развития региона. Характеристики структуры ВРП и масштаба экономики также оказывают значимое влияние на большинство рассмотренных показателей экономического развития. Это позволяет рассматривать векторный базис в качестве информационной основы для построения индикаторов различных направлений социально-экономического развития субъектов РФ.*

В результате анализа корреляционной матрицы расширенного набора 32 показателей сфер производства, материального благосостояния, рынка труда и качества жизни сформирована структура взаимосвязи 17 показателей социально-экономического развития, на которые компоненты векторного базиса оказывают прямое или косвенное влияние.

В дополнение к уже рассмотренным в [Таблице 3](#) показателям, на рис. 1 представлены еще шесть: w_0 ВРП, w_{12} расходы на душу населения, w_{13} коэффициент младенческой смертности, w_{14} количество умерших, w_{15} заболеваемость, w_{16} средний размер назначенных пенсий. На схеме в каждом прямоугольнике приведены обозначения и сокращенные названия показателей. Число в прямоугольнике — коэффициент корреляции показателей, связанных стрелкой, по данным 2015 г. В прямоугольниках, находящихся в верхней и нижней части схемы, указаны коэффициенты детерминации регрессионных зависимостей по данным 2015 г., в которых объясняемой переменной является указанный показатель, а объясняющими — компоненты векторного базиса.

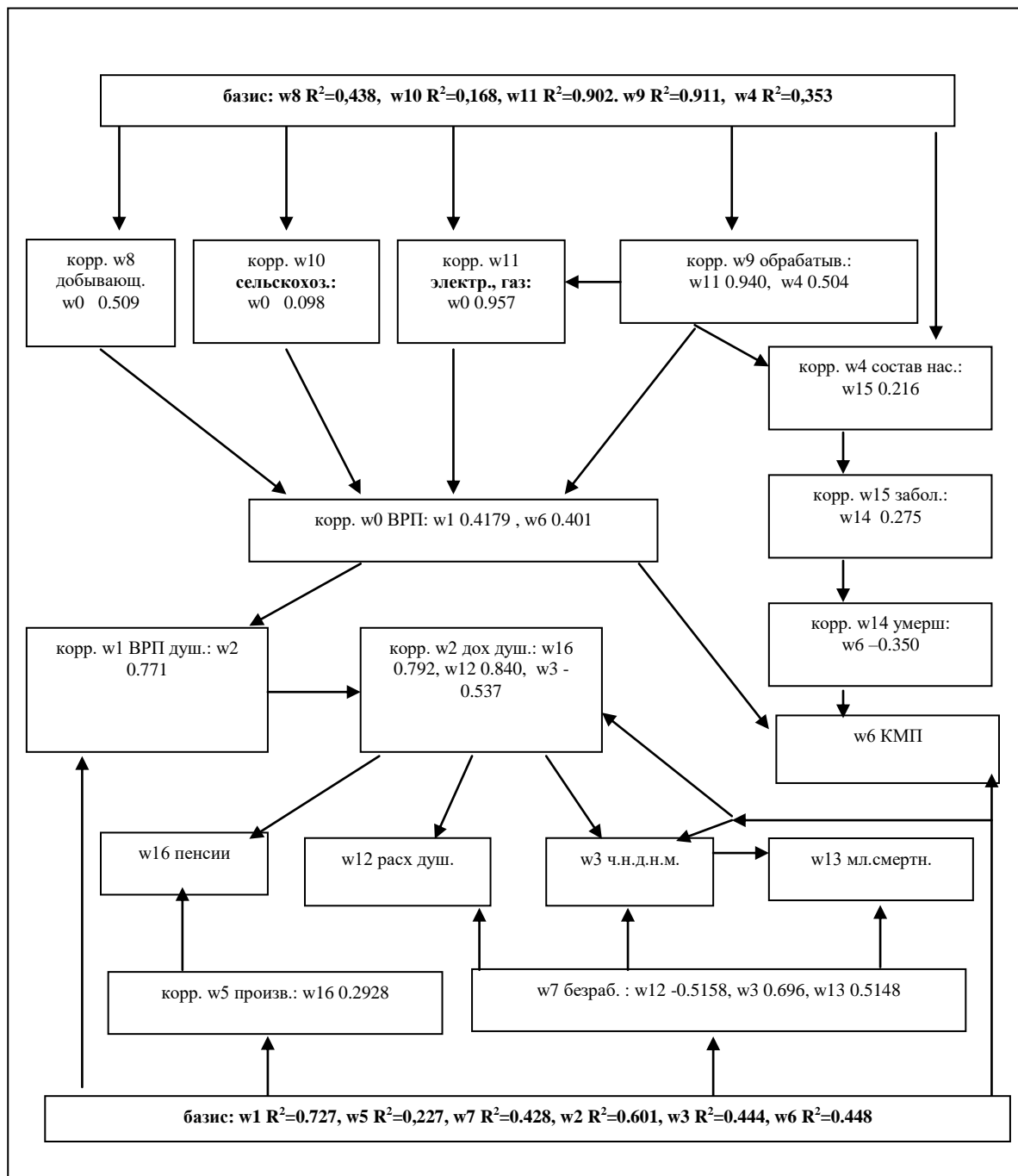


Рис. 1. Схема взаимосвязи, значимость и коэффициенты корреляции показателей

3. Формирование, на основе векторного базиса, индикатора по группе показателей, характеризующих направление экономического развития

Пусть $I^s(\gamma_t) = \sum_k \gamma_{tk} y_t^k$ – линейная комбинация показателей, характеризующих направление S социально-экономического развития регионов РФ, где y_t^k – вектор значений $\{y_{it}^k\}_i$ показателя k группы S для всей совокупности регионов i в момент t , $\gamma_t = \{\gamma_{tk}\}_k$ – вектор параметров. Пусть $IB^s(\delta_t) = \delta_{1t}l_{it-1} + \delta_{2t}s_{it-1}^1 + \delta_{3t}s_{it-1}^2 + \delta_{4t}te_{it-1} + \delta_{5t}dte_{it-1}$ – линейная комбинация компонент векторного базиса. Ставится задача определения значений параметров γ_t^*, δ_t^* , при которых вектора I^s и IB^s максимально коррелированы. То есть

$$(\gamma_i^*, \delta_i^*) = \arg \max_{(\gamma_i, \delta_i)} \text{corr}(I^s, IB^s).$$

В результате решения этой задачи методом компонентного анализа (способ решения представлен в работах [Hotelling, 1936](#); [Waugh, 1942](#)) для направления S строятся индикаторы $I^s(\gamma_i^*)$ и $IB^s(\delta_i^*)$. На их основе можно построить две группы индексов регионального развития по направлению S . Первая группа индексов – проекции на индикатор $I^s(\gamma_i^*)$ совокупности векторов $\{y_{ii}^k\}_k$ показателей направления S для каждого региона i . Вторая группа индексов – проекции на индикатор $IB^s(\delta_i^*)$ значений компонент векторного базиса для каждого региона. При достаточно высоком коэффициенте корреляции $\text{corr}(I^s(\gamma_i^*), IB^s(\delta_i^*))$, коэффициент ранговой корреляции этих индексов близок к единице. Поэтому *индексы регионов по индикатору $IB^s(\delta_i^*)$ могут быть использованы в качестве интегральных характеристик уровня развития региона в моделях макро- и мезоуровней, а также для построения рейтинга регионов по направлению S . Таким образом, векторный базис создает единую информационную основу для оценки взаимосвязи различных направлений социально-экономического развития регионов.*

Направление «производство товаров и услуг»

Рассмотрим направление 1 регионального развития «производство товаров и услуг» и пять показателей, характеризующих это направление: w1 – ВРП на душу; w8 – объем добычи полезных ископаемых; w9 – обрабатывающие производства; w10 – продукция сельского хозяйства; w11 – производство электричества, газа, воды. Коэффициенты \mathbf{R}^2 в регрессиях каждого из этих показателей на характеристики векторного базиса, приведены на [Рисунке 1](#). В следующей [Таблице 4](#) приведены оценки индикаторов направления, построенных на основе показателей и на основе характеристик векторного базиса по данным 2015 г. В столбце (1) – обозначения показателей, характеризующих направление 1. В столбце (2) – оценки параметров γ_i^* индикатора $I^1(\gamma_i^*)$. В столбце (3) – коэффициенты корреляции показателей и индикатора $I^1(\gamma_i^*)$. В столбце (4) – обозначения характеристик векторного базиса. В столбце (5) – оценки параметров δ_i^* индикатора $IB^1(\delta_i^*)$, построенного на основе векторного базиса. В столбце (6) – коэффициенты корреляции характеристик векторного базиса и индикатора $IB^1(\delta_i^*)$.

Таблица 5. Индикаторы направления «производство товаров и услуг»

П ¹	Индикатор в пространстве показателей		ИВ ¹	Индикатор в векторном базисе	
	(1)	(2)		(3)	(4)
w1	-1.462e-07	0.168	l	9.626e-04	0.994
w8	-3.172e-07	0.221	te	1.940e+03	0.211
w9	7.529e-07	0.967	s1	-5.212e-03	-0.192
w10	2.912e-06	0.388	s2	6.136e-03	0.324
w11	6.291e-06	0.931	dte	3.677e+03	0.064

На [Рисунке 2](#) точка описывает положение региона в пространстве индексов, формируемых по двум индикаторам. По оси абсцисс – значения индексов по индикатору $IB^1(\delta_i^*)$. По оси ординат – значения индексов по индикатору $I^1(\gamma_i^*)$. Коэффициент корреляции – 0.982. В правой верхней части рисунка выделяются регионы: г. Москва, Московская область, г. Санкт-Петербург, Краснодарский край. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен 0.956, что свидетельствует о высокой согласованности рангов, построенных на основе индикатора показателей направления «производство товаров и услуг» и соответствующего индикатора векторного базиса.

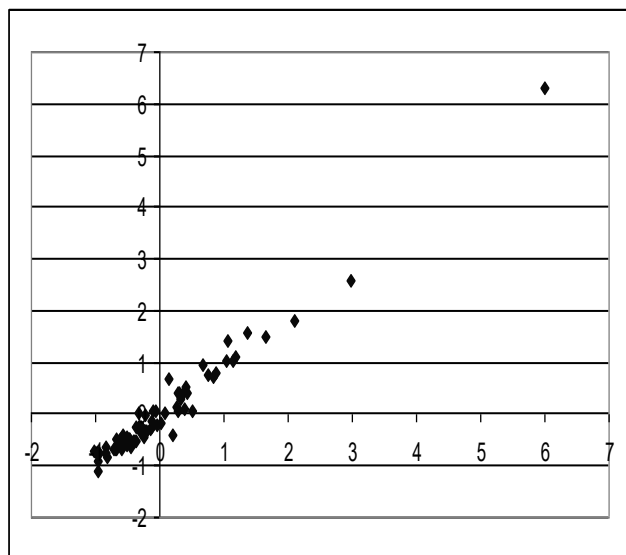


Рис. 2. Регионы в пространстве индикаторов направления «производство товаров и услуг»

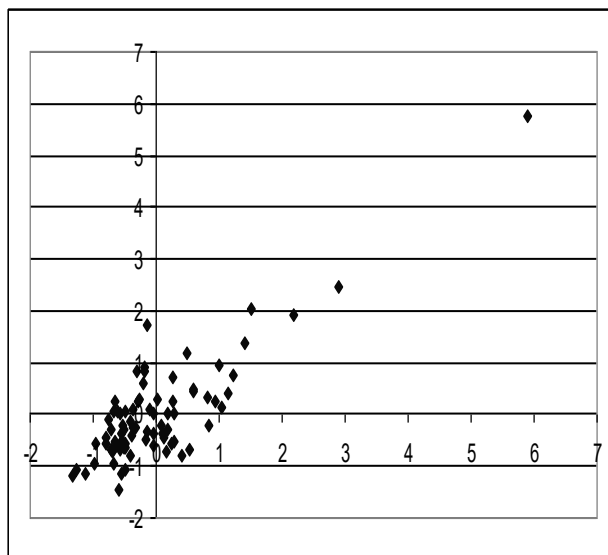


Рис. 3. Регионы в пространстве индикаторов направления «материальное благосостояние»

Направление «материальное благосостояние»

Рассмотрим направление 2 регионального развития «материальное благосостояние» и шесть показателя, характеризующих это направление: w_2 – среднедушевые доходы; w_3 – численность населения с доходами ниже величины прожиточного минимума; w_6 – коэффициент миграционного прироста; w_7 – уровень безработицы; w_{13} – коэффициент младенческой смертности; w_{16} – средний размер назначенных пенсий.

Таблица 6. Индикаторы направления «материальное благосостояние»

I^2	Индикатор в пространстве показателей		IB^2	Индикатор в векторном базисе	
w_2	0.00016	0.683	l	9.267e-04	0.956
w_3	0.07638	-0.532	te	1.147e+04	0.438
w_6	0.00985	0.610	s1	6.768e-03	0.042
w_7	-0.03792	-0.415	s2	-6.747e-04	0.279
w_{13}	-0.05507	-0.293	dte	8.758e+03	0.112
w_{16}	0.00033	0.187			

Коэффициент корреляции Пирсона векторных индикаторов $I^2(\gamma_i^*)$ и $IB^2(\delta_i^*)$ – 0.839. Все показатели, за исключением w_{16} – средний размер назначенных пенсий, значимы в составе индикатора $I^2(\gamma_i^*)$. Знаки коэффициентов корреляции соответствуют экономической теории. В составе индикатора векторного базиса $IB^2(\delta_i^*)$ компоненты s1 индекс отраслевой специализации и dte тренд технической эффективности незначимы. Значимость технической эффективности и масштаба экономики высокая. На [Рисунке 3](#) по оси абсцисс – значения индексов по индикатору $IB^2(\delta_i^*)$. По оси ординат – значения индексов по индикатору $I^2(\gamma_i^*)$. Коэффициент корреляции – 0.839. В правой верхней части [Рисунке 3](#) доминирующее положение занимают те же регионы, что на [Рисунке 2](#): г. Москва, Московская область, г. Санкт-Петербург, Краснодарский край. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена индикаторов $I^2(\gamma_i^*)$ и $IB^2(\delta_i^*)$ равен 0.611.

На [Рисунке 4](#) по оси абсцисс – индексы регионов по индикатору IV^1 направления «производство продуктов и услуг». По оси ординат – индексы регионов по индикатору IV^2 направления «материальное благосостояние». Коэффициент корреляции 0.953. На [Рисунке 5](#) по оси абсцисс – значения рангов по направлению «производство продуктов и услуг». По оси ординат – ранги по направлению «материальное благосостояние». Коэффициент корреляции 0.806.

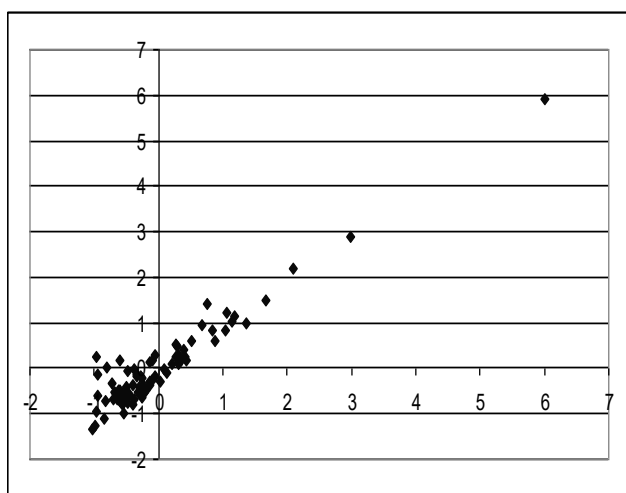


Рис. 4. Регионы в пространстве индексов: ось абсцисс – «производство продуктов и услуг», ось ординат – «материальное благосостояние»

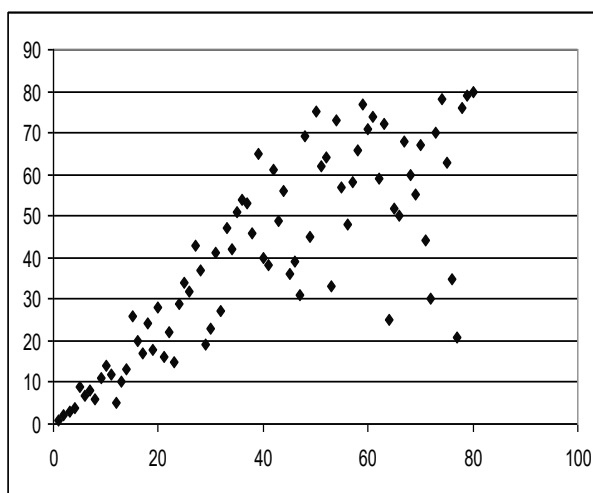


Рис. 5. Регионы в пространстве рангов: ось абсцисс – «производство продуктов и услуг», ось ординат – «материальное благосостояние»

Ранги четырех регионов по направлению «материальное благосостояние» совпадают с их высокими рангами по направлению «производство товаров и услуг»: г. Москва – 1, Московская область – 2, г. Санкт-Петербург – 3, Краснодарский край – 4. В верхней правой части рисунка два региона, замыкающие рейтинг по каждому направлению: Еврейская автономная область – 79 и Республика Калмыкия – 80. В нижней правой части [Рисунка 5](#) наблюдаются выделяющиеся из общей совокупности пять регионов. Это Камчатский край, Республика Саха (Якутия), Магаданская область, Сахалинская область, Чукотский автономный округ. Ранги этих регионов относительно слабо согласованы по направлениям «производство продуктов и услуг» и «материальное благосостояние». Их положение в рейтинге по направлению «материальное благосостояние» существенно выше положения в рейтинге «производство продуктов и услуг». Такое несоответствие может объясняться двумя обстоятельствами. Во-первых, индикатор по направлению «производство товаров и услуг» может давать заниженные оценки индексов для добывающих регионов, так как не учитывается природная рента. Кроме того, в указанных регионах, ввиду климатических особенностей, используются дополнительные меры материального стимулирования. Без учета этих пяти регионов коэффициент ранговой корреляции индикаторов двух направлений развития равен 0.911.

Индексы регионов, построенные на основе первых главных компонент показателей двух направлений, имеют коэффициент корреляции Пирсона 0.555, то есть слабо согласованы. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена – 0.719. Для рассмотренных в этой работе направлений регионального развития векторный базис обеспечивает более высокую согласованность индексов и рангов регионов, чем первые главные компоненты.

4. Заключение

Сформирован компонентный состав векторного базиса индикаторов социально-экономического развития субъектов РФ. В него включены пять характеристик: масштаб экономики, первые две компоненты структуры ВРП (индекс отраслевой специализации и

индекс индустриализации), техническая эффективность производства, как характеристика качества управления в долгосрочном периоде, и тренд технической эффективности, как характеристика качества управления в краткосрочном периоде. При оценке этих характеристик использованы теоретически обоснованные модели региональной дифференциации.

На основе данных Росстата за период с 2010 по 2015гг. показано, что характеристики векторного базиса значимы в регрессионных моделях, описывающих зависимость основных экономических показателей регионального развития от компонент векторного базиса.

На основе корреляционного анализа по данным 2015г. построена структура взаимосвязи основных показателей экономического развития региона, на которые компоненты векторного базиса оказывают прямое, или косвенное влияние. Сформированы группы показателей, характеризующих два направления социально-экономического развития субъектов РФ: «производство продуктов и услуг» и «материальное благосостояние».

Методом компонентного анализа по данным 2015 г. построены два индикатора направления «производство продуктов и услуг». Первый — в пространстве значений пяти показателей, характеризующих это направление: ВРП на душу; объем добычи полезных ископаемых; продукция обрабатывающих производств; продукция сельского хозяйства; производство электричества, газа, воды. Второй — в векторном базисе. Индексы регионов, рассчитанные по этим индикаторам, удовлетворяют заданному свойству: коэффициент корреляции индексов 0.982 — максимально возможный для данного набора показателей. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена 0.956.

По данным 2015 г. построены два индикатора направления регионального развития «материальное благосостояние». Первый — в пространстве значений шести показателей: среднедушевые доходы; численность населения с доходами ниже величины прожиточного минимума; коэффициент миграционного прироста; уровень безработицы; коэффициент младенческой смертности; средний размер назначенных пенсий. Второй — в векторном базисе. Максимальное значение коэффициента корреляции 0.839. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена 0.611.

Индексы регионов, построенные на основе первых главных компонент двух групп показателей, имеют коэффициент корреляции 0.555. Индексы регионов по индикаторам двух направлений, построенным в векторном базисе, имеют коэффициент корреляции 0.953. Коэффициенты ранговой корреляции Спирмена соответственно 0.719 и 0.806. Таким образом, для рассмотренных направлений регионального развития векторный базис позволяет обеспечить более высокую согласованность индексов и рангов регионов, чем первые главные компоненты.

Литература

[Айвазян и др., 2016а](#) – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. (2016а). Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП. *Прикладная эконометрика*. № 1 (41). С. 24–46.

[Айвазян и др., 2016б](#) – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Модели производственного потенциала и оценки технологической эффективности регионов РФ с учетом структуры производства. *Экономика и математические методы*, 2016, №1, с. 28–44.

[Айвазян и др., 2018](#) – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Метод сравнения регионов РФ по оценкам технической эффективности с учетом структуры производства. *Экономика и математические методы*, 2018, №1.

[Айвазян, 2012](#) – Айвазян С.А. *Анализ качества и образа жизни населения: эконометрический подход*. М., Наука, 2012.

[Кудряшова, 2008](#) – Кудряшова А.И. Влияние глобализации мировой экономики на формирование региональной экономической политики. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора экономических наук, М., РГТЭУ, 2008.

[Макаров и др., 2014](#) – Макаров В.Л., Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Бахтизин А.Р., Нанавян А.М. Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала, характеристик готовности к инновациям, уровня благосостояния и качества жизни населения. *Экономика региона*, 2014, № 4. С. 9–30.

[Hotelling, 1936](#) – *Hotelling H.* Relationships between Two Sets of Variables. *Biometrika*, 1936, 46, p. 321–377.

[Kumbhakar, Lovell, 2004](#) – *Kumbhakar S., Lovell K.* Stochastic Frontier Analysis. Cambridge U.P., 2004, p. 86.

[Robertson, 1992](#) – *Robertson R.* Globalization: Social Theory and Global Culture.L., 1992.

[Volkova, 2017](#) – *Volkova M.* Changes in Life Satisfaction. Is there a common tendency for Russians and Europeans? / The 26thInternational Scientific Conference on Economic and Social Development – “Building Resilient Society”, Zagreb, Croatia, 2017.

[Waugh, 1942](#) – *Waugh F.W.* Regression between Sets of Variates. *Econometrica*, 1942, 46, pp. 290–310.

References

[Aivazyan i dr., 2016a](#) – *Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Kudrov, A.V.* (2016a). Metod klasterizatsii regionov RF s uchetom otraslevoi struktury VRP [The method of clustering the regions of the Russian Federation taking into account the industrial structure of GRP]. *Prikladnaya ekonometrika*. № 1 (41). pp. 24–46.

[Aivazyan i dr., 2016b](#) – *Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Kudrov, A.V.* (2016). Modeli proizvodstvennogo potentsiala i otsenki tekhnologicheskoi effektivnosti regionov RF s uchetom struktury proizvodstva [Models of productive capacity and technological efficiency evaluations of regions of the Russian Federation concerning the output structure]. *Ekonomika i matematicheskie metody*, №1, pp. 28–44.

[Aivazyan i dr., 2018](#) – *Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Kudrov, A.V.* (2018). Metod sravneniya regionov RF po otsenkam tekhnicheskoi effektivnosti s uchetom struktury proizvodstva [The method of comparing the regions of the Russian Federation according to the estimates of technical efficiency, taking into account the structure of production]. *Ekonomika i matematicheskie metody*, №1.

[Ajvazjan, 2012](#) – *Ajvazjan, S.A.* (2012). Analiz kachestva i obraza zhizni naseleniya: ekonometricheskii podkhod [Analysis of quality and mode of life of the population: econometric approach]. M., Nauka. [in Russian]

[Hotelling, 1936](#) – *Hotelling, H.* (1936). Relationships between Two Sets of Variables. *Biometrika*, 46, pp. 321–377.

[Kudryashova, 2008](#) – *Kudryashova, A.I.* (2008). Vliyanie globalizatsii mirovoi ekonomiki na formirovanie regional'noi ekonomicheskoi politiki [The influence of the globalization of the world economy on the formation of regional economic policy]. Avtoreferat dissertatsii na soiskanie uchenoi stepeni doktora ekonomicheskikh nauk, M., RGTEU.

[Kumbhakar, Lovell, 2004](#) – *Kumbhakar, S., Lovell, K.* (2004). Stochastic Frontier Analysis. Cambridge U.P., P. 86.

[Makarov i dr., 2014](#) – *Makarov, V.L., Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Bakhtizin, A.R., Nanavyan A.M.* (2014). Otsenka effektivnosti regionov RF s uchetom intellektual'nogo kapitala, kharakteristik gotovnosti k innovatsiyam, urovnya blagosostoyaniya i kachestva zhizni naseleniya [The estimation of the regions' efficiency of the Russian federation including the intellectual capital, the characteristics of readiness for innovation, level of well-being, and quality of life]. *Ekonomika regiona*, № 4. pp. 9–30. [in Russian]

[Robertson, 1992](#) – *Robertson, R.* (1992). Globalization: Social Theory and Global Culture.L.

[Volkova, 2017](#) – *Volkova, M.* (2017). Changes in Life Satisfaction. Is there a common tendency for Russians and Europeans? *The 26thInternational Scientific Conference on Economic and Social Development* – “Building Resilient Society”, Zagreb, Croatia.

[Waugh, 1942](#) – *Waugh, F.W.* (1942). Regression between Sets of Variates. *Econometrica*, 46, pp. 290–310.

Индикаторы экономического развития регионов РФ в векторном базисе

Сергей Арутюнович Айвазян ^a, Михаил Юрьевич Афанасьев ^a,
Александр Владимирович Кудров ^{a, *}

^aЦентральный экономико-математический институт РАН (ЦЭМИ РАН),
Российская Федерация

Аннотация. Формируется и апробируется методологическая основа построения индикаторов основных направлений социально-экономического развития субъектов РФ. Новизна результатов определяется тем, что эти индикаторы строятся на основе общего векторного базиса. В структуре взаимосвязи основных показателей социально-экономического развития выделены две группы показателей, характеризующие различные направления экономического развития: «производство продуктов и услуг» и «материальное благосостояние». На основе векторного базиса построены два индикатора, каждый из которых максимально коррелирован с индикатором, сформированным на основе соответствующей группы показателей. Показано, что для рассмотренных направлений регионального развития векторный базис обеспечивает более высокую согласованность индексов и рангов регионов, чем первые главные компоненты.

Ключевые слова: региональная экономика, эконометрическое моделирование, проверка гипотез, индикаторы.

* Корреспондирующий автор

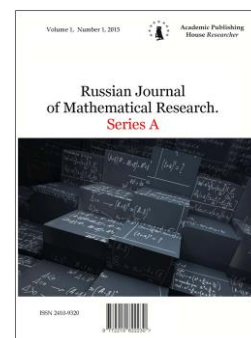
Адреса электронной почты: aivazian@cemi.rssi.ru (С.А. Айвазян),
miafan@cemi.rssi.ru (М.Ю. Афанасьев), kovlal@inbox.ru (А.В. Кудров)

Copyright © 2018 by Academic Publishing House Researcher s.r.o.



Published in the Slovak Republic
 Russian Journal of Mathematical Research. Series A
 Has been issued since 2015.
 E-ISSN: 2413-7529
 2018, 4(1): 15-18

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.15
www.ejournal30.com



An Infinite Number of Ways of Algebraic Factorization of a Number and Radical Solution of Higher Degree Polynomial Equations

Samuel Bonaya Buya ^{a, *}

^aTeacher Ngao Girls' secondary school, Kenya

Abstract

In this paper a method is proposed by which any number not equal to zero can have an infinite number of algebraic factorizations. A factorization method of radical solution of polynomial equations is then presented. The method provides radical solution of polynomial equations of degree than 4. As a demonstration the Bring-Jerrard quintic equation formula is derived by factorization.

Keywords: factorization of numbers; radical solution of higher degree polynomial equations; algebraic number theory.

1. Introduction

In number theory integer factorization is the decomposition of a composite number into a product of smaller integers. In this research factorization will be broadened to decomposition to algebraic numbers. The numbers that will be involved in factorization will include all categories of numbers with the exception of zero.

The factorization method has been used with some measure of success to solve some quadratic equations. This research examines the possibility of using the factorization method as a complete method of solving algebraic equations. This requires some re-examination at the process of factorizing numbers in general, symmetric equations in general and Galois Theory.

In this research a method of factorization will be presented in which a number can be factorized into n algebraic factors. The major aim of doing this is to first to make some contribution to algebraic number theory. As is quoted in Gauss sum Gedachtiniss (1856) by Sartorius von Waltershausen Variants: Mathematics is the queen of the sciences and number theory is the queen of mathematics.

In this research it will be shown that a number can be have infinite number of algebraic factors.

An identity will be proposed by which this can be achieved. This knowledge will be used to solve algebraic equations. It will also be used to demonstrate how we can easily obtain radical solution of the Bring-Jerrard quintic equation.

2. Methodology

Consider the number a , not equal to zero. The following identity can be used to factorize it:

* Corresponding author

E-mail addresses: sbonayab@gmail.com (S.B. Buya)

$$a = b^2 - (b^2 - a) = (b + \sqrt{(b^2 - a)})(b - \sqrt{(b^2 - a)}); a, b \in \mathbb{Q}$$

1

$$b + \sqrt{(b^2 - a)} = c^2 - (c^2 - (b + \sqrt{(b^2 - a)})) = (c + \sqrt{(c^2 - (b + \sqrt{(b^2 - a)}))})(c - \sqrt{(c^2 - (b + \sqrt{(b^2 - a)}))})$$

(2)

Take the case $a = 1$.

$$1 = (2^2 - (2^2 - 1)) = (2 + \sqrt{(2^2 - 1)})(2 - \sqrt{(2^2 - 1)})$$

$$1 = (3^2 - (3^2 - 1)) = (3 + \sqrt{(3^2 - 1)})(3 - \sqrt{(3^2 - 1)})$$

$$1 = (101^2 - (101^2 - 1)) = (101 + \sqrt{(101^2 - 1)})(101 - \sqrt{(101^2 - 1)});$$

$$(101 + \sqrt{(101^2 - 1)}) = 5^2 - (5^2 - (101 + \sqrt{(101^2 - 1)}))$$

$$= (5 + \sqrt{5^2 - (101 + \sqrt{(101^2 - 1)})})(5 - \sqrt{5^2 - (101 + \sqrt{(101^2 - 1)})})$$

$$= (7 + \sqrt{7^2 - (101 + \sqrt{(101^2 - 1)})})(7 - \sqrt{7^2 - (101 + \sqrt{(101^2 - 1)})}), \dots$$

In the above example 1 is divisible to $(2 + \sqrt{(2^2 - 1)}); (2 - \sqrt{(2^2 - 1)}); (3 + \sqrt{(3^2 - 1)}); (101 + \sqrt{(101^2 - 1)})$ and so on. The number 1 is divisible to infinite number of algebraic numbers.

From equation 1 the a number a is divisible to some infinite set of algebraic numbers, $b + \sqrt{(b^2 - a)}$

The above identity 1 has application in solving polynomial equations

Example 1

Solve the quadratic equation $x^2 + 2x + 6 = 0$ by factorization

Solution

$$6 = (\frac{2}{2})^2 - (-5) = (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)})(\frac{2}{2} - \sqrt{(-5)})$$

$$2 = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}$$

$$x_{1,2} = -(\frac{2}{2} \pm \sqrt{(-5)})$$

Example 2

Solve the cubic equation $x^3 + 2x + 6 = 0$ by factorization

Solution

$$6 = (\frac{2}{2})^2 - (-5) = (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)})(\frac{2}{2} - \sqrt{(-5)})$$

$$(\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}) = (\frac{2}{4})^2 - ((\frac{2}{4})^2 - (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}))$$

$$= (\frac{2}{4} + \sqrt{((\frac{2}{4})^2 - (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}))})(\frac{2}{4} - \sqrt{((\frac{2}{4})^2 - (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}))})$$

$$6 = (\frac{2}{4} + \sqrt{((\frac{2}{4})^2 - (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}))})(\frac{2}{4} - \sqrt{((\frac{2}{4})^2 - (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}))})(\frac{2}{4} - \sqrt{((\frac{2}{4})^2 - (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}))})$$

$$x_{1,2} = (\frac{2}{4} \pm \sqrt{((\frac{2}{4})^2 - (\frac{2}{2} + \sqrt{(-5)}))})$$

$$x_3 = \frac{6}{x_1 x_2}$$

Example 4

Solve the Bring-Jerrard quintic equation $x^5 + bx + c = 0$

Solution

$$\begin{aligned}
 c &= (b/2)^2 - ((b/2)^2 - c) = (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})(b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - c}): \\
 (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c}) &= ((b/4)^2 - ((b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})) \\
 &= (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})})(b/4 - \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c}): \\
 b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})} &= ((b/8)^2 - ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})) \\
 &= (b/8 + ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))(b/8 - ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c}))) : \\
 b/8 + ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})) & \\
 &= ((b/16)^2 - ((b/16)^2 - (b/8 + ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))) \\
 &= (b/16 + \sqrt{(((b/16)^2 - (b/8 + ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))))) \times \\
 (b/16 - \sqrt{(((b/16)^2 - (b/8 + ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))))) : \\
 x_1 &= -(b/16 + \sqrt{(((b/16)^2 - (b/8 + ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))))) \\
 x_2 &= -(b/16 - \sqrt{(((b/16)^2 - (b/8 + ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))))) \\
 x_3 &= -(b/16 + \sqrt{(((b/16)^2 - (b/8 - ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))))) \\
 x_4 &= -(b/16 - \sqrt{(((b/16)^2 - (b/8 - ((b/8)^2 - (b/4 + \sqrt{(b/4)^2 - (b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c})))))) \\
 x_5 &= -\frac{c}{x_1 x_2 x_3 x_4}
 \end{aligned}$$

The above solution method can be extended to the general quintic equation and higher degree polynomial equations.

3. Conclusion

A number can be decomposed into algebraic factors in an infinite number of ways. The factorization method is a candidate method of solving algebraic equations.

Higher degree polynomial equations have radical solution.

References

[Adamchik, 2003](#) – Adamchik, V.S. (2003). Polynomial transformations of Tschirnhaus, Bring and Jerrard. *ACM SIGSAM Bulletin*, 37.3: 90-94.

[Buya, 2014](#) – Buya, S.B. (2014). A Formula for Solving General Quintics: A Foundation for Solving General Polynomials of Higher Degrees. *Open Science Repository Mathematics open-access*: e23050495.

[Buya, 2017](#) – Buya, S.B. (2017). Simple Algebraic proofs of Fermat's Last Theorem. *Advances in Applied Science Research*, 60-64.

[Cajori, 1991](#) – Cajori, F. (1991). A history of mathematics. *Amer. Math. Journal*.

[Dickson, 2014](#) – *Dickson, L.* (2014). Algebraic theories. Courier Corporation.

[Gauss, 1966](#) – *Gauss, C.F.* (1966). Disquisitiones arithmeticae. Vol. 157. Yale University Press.

[Jordan, 1870](#) – *Jordan, C.* (1870). Traite des substitutions et des equations algebriques par m. Camille Jordan. Gauthier-Villars.

[Motlotle, 2011](#) – *Motlotle, E.T.* (2011). The Bring-Jerrard quintic equation, its solution and a formula for the universal gravitational constant. uir.unisa.ac.za, 1-108.

[Rosen, 1995](#) – *Rosen, M.I.* (1995). Niels Hendrik Abel and equations of the fifth degree. *The American mathematical monthly*, 102.6, 495-505.

[Struik, 1967](#) – *Struik, D.J.* (1967). A concise history of mathematics. Courier Dover Publication.

[Struik, 2012](#) – *Struik, D.J.* (2012). A concise history of mathematics. Courier Corporation.

[Thomae, 1869](#) – *Thomae, J.* (1869). Beitrag zur Bestimmung von... $(0, 0, \dots, 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 71, 201-222.

[Van der Waerden, 2013](#) – *Van der Waerden, B.L.* (2013). A history of algebra: from al-Khwārizmī to Emmy Noether. Springer Science & Business Media.

[Young, 1885](#) – *Young, G.P.* (1885). Solution of Solvable irreducible quintic Equations, without the Aid of a Resolvent Sextic. *American Journal Of Mathematics*, Vol. 7, No. 2, pp. 170–177.

Copyright © 2018 by Academic Publishing House Researcher s.r.o.



Published in the Slovak Republic
 Russian Journal of Mathematical Research. Series A
 Has been issued since 2015.
 E-ISSN: 2413-7529
 2018, 4(1): 19-22

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.19
www.ejournal30.com



Disproof of the Riemann Hypothesis

Samuel Bonaya Buya ^{a, *}

^aNgao girls' secondary school, Kenya

Abstract

In this research Riemann hypothesis is investigated for a proof. A functional extension of the Riemann zeta function is proposed for which non trivial zeroes can be generated. It found that non trivial zeroes can also be generated outside the critical strip. Thus it is found that the Riemann hypothesis is found to be incomplete.

Keywords: disproof of Riemann hypothesis, Gamma function, number theory.

1. Introduction

In mathematics a Dirichlet series is any series of the form $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ where s is a complex number and a_n is a complex sequence. These series play an important role in analytic number theory. The Riemann zeta function $\zeta(s)$, analytically continues the sum of the Dirichlet series. The Riemann zeta function is given by:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

The Riemann zeta function also can be defined by the integral

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} x^{s-1} dx \wedge \Gamma s = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

The Riemann's functional equation is given by:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

The functional equation shows that the Riemann zeta function has trivial zeroes at negative even integer values of s . It is postulated that any non-trivial zeroes lie in the open strip $\{s \in \mathbb{Z} : 0 < \text{Re}(s) < 1\}$ Riemann hypothesis asserts that for any non trivial zero s has $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

In 1914, Godfrey Harold Hardy proved that $\zeta(\frac{1}{2}, it)$ has infinitely many zeroes.

Could it be possible that the Riemann zeta function could have infinitely many zeroes outside the critical strip? Could there be functional extensions of the Riemann zeta function that can generate non trivial zeroes?

* Corresponding author

E-mail addresses: sbonayab@gmail.com (S.B. Buya)

Many constructions of the gamma function have been proposed. The gamma function has been defined in the Euler integral of the second kind:

$$\Gamma s = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

The same gamma function has been defined in infinite products due to Euler and has been found to be valid for all complex numbers except for non-positive integers. The product definition of the gamma function is given by:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{1}{nz}}$$

The gamma function has been given a Weierstrass's definition. It has been expressed in terms of the generalized Laguerre polynomials. In terms of Euler's reflection formula the gamma function has been defined as:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

The Riemann zeta function should have functional extensions that can generate the same results and more as the original function. In this paper a product extension of the function is proposed for generating the non trivial zeroes of the Riemann zeta function.

2. Results

Functional extensions of the Riemann zeta function that generates the non-trivial zeroes of the Riemann hypothesis

The family of functions 1 in variable x and primes p below will be will be examined

$$f(x, p) = (x^2 + (p-x)^2)^{(1/2)} = x(1 + \frac{(p-x)^2}{x^2})^{1/2}$$

1

The algebraic solution $f(x, p) = (x^2 + (p-x)^2)^{(1/2)} = 0$ will be examined.

$$f(x, p) = (x^2 + (p-x)^2)^{(1/2)} = 0 \rightarrow$$

$$2x^2 - 2px + p^2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{4p \pm \sqrt{4p^2 - 8p^2}}{4} = p \pm ip$$

2

An extension of the function in \mathbf{Z} will be considered. There are many different ways representing such a function. One way is given in 3 below:

$$g(x, p) = (x^2 + (p-x)^2)^{(1/2)} (x^2 + (p-x)^2)^{mx}$$

3

There is a justification of integrating the function 3 in an extension of the Riemann -zeta function for non-trivial zeroes. This because:

$$g(0, p) = (0^2 + (p-0)^2)^{(1/2)} (0^2 + (p-0)^2)^{0,m} = p$$

4

The function 3 can therefore be adopted in the Riemann zeta function to obtain a possible extension that can be used to account for the non trivial zeroes of the Riemann zeta function.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{n^s} = \prod_{j=1}^{j=\infty} \frac{1}{1-p_j^{-s}}$$

$$if : p_j^s(x, p_j) = (x^2 + (p_j - x)^2)^{(1/2)} (x^2 + (p_j - x)^2)^{imx}$$

$$\zeta(s, x) = \prod_{j=1}^{j=\infty} \frac{1}{1 - (x^2 + (p_j - x)^2)^{-\left(\frac{1}{2} + imx\right)}}$$

$$\zeta(s, x) = \prod_{j=1}^{j=\infty} \frac{(x^2 + (p_j - x)^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + (p_j - x)^2)^{imx}}{(x^2 + (p_j - x)^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + (p_j - x)^2)^{imx} - 1} \rightarrow$$

$$\zeta(s, x) = \prod_{j=1}^{j=\infty} \frac{(x^2 + (p_j - x)^2)^{\frac{1}{2} + imx}}{(x^2 + (p_j - x)^2)^{\frac{1}{2} + imx} - 1} \rightarrow \zeta(s, 0) = \prod_{i=1}^{i=\infty} \frac{p_j}{p_j - 1}$$

$$\zeta(s, x) = 0 \rightarrow (x^2 + (p_j - x)^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + (p_j - x)^2)^{imx} = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{4p_j \pm \sqrt{4p_j^2 - 8pj^2}}{4} = p_j \pm ip_j$$

$$\rightarrow s = \frac{1}{2} \mp m(p_j + ip_j)$$

In the above function extension of the Riemann zeta function a trivial zero is obtained whenever $s = \frac{1}{2} \mp m(p_j + ip_j)$. The real part of s in this case is given by $\text{Re}(s) = \frac{1}{2} \mp mp_j$

The function 3 above is a case of disproof of Riemann hypothesis.

In an paper entitled “An elegant and short proof of Riemann hypothesis” the author used the above function to come up with some special general case in which Riemann hypothesis could be verified. He showed that $\zeta(\frac{1}{2}, it)$ has infinitely many zeroes. There are cases however (as in the above) in which Riemann hypothesis can be disproved. The Riemann zeta function can also have infinitely many non trivial zeroes outside the critical strip. Thus the hypothesis is disproved.

3. Conclusion

Non trivial zeroes can be generated outside the critical strip. Riemann hypothesis is incomplete.

References

- [Academia](https://www.academia.edu/s/64be58f17c/a-simple-proof-of-legendres-conjecture?source=link) – [Electronic resource] (n.d.). Retrieved from <https://www.academia.edu/s/64be58f17c/a-simple-proof-of-legendres-conjecture?source=link>
- [Bertrand, 1845](#) – *Bertrand, J.* (1845). Memoire Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on y permute les lettres qu'elle renferm. *Journal de l'Ecole Royale Polytechnique, Cahier*, 30, Vol. 18, 123-140.
- [Buya, 2018](#) – *Buya, S.B.* (2018). An elegant and short proof of Goldbach conjecture. *African Journal of Mathematics and computer science Research*.
- [Riemann, Gesammelte, 1859](#) – *Riemann, B., Gesammelte W.* (1859). Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse. *Ges. Math. Werke Und Wissenschaftlicher Nacchlab*, 2, 145-155.
- [Caceres](#) – *Caceres, P.* (n.d.). A new approach to prime numbers. *Differences*, 1051, 0.
- [e Silva, 2014](#) – *e Silva, T.H.* (2014). Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to 4-1018. *Math, Comput.*, 83(288), 2033-2060.
- [Helfgott, 2013](#) – *Helfgott, H.* (2013). The ternary Goldbach conjecture is true. *arXiv preprint arXiv.1312.7748*.

[Jing-Run, 1984](#) – *Jing-Run, C.* (1984). On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *In Goldbach conjecture*, 253-272.

[Ricardo, 2005](#) – *Ricardo, H.J.* (2005). Golbach's conjecture implies Bertrand's postulate. *Amer. Math. Monthly Journal*, 112.6, 492.

[Shi, 2003](#) – *Shi, K.* (2003). The proof of Prove Goldbach Conjecture, Twin Primes Conjecture and Other Two Propositions. *arXiv preprint math/0309103*.

[Sinisalo, 1993](#) – *Sinisalo, M.K.* (1993). Checking Golbach conjecture upto $4 \cdot 10^{11}$. *Math. Comp.* 61: 931–934.

[Wang, 2002](#) – *Wang, Y.* (2002). The Goldbach Conjecture. *World scientific*, Vol. 4.

[Weiststeien, a](#) – *Weisstein, E.W.* (n.d.). Chebyshev's Theorem. Retrieved January 29, 2018, from [http://mathworld.wolfram.com/Chebyshev's Theorem.html](http://mathworld.wolfram.com/Chebyshev's%20Theorem.html)

[Weiststeien, b](#) – *Weiststeien, E.W.* (n.d.). Goldbach conjecture. MathWorld – AWolfram. Retrieved 11 22, 2017, from <http://mathworld.wolfram.com/GoldbachConjecture.html>

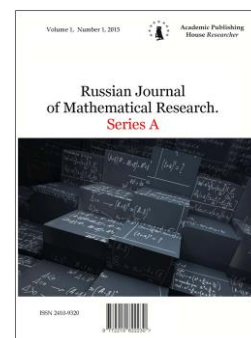
[Zhou](#) – *Zhou, P.* (n.d.). A proof of strong Goldbach conjecture and twin prime conjecture.

Copyright © 2018 by Academic Publishing House Researcher s.r.o.



Published in the Slovak Republic
 Russian Journal of Mathematical Research. Series A
 Has been issued since 2015.
 E-ISSN: 2413-7529
 2018, 4(1): 23-30

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.23
www.ejournal30.com



Mathematical Modeling of Fractal Financial System in Computer Environment Scilab

E.A. Gafurova ^{a, *}, R.I. Parovik ^a

^aVitus Bering Kamchatka State University, Russian Federation

Abstract

The mathematical model of a fractal financial system that takes into account the effects of heredity or memory is considered. This mathematical model is a Cauchy problem in which the model equation is a system of differential equations with derivatives of fractional orders. Using a numerical algorithm based on the theory of finite-difference schemes, an approximate solution of the proposed model was obtained. A numerical algorithm was implemented in a computer program in the language of Scilab, with the help of which the phase trajectories of the fractal financial system were constructed. It is shown that if fractal properties are taken into account, chaotic regimes can exist even in dynamical systems of dimension less than three.

Keywords: fractal financial system, mathematical model, Scilab, numerical algorithm, phase trajectories.

1. Введение

Многие исследователи стали акцентировать свое внимание на эредитарных динамических системах в экономике (Makarov, Parovik, 2016; Самута и др., 2012; Шпилько и др., 2012) и, в частности, в финансовой системе (Chen, 2008). Напомним, что свойство эредитарности динамической системы означает зависимость текущего его состояния от конечного числа предшествующих ему состояний. Такие системы описываются интегро-дифференциальными уравнениями с разностными ядрами – функциями памяти. Если функции памяти степенные, то интегро-дифференциальные уравнения можно записать в терминах дифференциальных уравнений дробных порядков. Порядки дробных производных могут быть связаны с фрактальными свойствами системы или среды и их можно оценить с помощью экспериментальных данных.

2. Результаты

Постановка задачи. Фрактальная финансовая система представляет собой модель, представленная в виде системы дифференциальных уравнений с производными дробных порядков и начальными условиями (задача Коши) (Petras, 2011):

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{\alpha_1} x(\eta) &= z(t) + (y(t) - a)x(t), \\
 D_{0+}^{\alpha_2} y(\eta) &= 1 - by(t) - x(t)^2, \\
 D_{0+}^{\alpha_3} z(\eta) &= -x(t) - cz(t), \\
 x(0) &= x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0
 \end{aligned} \tag{1}$$

* Corresponding author

E-mail addresses: eiza09@mail.ru (E.A. Gafurova), romanparovik@gmail.com (R.I. Parovik)

где a – сумма сбережений, b – затраты на инвестиции, c – эластичность спроса на коммерческий рынок, x_0, y_0, z_0 – начальные состояния системы (1), заданные константы, дробные производные в (1) понимаются в смысле Римана-Лиувилля (Petras, 2011); порядки которых изменяются в диапазоне $0 < q_1, q_2, q_3 < 1$. Отметим, что система (1) является обобщением классической финансовой системы (Ma, Chen, 2001), а в случае, когда $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ она с ней совпадает.

Модель (1) описывает изменение во времени трех состояний переменных: процентная ставка $x(t)$, инвестиционный спрос $y(t)$, индекс цен $z(t)$. Факторы, влияющие на изменение $x(t)$, в основном происходят из двух аспектов: во-первых, это противоречие инвестиционного рынка, избыток инвестиций и сбережений; во-вторых, это корректировка структуры от цен на товары. Изменение скорости $y(t)$ пропорционально скорости инвестиций и пропорционально инверсии со стоимостью инвестиций, а также интересам ставок. Изменения $z(t)$, с одной стороны, контролируются противоречием между предложением и спрос на коммерческом рынке, а с другой стороны, под влиянием инфляции.

Отметим, что все эти параметры взаимосвязаны с помощью дифференциальных уравнений с операторами дробных производных, что приводит к нелокальности по времени – зависимости значений этих параметров в текущий момент времени от предыдущих значений. Такие уравнения эквивалентны уравнениям с запаздыванием (Куликов, Куликов, 2015).

Отметим, что в классическая динамическая система обладает хаотическими режимами (Ma, Chen, 2001). В нашей работе мы покажем, что с помощью математического и компьютерного моделирования такие режимы могут возникать в эредитарных динамических системах.

Математическая модель (1) является нелинейной, поэтому мы можем найти только ее численное решение. Операторы Римана-Лиувилля можно аппроксимировать дискретными аналогами – производными Грюнвальда-Летникова (Petras, 2011), что дает возможность получить нелокальную численную схему, имеющую вид:

$$\begin{aligned} x(t_k) &= \left(z(t_{k-1}) - (y(t_{k-1}) - a)x(t_{k-1}) \right) h^{q_1} - \sum_{j=1}^k c_j^{(q_1)} x(t_{k-j}), \\ y(t_k) &= \left(1 - by(t_k) - x^2(t_k) \right) h^{q_2} - \sum_{j=1}^k c_j^{(q_2)} y(t_{k-j}), \\ z(t_k) &= \left(-x(t_k) - cz(t_{k-1}) \right) h^{q_3} - \sum_{j=1}^k c_j^{(q_3)} z(t_{k-j}). \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр $Tsim$ – время моделирования, $k = 1, 2, 3, \dots, N$, для $N = [Tsim / h]$, h – шаг равномерной расчетной сетки и $(x(0), y(0), z(0))$ является начальной точкой (начальные условия). Биномиальные коэффициенты $c_j^{(q_i)}, i = 1, 2, 3$, которые вычисляются по формуле:

$$c_0^{(q_i)} = 1, c_j^{(q_i)} = \left(1 - \frac{1 + q_i}{j} \right) c_{j-1}^{(q_i)}. \quad (3)$$

Заметим, что численная схема (2) является системой алгебраических нелинейных уравнений, решение которой дает численное решение исходной математической модели (2). Реализация схемы (2) была осуществлена в компьютерной системе моделирования Scilab, которая находится в свободном доступе.

Алгоритм реализации в Scilab. Была создана функция FOFinanc() в среде Scilab, которая реализует численное решение математической фрактальной модели финансовой системы (2). Приведем код этой функции.

```
function [T, Y]=FOFinanc(parameters, orders, TSim, Yo)
```



```

% в качестве аргументов передаем
% параметры parameters: a=parameters(1); b=parameters(2); c=parameters(3);
% порядки orders: q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3);
% время вычисления TSim
% начальные условия Y0: x(1)=Y0(1); y(1)=Y0(2); z(1)=Y0(3);
% на выходе получаем
% время T --- массив от 0 до TSim с шагом моделирования h
% Y=[y(:,1), y(:,2), y(:,3)]=[x(t); y(t); z(t)] --- координаты траектории
% состояния в трехмерном пространстве состояний
h=0.04166;% шаг моделирования --- по условию задания постоянный
% число шагов по времени --- это время моделирования поделить на шаг и округлить:
n=round(TSim/h); %из входных данных присваиваем значения порядков производных
вектор q:
q1=orders(1); q2=orders(2); q3=orders(3); % из входных данных присваиваем значения
параметров --- констант финансовой системы
a=parameters(1); b=parameters(2); c=parameters(3); % вычисление биномиальных
коэффициентов:
cp1=1; cp2=1; cp3=1;% это начальные значения - первая часть формулы (3)
for j=1:n% цикл по времени
% расчет новых значений коэффициентов по второй части формулы (3)
c1(j)=(1-(1+q1)/j)*cp1;% при q=1
c2(j)=(1-(1+q2)/j)*cp2;% при q=2
c3(j)=(1-(1+q3)/j)*cp3;% при q=3
cp1=c1(j); cp2=c2(j); cp3=c3(j);%обновляем переменные новыми значениями
коэффициентов
end
%из входных данных присваиваем значения начальных условий
x(1)=Y0(1); y(1)=Y0(2); z(1)=Y0(3);
% расчет численного решения --- траекторий для фазового портрета
for i=2:n% цикл по времени
%расчет по формуле (2)
% мемо возвращает суммы из (2)
x(i)=(z(i-1)+(y(i-1)-a)*x(i-1))*h^q1 - мемо(x, c1, i);% абсцисса новой точки траектории
состояния
y(i)=(1-b*y(i-1)-x(i)^2)*h^q2 - мемо(y, c2, i);%ордината новой точки траектории
состояния
z(i)=(-x(i)-c*z(i-1))*h^q3 - мемо(z, c3, i);%аппликата новой точки траектории состояния
end
for j=1:n% собираем координаты точек траектории в один массив для удобства
Y(j,1)=x(j); Y(j,2)=y(j); Y(j,3)=z(j);
end
% время T --- массив от 0 до TSim с шагом моделирования h --- чтобы
% определить, какие точки траектории какому моменту времени соответствуют
T=0:h:TSim;
end function

```

Вспомогательная функция мемо () имеет вид:

```
function [yo] = мемо(r, c, k)
```

%вычисляет сумму yo произведений биномиальных коэффициентов на координаты точек траектории

%входные данные:

% r --- массив координат точек траектории (ордината x, абсцисса y или аппликата z)

% c --- массив биномиальных коэффициентов (с1 для x, с2 для y, с3 для z)

% k --- номер шага по времени, до которого накапливаем сумму

%(передается номер текущего шага моделирования)

temp = 0;% это переменная для накопления суммы, инициализируем нулем

```

for j=1:k-1% накопление суммы
temp = temp + c(j)*r(k-j);
end
yo = temp;% помещаем накопленную сумму в выходной аргумент
endfunction

```

Результаты моделирования. Рассмотрим примеры работы, приведенного выше алгоритма.

Пример 1. (Классическая модель финансовой системы). Рассмотрим следующие значения параметров: $a = 1$; $b = 0.1$ и $c = 1$; $q_1 = q_2 = q_3 = 1$; вектор начальных условий $(1, -1, 1)$, время моделирования $T_{Sim} = 200$.

Вызываем функцию `FOFinanc()`:

```
[t, y]=FOFinanc([1 0.1 1],[1 1 1],200, [1 -1 1]).
```

Координаты траектории обозначаются следующим образом:

```
y=[y(:,1), y(:,2), y(:,3)]=[x(t); y(t); z(t)].
```

Далее определяются состояния в трехмерном пространстве состояний. Строим 3-мерный график, который представлен на рисунке 1:

```
subplot(121)
param3d(y(:,1), y(:,2), y(:,3),'k');
xlabel('x(t)'); ylabel('y(t)'); zlabel('z(t)')
```

В данном отрывке кода мы строим 2-мерный график, подписываем оси и включаем сетку на графике. Выводим второй график, который представлен на рисунке 2:

```
subplot(122)
plot(y(:,1), y(:,2),'k');
```

Далее представлена траектория состояния, проецируемая на плоскость $x - y$.

Подписываем оси и также включаем сетку на графике:

```
xlabel('x(t)');
ylabel('y(t)').
```

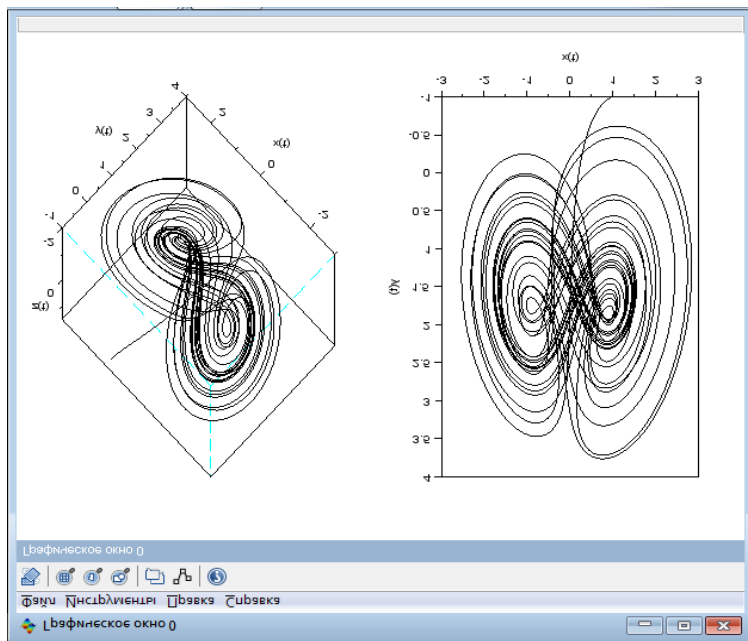


Рис. 1. Фазовые траектории для Примера 1

Мы можем увидеть, что на рис. 1 фазовая траектория представляет собой хаотический аттрактор, похожий на аттрактор Лоренца (Petras, 2011). Возникает вопрос будет ли существовать хаотический аттрактор в случае обобщения классической модели, ведь для существования хаотического аттрактора в классических нелинейных динамических системах необходимо, чтобы размерность системы была больше трех?

Пример 2. Рассмотрим случай, фрактальной финансовой системы для следующих значений параметров:

a) $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 0.8$, b) $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 0.6$,

c) $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 0.4$, d) $q_1 = 1, q_2 = 1, q_3 = 0.2$.

Остальные параметры возьмем из Примера 1. Результаты моделирования приведены на [Рисунке 2](#).

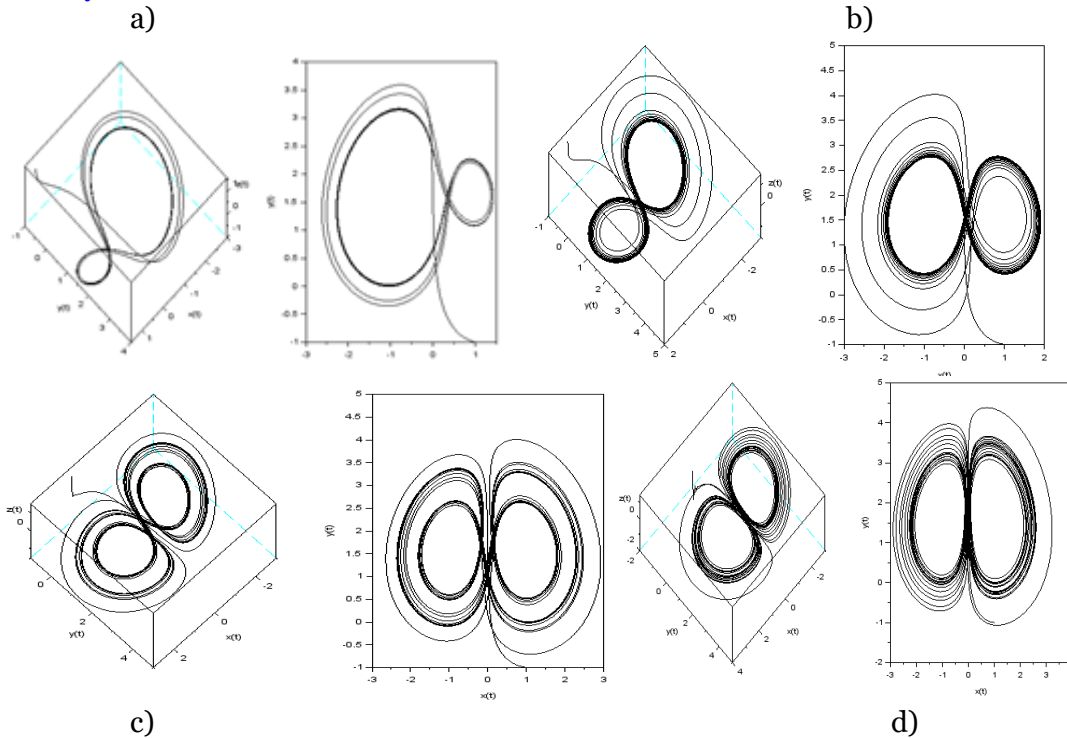


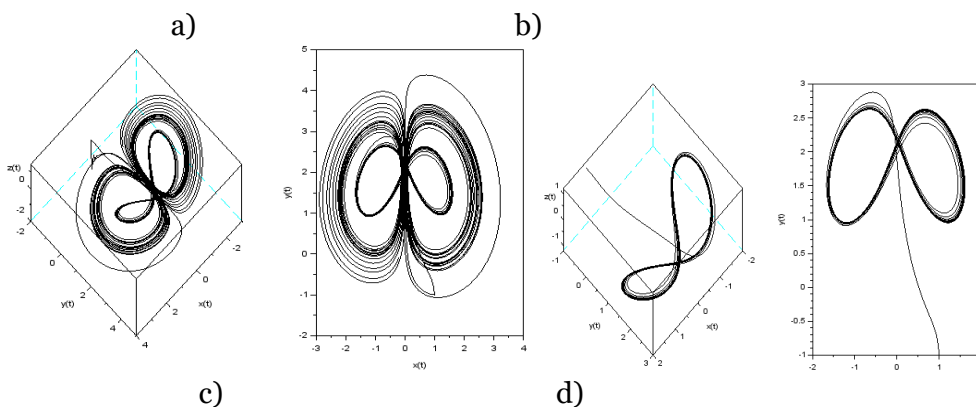
Рис. 2. Фазовые траектории при параметрах $q_1=1, q_2=1$: a) $-q_3=0.8$, b) $-q_3=0.6$, c) $-q_3=0.4$, d) $-q_3=0.2$

Из [Рисунка 2](#) представлены фазовые траектории в пространстве и на плоскости мы видим, что имеет место хаотический аттрактор, несмотря на то, что система (2) имеет размерность меньше трех.

Пример 3. Рассмотрим следующие значения дробных порядков:

a) $q_1 = 1, q_2 = 0.8, q_3 = 1$, b) $q_1 = 1, q_2 = 0.6, q_3 = 1$, c) $q_1 = 1, q_2 = 0.4, q_3 = 1$, d) $q_1 = 1, q_2 = 0.2,$

$q_3 = 1$. На [Рисунке 3](#) приведены результаты моделирования.



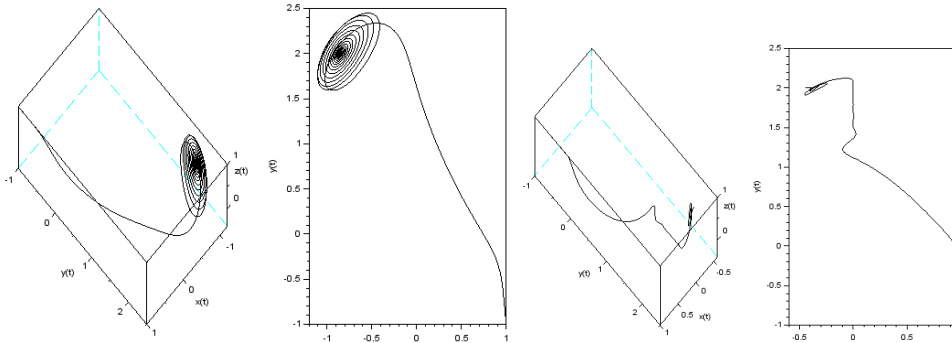


Рис. 3. Фазовые траектории при значениях параметров: $q_1=1, q_3=1$: а) - $q_2=0.8$, б) - $q_2=0.6$, с) - $q_2=0.4$, д) - $q_2=0.2$

Мы также видим на [Рисунке 3](#) эволюцию хаотического аттрактора вплоть до его разрушения (рис 3д).

Пример 4. Рассмотрим следующие значения дробных порядков:

а) $q_1 = 0.8, q_2 = 1, q_3 = 1$, б) $q_1 = 0.6, q_2 = 1, q_3 = 1$, с) $q_1 = 0.4, q_2 = 1, q_3 = 1$, д) $q_1 = 0.2, q_2 = 1, q_3 = 1$. Результаты моделирования приведены на [Рисунке 4](#).

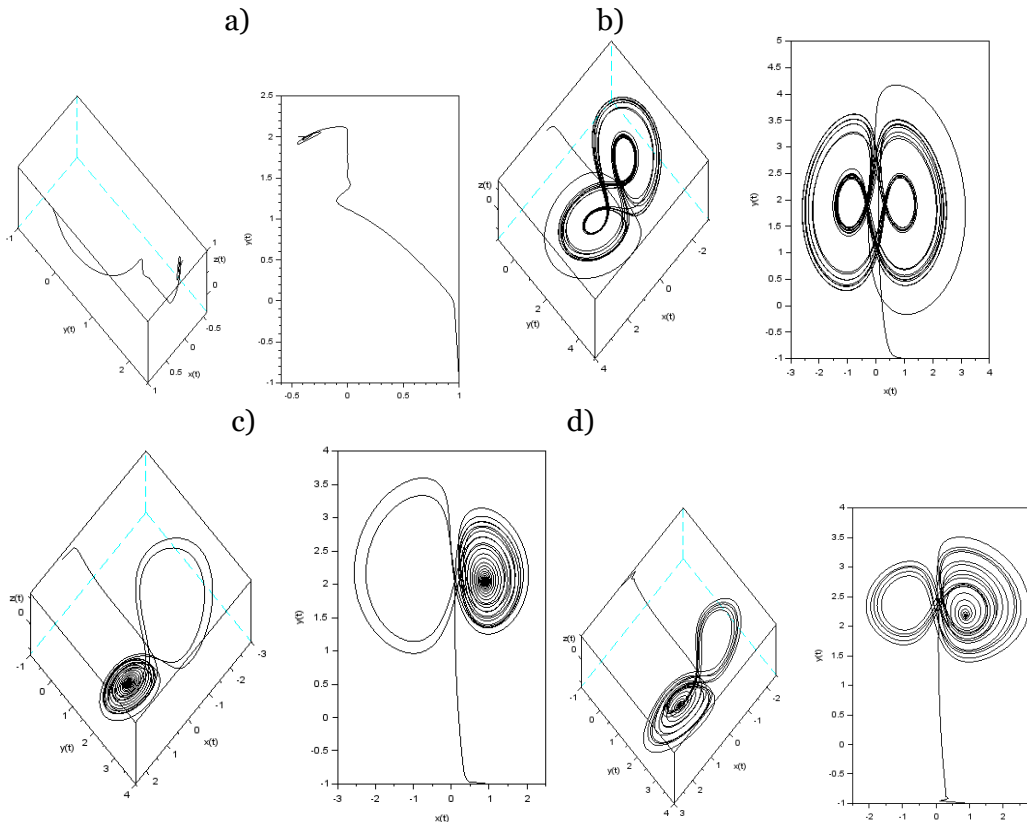


Рис. 4. Фазовые траектории при значениях параметров: $q_2=1, q_3=1$: а) - $q_1=0.8$, б) - $q_1=0.6$, с) - $q_1=0.4$, д) - $q_1=0.2$

Здесь мы видим зарождение хаотического аттрактора рис. 4а и дальнейшее его развитие.

3. Заключение

В работе была исследована следующая задача: провести исследования существования хаотического режима фрактальной финансовой системы. С помощью численного метода, основанного на аппроксимации дробных производных в смысле Римана-Лиувилля дискретными производными Грюнвальда-Летникова была построена нелокальная конечно-

разностная схема, которая была реализована в компьютерной среде Scilab. Были написаны функции реализующие численные решения задачи Коши (2) и построены фазовые траектории в пространстве и на плоскости. Показано, что хаотические аттракторы могут существовать во фрактальных финансовых системах даже, если их размерность меньше трех.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ №МК-1152.2018 и НИР «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

Литература

[Куликов, Куликов, 2015](#) – Куликов А.Н., Куликов Д.А. Эффект запаздывания и экономические циклы // *Таврический вестник информатики и математики*. 2015. №2(27). С. 89-101.

[Самута и др., 2012](#) – Самута В.В., Стрелова В.А., Паровик Р.И. Нелокальная модель неоклассического экономического роста Солоу // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2012. № 2(5). С. 37-41.

[Шпилько и др., 2012](#) – Шпилько Я.Е., Соломко А.А., Паровик Р.И. Параметризация уравнения Самуэльсона в модели Эванса об установлении равновесной цены на рынке одного товара // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2012. Т. 5. № 2. С. 33-36.

[Chen, 2008](#) – *Chen W.Ch.* Nonlinear dynamic and chaos in a fractional-order financial system // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2008. vol. 36. pp. 1305–1314.

[Ma, Chen, 2001](#) – *Ma J.H., Chen Y.S.* Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2001. vol. 22, no. 11, pp. 1240–1251.

[Makarov, Parovik, 2016](#) – *Makarov D.V., Parovik R.I.* Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // *Journal of Internet Banking and Commerce*. 2016. vol. 21. no. S6.

[Petras, 2011](#) – *Petras I.* Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media, 2011.

References

[Chen, 2008](#) – *Chen, W.Ch.* (2008). Nonlinear dynamic and chaos in a fractional-order financial system. *Chaos, Solitons and Fractals*. vol. 36. pp. 1305–1314.

[Kulikov, Kulikov, 2015](#) – *Kulikov, A.N., Kulikov, D.A.* (2015). Effekt zapazdyvaniya i ekonomicheskie tsikly [The effect of delay and economic cycles]. *Tavricheskii vestnik informatiki i matematiki*. №2(27). pp. 89-101. [in Russian]

[Ma, Chen, 2001](#) – *Ma, J.H., Chen, Y.S.* (2001). Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system. I *Applied Mathematics and Mechanics*. vol. 22, no. 11, pp. 1240–1251.

[Makarov, Parovik, 2016](#) – *Makarov, D.V., Parovik, R.I.* (2016). Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus. *Journal of Internet Banking and Commerce*. vol. 21. no. S6.

[Petras, 2011](#) – *Petras, I.* (2011). Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media.

[Samuta i dr., 2012](#) – *Samuta, V.V., Strelowa, V.A., Parovik, R.I.* (2012). Nelokal'naya model' neoklassicheskogo ekonomicheskogo rosta Solou [Nonlocal model of the neoclassical economic growth of Solow]. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki*. № 2(5). pp. 37-41. [in Russian]

[Shpil'ko i dr., 2012](#) – *Shpil'ko, Ya.E., Solomko, A.A., Parovik, R.I.* (2012). Parametrizatsiya uravneniya Samuel'sona v modeli Evansa ob ustanovleniya ravnovesnoi tseny na rynke odnogo tovara [Parametrization of the Samuelson equation in the Evans model of establishing an equilibrium price in the single commodity market]. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki*. Т. 5. № 2. pp. 33-36. [in Russian]

Математическое моделирование фрактальной финансовой системы в компьютерной среде Scilab

Э.А. Гафурова ^{а, *}, Р.И. Паровик ^а

^а Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, Российская Федерация

Аннотация. В работе рассмотрена математическая модель фрактальной финансовой системы, которая учитывает эффекты эредитарности или памяти. Эта математическая модель представляет собой задачу Коши, в которой модельные уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений с производными дробных порядков. С помощью численного алгоритма, основанного на теории конечно-разностных схем, было получено приближенное решение предложенной модели. Численный алгоритм был реализован в компьютерной программе на языке Scilab, с помощью которой производились построения фазовых траекторий фрактальной финансовой системы. Показано, что в случае учета фрактальных свойств, могут существовать хаотические режимы даже в динамических системах размерности меньше трех.

Ключевые слова: фрактальная финансовая система, математическая модель, Scilab, численный алгоритм, фазовые траектории.

* Корреспондирующий автор

Адреса электронной почты: eiza09@mail.ru (Э.А. Гафурова), romanparovik@gmail.com (Р.И. Паровик)

Copyright © 2018 by Academic Publishing House Researcher s.r.o.



Published in the Slovak Republic
 Russian Journal of Mathematical Research. Series A
 Has been issued since 2015.
 E-ISSN: 2413-7529
 2018, 4(1): 31-37

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.31
www.ejournal30.com



On the Possibility of Sequestration of Basic Variables In Solving Some Problems of Linear Programming

Irina L. Makarova ^{a,*}, Viktor I. Samarin ^a

^a Sochi State University, Russian Federation

Abstract

Examples of solving by the simplex method some linear programming problems in which it is possible to improve the algorithm for reducing computations are considered.

Keywords: linear programming problem, basic variables of a linear equations system, introduction of new restrictions on the admissible solutions domain.

1. Введение

Суть задачи линейного программирования (ЗЛП) – нахождение экстремального/оптимального значения линейной целевой функции в условиях линейных ограничений на область допустимых решений задачи. Соответствующие ограничения задаются определенной системой неравенств и уравнений, формирующих выпуклое множество многомерного пространства возможных значений управляемых переменных. Алгоритм симплекс-метода предполагает сведение математической модели задачи к системе уравнений с помощью введения вспомогательных (балансных/уравновешивающих или искусственных) неизвестных.

В ряде задач линейного программирования возникает необходимость последовательного введения в исходную модель новых ограничений (например, в задачах, анализирующих устойчивость решений ЗЛП, а также в задачах целочисленного линейного программирования). При этом увеличивается число базисных неизвестных. Для учета влияния на оптимальное значение целевой функции нового ограничения можно, не решая задачу заново, использовать уже решенную задачу, добавив это ограничение к полученной ранее оптимальной симплекс-таблице, записав его в базисе этой таблицы и продолжить решение, используя двойственный симплекс-метод. При этом можно воспользоваться и модифицированным симплекс-методом.

2. Результаты

Рассмотрим для примера решение задачи целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП).

Традиционно при решении ЗЦЛП используется два основных метода решения: метод ветвей и границ (МВГ) и метод сечений Гомори (МС) (Конюховский, 2001; Вагнер, 1973; Косоруков, Мищенко, 2003; Красс, Чупрынов, 2001; Соколов, 2017). В обоих методах сначала решается, так называемая, непрерывная или ослабленная задача, в которой переменные не обязательно целочисленны. Затем, в МВГ вся допустимая область делится на две части,

* Corresponding author

E-mail addresses: ratton@mail.ru (I.L. Makarova), visamarin@mail.ru (V.I. Samarin)

в каждой из которых опять решается непрерывная задача, и т.д. такое деление будет продолжаться для той части допустимой области, в которой решение задачи будет «лучше», всякий раз оглядываясь на оставленные ветви. Процесс заканчивается либо определением целочисленного решения, либо установлением его отсутствия. При решении ЗЦЛП методом сечений на каждом шаге от допустимой области «отрезается» некоторая её часть, не содержащая целочисленных решений. Таким образом, проводимое сечение в МС (по своей сути – гиперплоскость), и проводимые два сечения (две гиперплоскости) в МВГ отсекают от многомерного выпуклого пространства допустимых решений такие подпространства, в которых сохранены все целочисленные значения управляемых переменных задачи.

На [Рисунке 1](#) иллюстрируются оба метода решений. Исходные ограничения здесь отмечены номерами в кружках, а дополнительные – в квадратах. Заштрихованные области исключаются из дальнейшего рассмотрения.

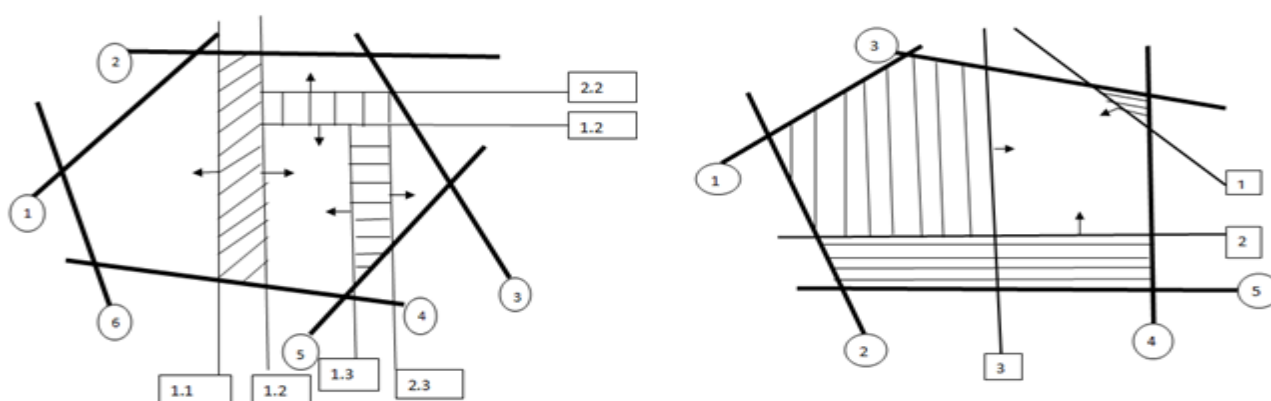


Рис. 1. Иллюстрация методов решения ЗЦЛП: слева – МВГ; справа – МС

Деление допустимой области на части или её усечение осуществляется с помощью включения дополнительных ограничений. Практически к уже решенной симплекс-методом непрерывной задаче добавляют дополнительное ограничение, т.е. строку в симплекс-таблице, и продолжают решение двойственным симплекс-методом. Можно предположить, что выполняя эти действия неоднократно, в исходной задаче появится множество ограничений, а симплекс-таблица станет огромной. В МС предусматривается исключение «отработавших своё» ограничений ([Конюховский, 2001](#)). Другими словами, строка симплекс-таблицы, в которой вспомогательная переменная приняла неотрицательное значение, может быть вычеркнута из таблицы, поскольку найденное решение получено уже в подпространстве, которое находится внутри по отношению к предыдущему. Ни одно описание МВГ ([Вагнер, 1973](#); [Косоруков, Мищенко, 2003](#); [Красс, Чупрынов, 2001](#); [Соколов, 2017](#)) такой процедуры не предполагает. Поэтому, естественно, возникло желание применить аналогичный способ сокращения симплекс-таблицы в МВГ. Начнем с примера.

Пример 1. Решить ЗЦЛП методом ветвей и границ.

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \leq 24, & \begin{cases} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \end{cases} & \{x_1, x_2\} \in Z - \text{целые числа,} \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13, \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Решение

1) Опустим понятные вспомогательные преобразования и приведем сразу симплекс-таблицу решения непрерывной задачи. Переменные $x_3 \geq 0$ и $x_4 \geq 0$ – это вспомогательные переменные.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	x_3	8	-3	1	0	24
	x_4^*	3	2	0	1	13
	F	-1	-1*	0	0	0
1	x_3	17/2	0	1	3/2	87/2
	x_2	3/2	1	0	1/2	13/2
	F	1/2	0	0	1/2	-13/2

$$x^*(0; 13/2), F_{max} = 13/2.$$

2) Разбиение допустимой области на две части приводит к решению двух задач, дополнительные ограничения для которых имеют вид:

Задача 1.1: $x_2 \leq 6$ и Задача 2.1: $x_2 \geq 7$. Здесь и далее первая цифра будет всегда обозначать 1-ю или 2-ю задачи, а вторая цифра – номер шага деления. Задача 2.1 оказывается неразрешимой (ложная ветвь).

3) Решение задачи 1.1. $x_5 \geq 0$ – вспомогательная переменная.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	x_3	17/2	0	1	3/2	0	87/2
	x_2	3/2	1	0	1/2	0	13/2
	x_5^*	-3/2	0	0	-1/2	1	-1/2
	F	1/2*	0	0	1/2	0	-13/2
2	x_3	0	0	1	-4/3	17/3	122/3
	x_2	0	1	0	0	1	6
	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	1/3
	F	0	0	0	1/3	1/3	-19/3

$$x^*(1/3; 6), F_{max} = 19/3.$$

Уже здесь строка с базисной переменной x_3 может быть удалена из дальнейшего рассмотрения, но мы пока оставим её в покое и только проследим за ней.

4) Продолжим разбиение и получим:

Задача 1.2: $x_1 \leq 0$

и

Задача 2.2: $x_1 \geq 1$.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
2	x_3	0	0	1	-4/3	17/3	0	122/3	
	x_2	0	1	0	0	1	0	6	
	x_1	1	0	0	1/3	-2/3	0	1/3	
	x_6^*	0	0	0	-1/3	2/3	1	-1/3	
	F	0	0	0	1/3*	1/3	0	-19/3	
	3	x_3	0	0	1	0	3	-4	42
x_2		0	1	0	0	1	0	6	
x_1		1	0	0	0	0	1	0	
x_4		0	0	0	1	-2	-3	1	
F		0	0	0	0	1	1	-6	
2		x_3	0	0	1	-4/3	17/3	0	122/3
	x_2	0	1	0	0	1	0	6	
	x_1	1	0	0	1/3	-	2/3	0	1/3
	x_6^*	0	0	0	1/3	-	2/3	1	-2/3
	F	0	0	0	1/3	1/3*	0	-19/3	
	3	x_3	0	0	1	3/2	0	17/2	35
x_2		0	1	0	1/2	0	3/3	5	
x_1		1	0	0	0	0	1	1	
x_5		0	0	0	-1/2	1	-3/2	1	
F		0	0	0	1/2	0	1/2	-6	

$$x^*(0; 6), F_{max} = 6$$

$$x^*(1; 5), F_{max} = 6$$

Что можно сказать про «оставленную в покое» строку? Она доставила нам лишние расчеты, никак не влияя на дальнейшее решение, поскольку эта строка не могла оказаться

разрешающей. На **Рисунке 2**, иллюстрирующем решение примера 1, это ограничение соответствует исходному ограничению, помеченному 1 в кружке. Таким образом, данная строка могла быть исключена из рассмотрения уже после первого шага.

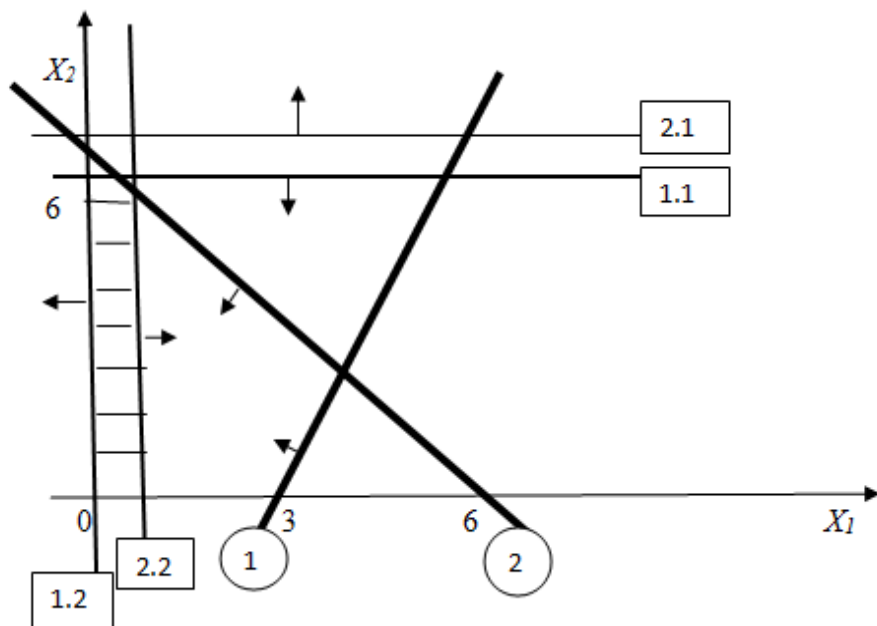


Рис. 2. Иллюстрация примера 1

Рассмотрим другой пример, пример 2:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 110, \\ 11x_1 - 3x_2 - x_4 = 24, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_5 = 15, \end{cases}$$

Переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 должны быть целыми.

$$F(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

Решение

1) Опустим вспомогательные действия и покажем только исходную и итоговую симплекс-таблицы решения непрерывной задачи.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	x_3	9	4	1	0	0	0	0	110
	x_6^*	11	-3	0	-1	0	1	0	24
	x_7	2	-7	0	0	1	0	1	15
	F	-7	-1	0	0	0	0	0	0
	G	-13*	10	0	1	1	0	0	39
....									
4	x_5	0	71/9	2/9	0	1	0	-1	85/9
	x_1	1	4/9	1/9	0	0	0	0	110/9
	x_4	0	71/9	11/9	1	0	-1	0	994/9
	F	0	19/9	7/9	0	0	0	0	-770/9

$$x^* \left(\frac{110}{9}; 0; 0; \frac{994}{9}; \frac{85}{9} \right), F_{\max} = 770/9$$

Переменные x_6 и x_7 (искусственные переменные) и функция G - вспомогательная целевая функция вводились в решение для получения начального допустимого базисного решения исходной задачи и после его определения могут быть исключены из дальнейшего

рассмотрения, а индексы 6 и 7 могут быть использованы для других вспомогательных переменных.

2) Разобьем допустимую область: Задача 1.1: $x_5 \leq 9$ и Задача 2.1: $x_5 \geq 10$.

Задача 2.1 оказывается не разрешимой, решение задачи 1.1 приведено ниже.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
4	x_5	0	71/9	2/9	0	1	0	85/9
	x_1	1	4/9	1/9	0	0	0	110/9
	x_4	0	71/9	11/9	1	0	0	994/9
	x_6^*	0	-71/9	-2/9	0	0	1	-4/9
	F	0	19/9*	7/9	0	0	0	-770/9
5	x_5	0	0	0	0	1	1	9
	x_1	1	0	7/71	0	0	4/71	866/71
	x_4	0	0	1	1	0	1	110
	x_2	0	1	2/71	0	0	-9/71	4/71
	F	0	19/9	51/71	0	0	19/71	-6066/71

$$x^* \left(12 \frac{14}{71}; \frac{4}{71}; 0; 110; 9 \right), F_{max} = 6066/71$$

Была добавлена одна строка, но ни одна не может быть исключена, так как все базисные переменные являются основными и должны быть целыми.

3) Разбиваем допустимую область дальше: Задача 1.2: $x_1 \leq 12$ и

Задача 2.2: $x_1 \geq 13$. Задача 2.2. не разрешима, а решение задачи 1.2 имеет вид.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
5	x_5	0	0	0	0	1	1	0	9
	x_1	1	0	7/71	0	0	4/71	0	866/71
	x_4	0	0	1	1	0	1	0	110
	x_2	0	1	2/71	0	0	-9/71	0	4/71
	x_7^*	0	0	-7/71	0	0	-4/71	1	-14/71
	F	0	19/9	51/71	0	0	19/71*	0	-6066/71
6	x_5	0	0	-7/4	0	1	0	71/4	11/2
	x_1	1	0	0	0	0	0	1	12
	x_4	0	0	-3/4	1	0	0	71/4	213/2
	x_2	0	1	1/4	0	0	0	9/4	1/2
	x_6	0	0	7/4	0	0	1	-71/4	7/2
	F	0	0	1/4	0	0	0	19/4	-169/2

Здесь опять оставим строку с базисной переменной x_6 , чтобы показать её ненужность.

4) Разбиваем допустимую область дальше: Задача 1.3: $x_2 \leq 0$ и

Задача 2.3: $x_2 \geq 1$. Задача 2.3. не разрешима, а решение задачи 1.3 имеет вид.

№	б.п.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
6	x_5	0	0	-7/4	0	1	0	71/4	0	11/2
	x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	12
	x_4	0	0	-3/4	1	0	0	71/4	0	213/2
	x_2	0	1	1/4	0	0	0	9/4	0	1/2
	x_6	0	0	7/4	0	0	1	-71/4	0	7/2

	x_8^*	0	0	-1/4	0	0	0	-9/4	1	-1/2
	F	0	0	1/4*	0	0	0	19/4	0	-169/2
7	x_5	0	0	0	0	1	0	71/4	-7	9
	x_1	1	0	0	0	0	0	1	0	12
	x_4	0	0	0	1	0	0	71/4	-3	108
	x_2	0	1	0	0	0	0	9/4	1	0
	x_6	0	0	0	0	0	1	-71/4	7	0
	x_3	0	0	1	0	0	0	9	-4	2
	F	0	0	0	0	0	0	5/2	1	-84

$$x^*(12; 0; 2; 108; 9), F_{max} = 84$$

Из решения видно, что оставленная строка могла быть удалена из рассмотрения на предыдущем шаге. Заметим при этом, что максимальное количество строк в симплекс-таблице не превышает количества переменных, которые должны быть целочисленны.

3. Заключение

Приведенные примеры позволяют сделать вывод о том, что, решая ЗЦЛП методом ветвей и границ, симплекс-таблицы могут быть сокращены за счет удаления «отработавших» своё строк. Таким образом, в описании МВГ можно добавить замечание: *строка, в которой вспомогательная переменная приняла неотрицательное значение, может быть вычеркнута из таблицы.*

Литература

- Вагнер, 1973** – Вагнер Г. Основы исследования операций. М.: Изд-во «МИР», Т.2, 1973. 488 с.
- Конюховский, 2001** – Конюховский П.В. Математические методы исследования операций: Учебное пособие. Спб: Питер, 2001. 192 с.
- Косоруков, Мищенко, 2003** – Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций: Учебник // Под общ. ред. Н.П.Тихомирова. М: Изд-во «Экзамен», 2003. 448 с.
- Красс, Чупрынов, 2001** – Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело, 2001. 688 с.
- Соколов, 2017** – Соколов Г.А. Линейные целочисленные задачи оптимизации: учебное пособие. М.: ИНФРА-М, 2017. 132 с.

References

- Konyukhovskii, 2001** – Konyukhovskii, P.V. (2001). Matematicheskie metody issledovaniya operatsii [Mathematical methods of operations research]: Uchebnoe posobie. Spb: Piter, 192 p. [in Russian]
- Kosorukov, Mishchenko, 2003** – Kosorukov, O.A., Mishchenko, A.V. (2003). Issledovanie operatsii [Investigation of operations]: uchebnik. Pod obshch. red. N.P. Tikhomirova. M: Izd-vo «Ekzamen», 448 p. [in Russian]
- Krass, Chuprynov, 2001** – Krass, M.S., Chuprynov, B.P. (2001). Osnovy matematiki i ee prilozheniya v ekonomicheskom obrazovanii [Fundamentals of mathematics and its applications in economic education]: uchebnik. M.: Delo, 688 p. [in Russian]
- Sokolov, 2017** – Sokolov, G.A. (2017). Lineinye tselochislennye zadachi optimizatsii [Linear integer optimization problems]: uchebnoe posobie. M.: INFRA-M, 132 p. [in Russian]
- Vagner, 1973** – Vagner, G. (1973). Osnovy issledovaniya operatsii [Fundamentals of operations research]. M.: Izd-vo «MIR», T.2, 488 p. [in Russian]

О возможности секвестирования базисных переменных при решении некоторых задач линейного программирования

Ирина Леонидовна Макарова ^{a, *}, Виктор Иванович Самарин ^a

^a Сочинский государственный университет, Российская Федерация

Аннотация. Рассмотрены примеры решения симплекс-методом некоторых задач линейного программирования, в которых возможно усовершенствование алгоритма, позволяющее сократить расчеты.

Ключевые слова: задача линейного программирования, базисные переменные системы линейных уравнений, введение новых ограничений на область допустимых решений.

* Корреспондирующий автор

Адреса электронной почты: ratton@mail.ru (И.Л. Макарова), visamarin@mail.ru (В.И. Самарин)

Copyright © 2018 by Academic Publishing House Researcher s.r.o.



Published in the Slovak Republic
 Russian Journal of Mathematical Research. Series A
 Has been issued since 2015.
 E-ISSN: 2413-7529
 2018, 4(1): 38-47

DOI: 10.13187/rjmr.a.2018.1.38
www.ejournal30.com



Specification Scheme of the Stochastic Production Function for Assessment of Technical Efficiency of the Regions in the Russian Federation

Victoria A. Rudenko ^{a,*}

The Central Economic Mathematical Institute (CEMI RAS), Russian Federation

Abstract

We propose a method of specification of stochastic production function models for solving problems related to the ranking of objects by the level of technical efficiency at production-regional level. The described method takes into account potential dependence between the random components of the error.

Based on actual data on 80 sub-federal units of the Russian Federation grouped according to the basic characteristics of the GRP structure, an empirical analysis of the influence of possible dependence of the error components on the values of regions' technical efficiency was carried out in accordance with the developed specification scheme. The main types of problems where it is possible to use the premise of the independence of the random error components were described.

Keywords: technical efficiency of regions, stochastic frontier models, model's specification, dependence of random values, copulas.

1. Введение

В работе была доказана необходимость учета возможной зависимости компонент ошибки для получения корректных оценок технической эффективности в случае высокой степени истинной корреляции компонент в модели стохастической производственной функции. Однако результаты, полученные в процессе анализа реальных данных, свидетельствуют о том, что величина зависимости случайных составляющих ошибки не достигает высоких показателей. В связи с этим была разработана методика спецификации производственной функции, позволяющая ответить на вопрос о возможности или невозможности применения классической предпосылки о независимости компонент ошибки в задачах различного типа (Айвазян и др., 2014).

В нашем исследовании данная методика применяется с целью получения корректных оценок эффективности регионов РФ. Рассматривается расширенный класс моделей стохастической производственной функции, детерминированная часть которой выражается степенной функцией, а случайные компоненты ошибки могут быть статистически зависимы. В общем виде модель может быть представлена как

$$M_r: R_i = \beta_0 \cdot (x_i^1)^{\beta_1} \cdot (x_i^2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x_i^p)^{\beta_p} \cdot e^{V_i - U_i}, \text{ где } R_i - \text{объясняемая компонента } i\text{-ого}$$

объекта (мы рассмотрим ВРП), x_i — объясняющие компоненты (напр., факторы производства), случайные составляющие ошибки $V_i \sim N(0; \sigma_V^2)$ и $U_i \sim N^+(\mu; \sigma_U^2)$ могут быть зависимы.

* Corresponding author

E-mail addresses: vika57vika@yandex.ru (V.A. Rudenko)

В соответствии с (Айвазян и др., 2014; Rudenko et al., 2017) возможная зависимость компонент описана с помощью аппарата копула-функций. Апробация полученной методики проведена на основе двух видов копул: нормальной и копулы Франка (Айвазян, Фантаццини, 2014; Благовещенский, 2012).

Ниже представлены основные формулы и обозначения для каждой из рассматриваемых копул.

1) Плотность двумерной нормальной копула-функции имеет вид:

$$c^{Norm}(u_1, u_2) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta^T (\Sigma^{-1} - I) \zeta\right),$$

где $\zeta = (\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))^T$ – вектор, компонентами которого являются обратные функции одномерного стандартного нормального распределения,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix} \text{ – корреляционная матрица, } I \text{ – единичная матрица.}$$

2) Плотность копулы Франка задается выражением:

$$c^{Frank}(u_1, u_2, \alpha) = \frac{-\alpha(e^{-\alpha} - 1)e^{-\alpha(u_1+u_2)}}{\left((e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1) + e^{-\alpha} - 1\right)^2}, \quad \alpha \neq 0.$$

Пусть $f_V(x)$ и $f_U(y)$ – одномерные плотности распределения случайных составляющих ошибки V_i и U_i соответственно в модели стохастической производственной функции. Совместная плотность распределения V_i и U_i выражается как:

$$f^N(x, y) = c^{Norm}(F_V(x), F_U(y)) \cdot f_V(x) \cdot f_U(y) \text{ или}$$

$$f^F(x, y) = c^{Frank}(F_V(x), F_U(y)) \cdot f_V(x) \cdot f_U(y) \text{ в зависимости от выбранной копула-функции.}$$

Для анализа необходимости учета возможной зависимости компонент ошибки проверяется статистическая гипотеза о равенстве (близости) нулю коэффициента копулы $r(\alpha)^*$:

$H_r : r = 0$ (или $\alpha \rightarrow 0$) (величины V_i и U_i являются независимыми)

при альтернативе

$H_r^A : r \neq 0$ (или $\alpha \neq 0$) (между величинами V_i и U_i существует значимая зависимость)

Для ее проверки используем классическую статистику разности логарифмов функций правдоподобия $Lr = 2(\ln L(H_r^A) - \ln L(H_r))$, где $\ln L(H_r^A)$ – логарифм значения функции правдоподобия при альтернативной гипотезе, $\ln L(H_r)$ – логарифм значения функции правдоподобия при нулевой гипотезе †.

В Приложении 1 приведена схема спецификации модели внутри расширенного класса моделей стохастической производственной функции. Основой для разработанной схемы спецификации служит методика, представленная в исследовании (Айвазян и др., 2012). Кроме того, в работе (Rudenko, 2017) приведены результаты, которые позволяют сформулировать предположение о том, что в случае наличия значимых факторов эффективности компоненты V_i и U_i являются слабо коррелированными. Вычисления,

* Случаю независимости соответствует $r = 0$ в нормальной копуле и $\alpha \rightarrow 0$ в копуле Франка.

† Более подробное объяснение можно найти в (Self, Liang, 1987; Coelli, 1995).

проведенные в процессе анализа различных данных, показывают, что случайные компоненты ошибки можно считать независимыми при соблюдении ряда условий (помимо значимости), наложенных на выбор факторов эффективности с целью избавления от эффекта мультиколлинеарности. В связи с этим следует отметить, что модель M_r входит только в ту часть схемы спецификации, которая соответствует случаю отсутствия информации о факторах эффективности.

2. Результаты и обсуждение

Эмпирическая часть исследования посвящена анализу реальных экономических показателей 80 субъектов РФ.

В работе рассмотрена двухфакторная модель производственного потенциала регионов вида: $R_i = \beta_0 \cdot K_i^{\beta_1} \cdot L_i^{\beta_2} \cdot e^{V_i - U_i}$, $i = 1, \dots, n$,

где R_i – объем ВРП i -ого региона (в млн. руб.), K_i – стоимость основных фондов i -ого региона (на конец года, в млн. руб.), L_i – численность его экономически активного населения (в тыс. человек), n – число анализируемых субъектов РФ.

Случайная величина V_i подчиняется $(0; \sigma_V^2)$ -нормальному распределению, а случайная величина U_i распределена в общем случае в соответствии с усеченным в нуле нормальным законом, имеющим среднее значение μ и дисперсию σ_U^2 (т.е. $U_i \sim N^+(\mu; \sigma_U^2)$), причем, случайные величины V_i и U_i могут быть статистически зависимыми.

В работах (Айвазян и др., 2016а; Айвазян и др., 2016b) предложен способ формирования однородных групп регионов на основе базовых характеристик структуры ВРП, описание которых представлено в Таблице 1.

Таблица 1. Характеристики однородных групп регионов по структуре ВРП

Группа	Название группы	Число регионов в группе	Характеристика группы
G1	Базовая	38	Равномерно развитая промышленность
G2	«Добывающие»	11	Развитая добывающая промышленность
G3	«Обрабатывающие»	12	Развитые обрабатывающие производства
G4	«Сельскохозяйственные»	11	Развитое сельское хозяйство
G5	«Развивающиеся»	8	Развивающиеся сельскохозяйственные регионы

Список регионов, вошедших в каждую из групп, приведен в Приложении 2.

На основе имеющихся показателей за 2013-2015 гг., которые также можно найти в (Айвазян и др., 2016а; Айвазян и др., 2016b), для каждой группы был проведен эмпирический анализ в соответствии со схемой спецификации, предложенной в первой части.

В качестве примера приведем результаты, полученные в группе G3 («обрабатывающие регионы») за 2014 год. Данная группа состоит из следующих областей: Владимирской, Вологодской, Калужской, Липецкой, Нижегородской, Новгородской, Омской, Свердловской, Тульской, Челябинской, Ярославской и республики Башкортостан. В Таблице 2 представлены результаты расчетов, проведенных двумя способами:

- в статистическом пакете Stata 10.0 в предположении независимости случайных составляющих ошибки (модель M_1),

- с помощью написанного в программе Excel макроса, в предположении возможной зависимости компонент с использованием нормальной копулы и копулы Франка (модели M_r и M_α соответственно).

Таблица 2. Оценки параметров моделей

	M_1	M_r	M_α
<i>Оценки коэффициентов при факторах производства *</i>			
$\ln K$	0.443	0.444	0.445
$\ln L$	0.562	0.560	0.559
$const$	3.15	3.15	3.14
<i>Оценки параметров компонент ошибки †</i>			
μ	0	0.004	0.01
σ_v	0.08	0.078	0.078
σ_u	0.0015	0.0012	0.002
$r(\alpha)$	0	-0.198	-3.5
ρ Спирмена	0	-0.189	-0.507
p -значение, полученное при проверки гип. об отсутствии неэфф-ти	1.000	—	—
Кол-во наблюдений	12	12	12
Логарифм функции правдоподобия	13.273	13.389	13.387

Как видно из Таблицы 2, значения логарифмов функций правдоподобия, оценки параметров факторов производства и компонент ошибки во всех трех моделях отличаются незначительно. Кроме того, представленные данные свидетельствуют об отсутствии неэффективности в рассматриваемых моделях. В соответствии со схемой, приведенной в первой части, цепочка рассуждений в данной выборке выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{c} M_2; M_2^-; M_1; M_1^+; H_0; H_0^-; H_1; H_1^+; M_0; H_0; H_0^-; M_{r(\alpha)}; M_{r(\alpha)}^+; H_r; H_r^+ \\ \hat{M}_0 \end{array} \right\}$$

Краткое описание моделей и гипотез, участвующих в цепочке, но не представленных в первой части, можно найти в Приложении 3. Итоговой моделью является модель линейной регрессии M_0 без компоненты неэффективности. Однако в связи с тем, что оценки основных факторов производства в моделях M_1 и M_0 в случае подтверждения гипотезы об отсутствии неэффективности совпадают, для текущего анализа удобнее рассматривать модель M_1 , так как при ее использовании можно вычислить ранги значений технических эффективностей.

* Все полученные оценки значимы (p-value близки к 0).

† Значимость параметров компонент ошибки не оценивалась.

Отметим, что для рассматриваемой выборки введение дополнительного параметра (r или α), характеризующего зависимость компонент ошибки, позволяет лишь немного расширить диапазон значений технических эффективностей (TE). Кроме того, ранги технических эффективностей ($rk(TE)$) являются согласованными во всех трех моделях (M_1, M_r и M_α), что видно из Таблиц 3 и 4.

Таблица 3. Значения технических эффективностей и их рангов

Область	TE_1	$rk(TE_1)$	TE_r	$rk(TE_r)$	TE_α	$rk(TE_\alpha)$
Владимирская	0,998826	12	0,99574	12	0,991606	12
Вологодская	0,998830	9	0,995833	9	0,991941	9
Калужская	0,998843	4	0,996105	4	0,993549	4
Липецкая	0,998842	5	0,99609	5	0,993453	5
Нижегородская	0,998835	7	0,995951	7	0,992585	7
Новгородская	0,998846	3	0,996176	3	0,993939	3
Омская	0,998855	1	0,996386	1	0,994631	1
Республика Башкортостан	0,998854	2	0,996365	2	0,994597	2
Свердловская	0,998841	6	0,996074	6	0,993368	6
Тюльская	0,998833	8	0,995902	8	0,992287	8
Челябинская	0,998829	10	0,995803	10	0,99182	10
Ярославская	0,998827	11	0,995773	11	0,991697	11

Таблица 4. Корреляция Пирсона значений технических эффективностей

	TE_1	TE_r	TE_α
TE_1	1.000	0.999	0.995
TE_r	0.999	1.000	0.994
TE_α	0.995	0.994	1.000

При анализе остальных групп регионов для различных лет с 2013 по 2015 гг. были получены похожие результаты – оценки, рассчитанные по всем трем моделям, хорошо согласованы, при этом величины функций правдоподобия моделей с копулами незначительно больше, чем в классических моделях. Использование аппарата копула-функций во всех региональных группах дает возможность расширить диапазон значений технических эффективностей, но не оказывает существенного влияния на оценки параметров основных факторов производства. Введение дополнительного параметра зависимости при использовании копул позволяет переоценить дисперсии составляющих ошибки, что раскрывает неэффективность иначе, нежели в классической модели, но ранги технических эффективностей, рассчитанных во всех моделях, имеют высокую степень согласованности.

3. Выводы

1. В работе представлена схема, основанная на методике спецификации стохастической производственной функции с учетом возможной зависимости компонент. В соответствии с проведенными исследованиями можно утверждать, что данная методика позволяет отследить негативное влияние некорректного применения предпосылки о независимости компонент ошибки и устранить его с помощью использования аппарата копула-функций.

2. В процессе анализа реальных данных было установлено, что во всех моделях для различных групп регионов в рассматриваемый период времени можно принять гипотезу о независимости случайных компонент ошибки в модели стохастической производственной функции. Это наблюдение позволяет утверждать, что оценки, полученные в классических

моделях, являются корректными и могут быть использованы для решения различных задач, связанных с ранжированием регионов по уровню технической эффективности. Кроме того, при решении задач регионального уровня, связанных с оценкой влияния *основных факторов производства* на уровень ВРП, допустимо использование классических моделей стохастической производственной функции, использующих предпосылку о независимости случайных составляющих ошибки.

3. Использование аппарата копула-функций позволяет расширить диапазон значений технических эффективностей в случае, когда в классических моделях не отвергается гипотеза об отсутствии неэффективности. Эти значения в высокой степени согласованы со значениями, полученными при построении классических моделей без учета возможной зависимости компонент.

4. Проведенные в процессе исследования вычисления позволяют предположить, что в ситуациях, когда при проверке гипотезы об отсутствии связи компонент ошибки значение тестовой статистики близко к критическому, при решении задач нахождения корректных оценок технических эффективностей регионов также следует рассмотреть и другие виды копул. Отметим, что этот шаг может быть опущен, если гипотезы об отсутствии связи компонент ошибки отвергаются с высоким уровнем *p-value* (как, например, в случае с рассматриваемыми региональными группами).

4. Благодарности

Исследование выполнено при поддержке гранта РФФИ № 17-18-01080.

Литература

Айвазян и др., 2012 – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А. Некоторые вопросы спецификации трехфакторных моделей производственного потенциала компании, учитывающих интеллектуальный капитал // *Прикладная эконометрика*. 2012. №3(27), С. 36-69.

Айвазян и др., 2014 – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А. Исследование зависимости случайных составляющих остатков в модели стохастической границы // *Прикладная эконометрика*. 2014. №2(34), С. 3–18.

Айвазян и др., 2016b – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Метод кластеризации регионов РФ с учетом отраслевой структуры ВРП // *Прикладная эконометрика*. 2016. № 1 (41), С. 24–46.

Айвазян и др., 2016a – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Кудров А.В. Модели производственного потенциала и оценки технологической эффективности регионов РФ с учетом структуры производства // *Экономика и математические методы*. 2016. № 1 (52), С. 28–44.

Айвазян, Фантаццини, 2014 – Айвазян С.А., Фантаццини Д. Методы эконометрики. М.: Магистр, 2014.

Благовещенский, 2012 – Благовещенский Ю.Н. Основные элементы теории копул // *Прикладная эконометрика*. 2012. №2(26), С. 113-130.

Coelli, 1995 – Coelli T.J. Estimators and hypothesis tests for a stochastic frontier function: A Monte Carlo analysis // *Journal of Productivity Analysis*. 1995. № 6, pp. 247–268.

Rudenko et al., 2017 – Rudenko V.A., Aivazyuan S.A., Afanasyev M.Y. Specification of a stochastic production function model in the extended class of stochastic frontier models // *Modeling of Artificial Intelligence*. 2017. № 4(1), pp. 21-28.

Rudenko, 2017 – Rudenko V.A. An impact of efficiency factors on dependence between error components in the stochastic production function model / *Материалы XIII международной научно-практической конференции «Наука в современном информационном обществе»*, 3-4 октября 2017 г., North Charleston, USA Том 3, с. 101-103.

Self, Liang, 1987 – Self S. G., Liang K.-Y. Asymptotic properties of maximum likelihood estimators and likelihood ratio tests under nonstandard conditions // *Journal of the American Statistical Association*. 1987. № 82, pp. 605–610.

References

Aivazyuan i dr., 2012 – Aivazyuan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Rudenko, V.A. (2012). Nekotorye voprosy spetsifikatsii trekhfaktornykh modelei proizvodstvennogo potentsiala kompanii,

uchityvayushchikh intellektual'nyi kapital [Some questions of specification of three-factor models of the company's production potential, taking into account intellectual capital]. *Prikladnaya ekonometrika*. №3(27), pp. 36-69. [in Russian]

[Aivazyan i dr., 2014](#) – Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Rudenko, V.A. (2014). Issledovanie zavisimosti sluchainykh sostavlyayushchikh ostatkov v modeli stokhasticheskoi granitsy [Investigation of the dependence of the random components of the residues in the stochastic boundary model]. *Prikladnaya ekonometrika*. №2(34), pp. 3-18. [in Russian]

[Aivazyan i dr., 2016a](#) – Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Kudrov, A.V. (2016). Modeli proizvodstvennogo potentsiala i otsenki tekhnologicheskoi effektivnosti regionov RF s uchetom struktury proizvodstva [Models of production potential and assessment of technological efficiency of RF regions taking into account the production structure]. *Ekonomika i matematicheskie metody*. № 1 (52), pp. 28-44. [in Russian]

[Aivazyan i dr., 2016b](#) – Aivazyan, S.A., Afanas'ev, M.Yu., Kudrov, A.V. (2016). Metod klasterizatsii regionov RF s uchetom otraslevoi struktury VPR [Method of clusterization of Russian regions taking into account the GRP sector structure]. *Prikladnaya ekonometrika*. № 1 (41), pp. 24-46. [in Russian]

[Aivazyan, Fantatstini, 2014](#) – Aivazyan, S.A., Fantatstini, D. (2014). Metody ekonometriki [Methods of econometrics]. M.: Magistr. [in Russian]

[Blagoveshchenskii, 2012](#) – Blagoveshchenskii, Yu.N. (2012). Osnovnye elementy teorii kopul [The basic elements of the theory of copulas]. *Prikladnaya ekonometrika*. №2(26), pp. 113-130. [in Russian]

[Coelli, 1995](#) – Coelli, T.J. (1995). Estimators and hypothesis tests for a stochastic frontier function: A Monte Carlo analysis. *Journal of Productivity Analysis*. № 6, pp. 247-268.

[Rudenko et al., 2017](#) – Rudenko, V.A., Aivazyan, S.A., Afanasyev, M.Y. (2017). Specification of a stochastic production function model in the extended class of stochastic frontier models. *Modeling of Artificial Intelligence*. № 4(1), pp. 21-28.

[Rudenko, 2017](#) – Rudenko, V.A. (2017). An impact of efficiency factors on dependence between error components in the stochastic production function model. *Materials of the XIII International Scientific and Practical Conference "Science in the Modern Information Society", 3-4 October 2017, North Charleston, USA Vol. 3*, pp. 101-103.

[Self, Liang, 1987](#) – Self, S. G., Liang, K.-Y. (1987). Asymptotic properties of maximum likelihood estimators and likelihood ratio tests under nonstandard conditions. *Journal of the American Statistical Association*. № 82, pp. 605-610.

Схема спецификации стохастической производственной функции в задачах оценивания технической эффективности регионов РФ

Виктория Алексеевна Руденко ^{a, *}

^aЦентральный экономико-математический институт РАН (ЦЭМИ РАН), Российская Федерация

Аннотация. В работе предложена методика спецификации моделей стохастической производственной функции с учетом возможной зависимости случайных компонент ошибки для решения задач, связанных с ранжированием объектов по уровню технической эффективности на производственно-региональном уровне. На основе реальных данных по 80 субъектам РФ, сгруппированных по базовым характеристикам структуры ВРП, в соответствии с разработанной схемой спецификации проведен эмпирический анализ влияния возможной зависимости компонент на значения технических эффективностей регионов. Сформулированы основные типы задач, для решения которых возможно использование предпосылки о независимости случайных составляющих ошибки.

Ключевые слова: техническая эффективность регионов, модели стохастической границы, спецификация, зависимость случайных величин, копулы.

* Корреспондирующий автор

Адреса электронной почты: vika57vika@yandex.ru (В.А. Руденко)

Приложение 1

Большинство обозначений и описание рассматриваемых в схеме классических моделей, использующих предпосылку о независимости компонент ошибки, можно найти в (Айвазян и др., 2012). Обозначения дополнительных элементов схемы спецификации модели внутри расширенного класса моделей стохастической производственной функции, возникающие при отказе от использования предпосылки о независимости компонент ошибки, можно найти в (Айвазян и др., 2014; Rudenko et al., 2017).

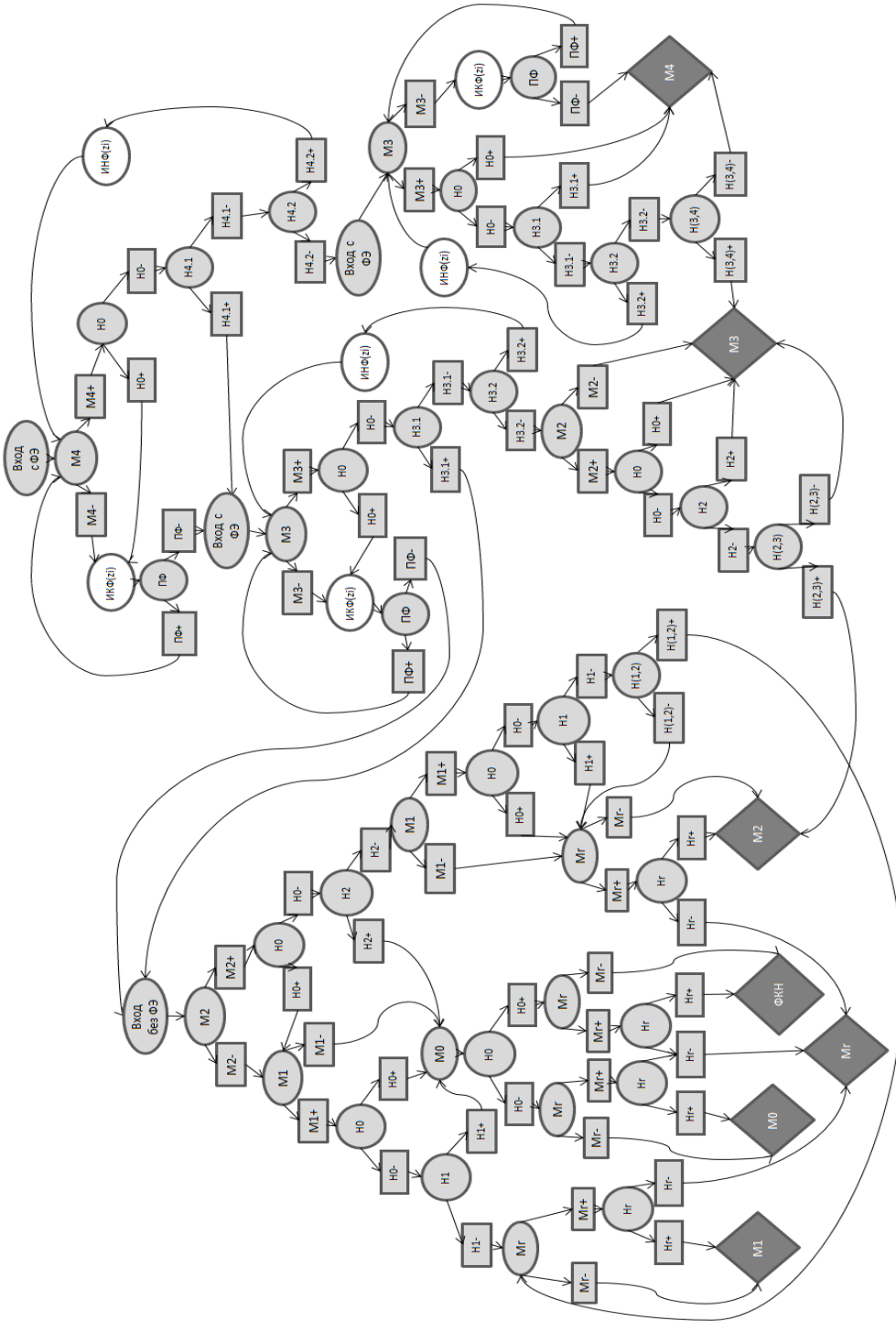


Рис. 1. Схема спецификации модели внутри расширенного класса моделей стохастической границы

Приложение 2

Список регионов, вошедших в группы G1-G5 в соответствии с классификацией, предложенной в (Айвазян и др., 2016а; Айвазян и др., 2016б).

Гр.		
G1	«Базовая» (Равномерно развитая промышленность)	Амурская область, Астраханская область, Белгородская область, Брянская область, Волгоградская область, Забайкальский край, Ивановская область, Иркутская область, Кабардино-Балкарская Республика, Камчатский край, Калининградская область, Карачаево-Черкесская Республика, Кировская область, Костромская область, Красноярский край, Курская область, Ленинградская область, Магаданская область, Московская область, Мурманская область, Новосибирская область, Орловская область, Пермский край, Приморский край, Республика Карелия, Республика Марий Эл, Республика Мордовия, Республика Хакасия, Рязанская область, Самарская область, Саратовская область, Смоленская область, Тверская область, Ульяновская область, Хабаровский край, Чувашская Республика, г. Москва, г. Санкт-Петербург
G2	«Добывающие» (Развитая добывающая промышленность)	Архангельская область, Кемеровская область, Оренбургская область, Республика Коми, Республика Саха (Якутия), Республика Татарстан, Сахалинская область, Томская область, Тюменская область, Удмуртская Республика, Чукотский автономный округ
G3	«Обрабатывающие» (Развитые обрабатывающие производства)	Владимирская область, Вологодская область, Калужская область, Липецкая область, Нижегородская область, Новгородская область, Омская область, Республика Башкортостан, Свердловская область, Тульская область, Челябинская область, Ярославская область
G4	«Сельскохозяйственные» (Развитое сельское хозяйство)	Алтайский край, Воронежская область, Краснодарский край, Курганская область, Пензенская область, Псковская область, Республика Адыгея, Республика Бурятия, Ростовская область, Ставропольский край, Тамбовская область
G5	«Развивающиеся» (Развивающиеся сельскохозяйственные регионы)	Еврейская автономная область, Республика Алтай, Республика Дагестан, Республика Ингушетия, Республика Калмыкия, Республика Северная Осетия – Алания, Республика Тыва, Чеченская Республика

Приложение 3

Классические р-факторные модели, участвующие в схеме спецификации, в которых используется предпосылка о независимости компонент ошибки:

$$M_2 : R_i = \beta_0 \cdot (x_i^1)^{\beta_1} \cdot (x_i^2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x_i^p)^{\beta_p} \cdot e^{V_i - U_i}, \text{ где } V_i \sim N(0; \sigma_V^2), U_i \sim N^+(\mu; \sigma_U^2).$$

$$M_1 : R_i = \beta_0 \cdot (x_i^1)^{\beta_1} \cdot (x_i^2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x_i^p)^{\beta_p} \cdot e^{V_i - U_i}, \text{ где } V_i \sim N(0; \sigma_V^2), U_i \sim N^+(0; \sigma_U^2)$$

$$M_0 : R_i = \beta_0 \cdot (x_i^1)^{\beta_1} \cdot (x_i^2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x_i^p)^{\beta_p} \cdot e^{V_i}, \text{ где } V_i \sim N(0; \sigma_V^2).$$

Модель M_1 является частным случаем модели M_2 (при $\mu = 0$), а M_0 – частный случай модели M_1 (при $\sigma_U^2 = 0$), т.е. модель линейной регрессии без компоненты неэффективности.

Для ответа на вопрос о корректности использования того или иного способа измерения фактора производства проверяются гипотезы:

$H_0 : \exists i = 1, \dots, p : \beta_i \leq 0$ (среди факторов производства существует незначимый фактор или фактор с отрицательным коэффициентом)
 $H_0^A : \forall i = 1, \dots, p : \beta_i > 0$ (все факторы производства значимы и имеют положительные коэффициенты)

С целью подтверждения или опровержения отсутствия неэффективности в рамках рассмотрения модели M_1 проверяется гипотеза H_1 :

$H_1 : \sigma_U^2 = 0$ (неэффективности нет)
при альтернативе
 $H_1^A : \sigma_U^2 > 0$ (неэффективность присутствует)

Описание способов проверки приведенных гипотез можно найти в ([Айвазян и др., 2012](#)).